

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMLERİNİN
OPTİMAL KONTROLÜ**

DOKTORA TEZİ

DERYA AVCI

BALIKESİR, OCAK - 2013

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMLERİNİN
OPTİMAL KONTROLÜ**

DOKTORA TEZİ

DERYA AVCI

BALIKESİR, OCAK - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Derya AVCI tarafından hazırlanan “UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMLERİNİN OPTİMAL KONTROLÜ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 28.01.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR



Üye
Prof. Dr. Doğan KAYA



Üye
Doç. Dr. Fatma AYAZ



Üye
Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR



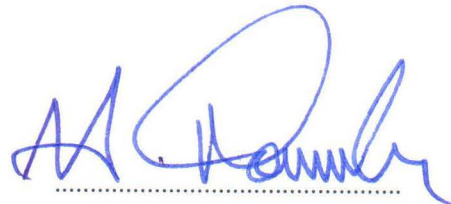
Üye
Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI



ÖZET

**UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMLERİNİN
OPTİMAL KONTROLÜ
DOKTORA TEZİ
DERYA AVCI
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. NECATİ ÖZDEMİR)

BALIKESİR, OCAK - 2013

Doğadaki pek çok fiziksel olay ideal ya da diğer bir deyişle normal bir davranış göstermez. Bu olayların anlaşılır hale gelebilmesinde matematiksel disiplin bir araç olarak kullanılmaktadır. Klasik analizin keyfi mertebeli türev ve integrallere genelleştirmesi olarak bilinen kesirli analiz de bu tezde çalışılan anormal difüzyon sürecinin matematiksel modellenmesinde kullanılan bir disiplindir. Genelleştirilmiş difüzyon olarak da adlandırılan anormal difüzyon davranışı uzay ve zaman kesirli türevli diferansiyel denklemler ile ifade edilir.

Bu tezin çatısını oluşturan iki temel problemden ilki kartezyen, kutupsal ve küresel koordinat sistemlerinde tanımlanan bir uzay-zaman kesirli difüzyon sürecidir; öyle ki Caputo zaman türevi ve kesirli Laplace operatörleri ile tanımlanmıştır. Bu tipteki fiziksel sistemlerin optimal kontrol problemi de tezin ikinci temel problemidir. Bir Kesirli Optimal Kontrol Problemi'nde ya sistem dinamikleri ya da performans indeks en az bir kesirli türev içermektedir. Bu problemin amacı sistemin durum ve kontrol fonksiyonları ile belirlenen performans indeksi minimize (ya da maksimize) eden optimal kontrolü belirlemektir. Tez probleminde sistem dinamikleri uzay-zaman kesirli difüzyon denklemi ile ifade edilmiştir.

Çözüm aşamasında uzay-zaman kesirli difüzyon denklemi, kesirli Laplace operatörünün spektral gösterimi tanımı ile özfonksiyon genişlemesi yöntemi kullanılarak zaman kesirli türevli diferansiyel denkleme indirgenmiştir. Optimallik koşullarının belirlenmesinde Lagrange çarpanı tekniği kullanılarak sağ ve sol kesirli türevli denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sisteminin nümerik çözümleri için Grünwald-Letnikov yaklaşımı kullanılmıştır. Ayrıca Volterra integral denklemleri üzerine kurulan iterasyonel bir yaklaşım ile karşılaştırılarak avantajları vurgulanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: uzay-zaman kesirli difüzyon denklemi, optimal kontrol problemi, kesirli Laplace operatörü, Riesz, Caputo, Grünwald-Letnikov, özfonksiyon genişlemesi yöntemi.

ABSTRACT

**OPTIMAL CONTROL OF
SPACE-TIME FRACTIONAL DIFFUSION SYSTEMS
PH.D THESIS
DERYA AVCI
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. NECATİ ÖZDEMİR)

BALIKESİR, JANUARY 2013

Many physical events in the nature don't show ideal, i.e. normal, behavior. Mathematical discipline is used as a tool to make these events comprehensible. Fractional Calculus known as the generalization of classical analysis to arbitrary order derivatives and integrals is a discipline which is used for mathematical modelling of anomalous diffusion process studied in this thesis. Anomalous diffusion also called as the generalized diffusion is defined by space and time fractional differential equations.

The first one of the two main problems that constitutes the structure of this thesis is a space-time fractional diffusion process defined in cartesian, polar, spherical coordinate systems such that this process is described with the Caputo fractional derivative and fractional Laplacian operators. Optimal control problem of these type of problems is the second basis problem of our thesis. In a Fractional Optimal Control Problem, either the system dynamics or the performance index contain at least one fractional derivative. The aim of this problem is determination of the optimal control function that minimizes (or maximizes) the performance index described with the state and control functions of the system. In this thesis problem, system dynamics are stated with the space-time fractional diffusion equation.

At the solution process, the space-time fractional diffusion equation is reduced to a time fractional differential equation by using the eigenfunction expansion method with the definition of spectral representation of the fractional Laplacian operator. In the determination of the optimality conditions, differential equation system with the right and left side fractional derivatives is obtained by using the Lagrange multiplier technique. For the numerical solutions of this equation system, Grünwald-Letnikov approximation is used. In addition, the advantages of this method is expressed by the comparison with an iterational method based on the Volterra integral equations.

KEYWORDS: space-time fractional diffusion equation, optimal control problem, fractional Laplace operator, Riesz, Caputo, Grünwald-Letnikov, eigenfunction expansion method.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	8
3. LİTERATÜR ÇALIŞMALARI	14
3.1 Anormal Difüzyon Problemleri.....	14
3.2 Kesirli Optimal Kontrol Problemleri.....	29
4. BİR UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMİNİN BİR BOYUTLU UZAYDA VE KARTEZYEN KOORDİNATLARDA OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ	41
4.1 Analitik Çözüm	45
4.2 Nümerik Çözüm	46
5. BİR UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMİNİN KUTUPSAL KOORDİNATLARDA OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ.....	57
5.1 Analitik Çözüm	61
5.2 Nümerik Çözüm	62
6. BİR UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMİNİN KÜRESEL KOORDİNATLARDA OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ....	70
6.1 Yarı Radyal Simetrik Durum.....	70
6.1.1 Analitik Çözüm.....	76
6.1.2 Nümerik Çözüm.....	76
6.2 Tam Radyal Simetrik Durum	84
6.2.1 Analitik Çözüm.....	88
6.2.2 Nümerik Çözüm.....	89
7. GRÜNWARD-LETNİKOV NÜMERİK YAKLAŞIMININ İTERASYONEL BİR NÜMERİK YÖNTEMLE KARŞILAŞTIRMASI	91
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	106
9. KAYNAKLAR.....	108

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

- Şekil 4.1:** Sistemin $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $\alpha = 1$, $\beta=1.5$ ve $N = 100$50
- Şekil 4.2:** Sistemin $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $\alpha = 1$, $\beta=1.5$ ve $N = 100$50
- Şekil 4.3:** GL nümerik yaklaşımındaki adım uzunluğunun sistemin $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun cevabına etkisi: $\alpha = 0.9$, $\beta=1.5$51
- Şekil 4.4:** GL nümerik yaklaşımındaki adım uzunluğunun sistemin $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun cevabına etkisi: $\alpha = 0.9$, $\beta=1.5$51
- Şekil 4.5:** $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonun nümerik çözümünün düşük α değerlerine göre davranışı: $\beta = 1.5$, $N = 500$52
- Şekil 4.6:** $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonun nümerik çözümünün düşük α değerlerine göre davranışı: $\beta = 1.5$, $N = 500$52
- Şekil 4.7:** $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonun nümerik çözümünün yüksek α değerlerine göre davranışı: $\beta = 1.5$, $N = 100$53
- Şekil 4.8:** $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonun nümerik çözümünün yüksek α değerlerine göre davranışı: $\beta = 1.5$, $N = 100$53
- Şekil 4.9:** $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonun nümerik çözümünün yüksek β değerlerine göre davranışı: $\alpha = 1$, $N = 100$54
- Şekil 4.10:** $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonun nümerik çözümünün yüksek β değerlerine göre davranışı: $\alpha = 1$, $N = 100$54
- Şekil 4.11:** Sistemin $x(y,t)$ durum fonksiyonuna $x_i(t)$ durum bileşen fonksiyonlarının katkısı: $\alpha = 0.9$, $\beta=1.5$55
- Şekil 4.12:** Sistemin $u(y,t)$ kontrol fonksiyonuna $u_i(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının katkısı: $\alpha = 0.9$, $\beta=1.5$55
- Şekil 4.13:** $x(y,t)$ durum fonksiyonunun yüzeyi: $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$, $N = 100$56
- Şekil 4.14:** $u(y,t)$ optimal kontrol fonksiyonunun yüzeyi:
 $\alpha = 0.99$, $\beta = 1.9$, $N = 100$56
- Şekil 5.1:** $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun α parametresinin değişimine bağlı olarak analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $N = 100$64
- Şekil 5.2:** $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun α parametresinin değişimine bağlı olarak analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $N = 100$65
- Şekil 5.3:** $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun β parametresinin değişimine bağlı olarak analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $N = 100$65

Şekil 5.4: $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun β parametresinin değişimine bağlı olarak analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $N=100$.	66
Şekil 5.5: GL yaklaşımındaki N adım sayısının değişimine göre $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun davranışı: $\alpha=0.75, \beta=1.5$.	66
Şekil 5.6: GL yaklaşımındaki N adım sayısının değişimine göre $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun davranışı: $\alpha=0.75, \beta=1.5$.	67
Şekil 5.7: Sistemin $x(r,t)$ durum fonksiyonuna $x_i(t)$ durum bileşen fonksiyonlarının katkısı: $\alpha=0.75, \beta=1.75$.	67
Şekil 5.8: Sistemin $u(r,t)$ kontrol fonksiyonuna $u_i(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının katkısı: $\alpha=0.75, \beta=1.75$.	68
Şekil 5.9: Sistemin $x(r,t)$ durumunun yüzeyi: $\alpha=0.75, \beta=1.75, N=100$.	68
Şekil 5.10: Sistemin $u(r,t)$ kontrolünün yüzeyi: $\alpha=0.75, \beta=1.75, N=100$.	69
Şekil 6.1: $x_{01}(t)$ durum bileşen fonksiyonunun α parametresinin değişimine bağlı olarak çözümlerinin karşılaştırması: $\beta=1.75, N=100$.	79
Şekil 6.2: $u_{01}(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun α parametresinin değişimine bağlı olarak çözümlerinin karşılaştırması: $\beta=1.75, N=100$.	79
Şekil 6.3: $x_{01}(t)$ durum bileşen fonksiyonunun β parametresinin değişimine bağlı olarak çözümlerinin karşılaştırması: $\alpha=0.9, N=100$.	80
Şekil 6.4: $u_{01}(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun β parametresinin değişimine bağlı olarak çözümlerinin karşılaştırması: $\alpha=0.9, N=100$.	80
Şekil 6.5: GL yaklaşımındaki N adım sayısının değişimine göre $x_{01}(t)$ durum bileşen fonksiyonunun davranışı: $\alpha=0.9, \beta=1.75$.	81
Şekil 6.6: GL yaklaşımındaki N adım sayısının değişimine göre $u_{01}(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun davranışı: $\alpha=0.9, \beta=1.75$.	81
Şekil 6.7: Sistemin $x(r,t)$ durumunun yüzeyi: $\alpha=0.9, \beta=1.75, N=100, \theta=\frac{\pi}{3}, n=m=4$.	82
Şekil 6.8: Sistemin $u(r,t)$ kontrolünün yüzeyi: $\alpha=0.9, \beta=1.75, N=100, \theta=\frac{\pi}{3}, n=m=4$.	82
Şekil 6.9: Sistemin $x(\theta,t)$ durumunun yüzeyi: $\alpha=0.9, \beta=1.75, N=100, r=0.5, n=m=4$.	83
Şekil 6.10: Sistemin $u(\theta,t)$ kontrolünün yüzeyi: $\alpha=0.9, \beta=1.75, N=100, r=0.5, n=m=4$.	83
Şekil 7.1: Farklı Çözüm Yöntemlerinin sistemin $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonu üzerindeki etkisi: $\alpha=1, \beta=1.75$ ve $N=100$.	100

Şekil 7.2: Farklı Çözüm Yöntemlerinin sistemin $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonu üzerindeki etkisi: $\alpha = 1, \beta = 1.75$ ve $N = 100$	101
Şekil 7.3: $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonu için alt zaman aralık uzunluklarındaki değişimin çözüm yöntemleri üzerindeki etkisi: $\alpha = 0.5, \beta = 1.75$	101
Şekil 7.4: $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonu için alt zaman aralık uzunluklarındaki değişimin çözüm yöntemleri üzerindeki etkisi: $\alpha = 0.5, \beta = 1.75$	102
Şekil 7.5: β parametre değişiminin çözüm yöntemlerine göre $x_1(t)$ üzerindeki etkisi: $\alpha = 1, N = 50$	102
Şekil 7.6: β parametre değişiminin çözüm yöntemlerine göre $u_1(t)$ üzerindeki etkisi: $\alpha = 1, N = 50$	103
Şekil 7.7: α parametre değişiminin çözüm yöntemlerine göre $x_1(t)$ üzerindeki etkisi: $\beta = 1.5, N = 50$	103
Şekil 7.8: α parametre değişiminin çözüm yöntemlerine göre $u_1(t)$ üzerindeki etkisi: $\beta = 1.5, N = 50$	104

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 7.1: GL ve İterasyonel yaklaşımlarının karşılaştırması105

SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Tanımı</u>
N^+	: Pozitif doğal sayılar kümesi
$L_1(a,b)$: (a,b) üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\Gamma(\cdot)$: Gamma fonksiyonu
$E_\alpha(z)$: Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
${}_a I_t^\alpha$: Sol Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_t I_b^\alpha$: Sağ Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_a D_t^\alpha$: Sol Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}_t D_b^\alpha$: Sağ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}_a^c D_t^\alpha$: Sol Caputo kesirli türev operatörü
${}_t^c D_b^\alpha$: Sağ Caputo kesirli türev operatörü
L	: Laplace operatörü
${}_x D_\theta^\beta$: Riesz-Feller kesirli türev operatörü
$\frac{d^\alpha}{d x ^\alpha}$: Riesz kesirli türev operatörü (Zaslavsky)
${}_x I_+^\alpha$: Sol Weyl kesirli integral operatörü
${}_x I_-^\alpha$: Sağ Weyl kesirli integral operatörü
${}_x D_-^\alpha$: Sağ Weyl kesirli türev operatörü
${}_x D_+^\alpha$: Sol Weyl kesirli türev operatörü
${}_x D_0^\alpha$: Riesz kesirli türev operatörü (Riesz)
$(-\Delta)^{\alpha/2}$: Kesirli Laplace operatörü

<u>Simge</u>	<u>Tanımı</u>
F	: Fourier dönüşümü
F^{-1}	: Ters Fourier dönüşümü
$c_{\pm}(\alpha, \theta)$: Riesz-Feller kesirli türev katsayıları
κ_{β}	: Anormal difüzyon katsayısı
$J(\cdot)$: Performans indeks notasyonu
λ	: Lagrange çarpanı
$w_j^{(\alpha)}$: Grünwald-Letnikov kesirli türev katsayıları
$J_p(\cdot)$: p. dereceden birinci tip Bessel fonksiyonu
$j_n(\cdot)$: Küresel Bessel fonksiyonu
P_n	: n. dereceden Legendre polinomları

ÖNSÖZ

Galileo der ki : “Doğanın muazzam kitabının dili matematiktir”. İşte insanoğlu, içinde yaşadığı gerçekliği anlamaya duyduğu heyecanla bu dili öğrenmek ister. Matematikçiler ise bu dili öğrenmek için sürekli bir sorgulama içindedirler ve böylece her defasında sayıları artarak devam eden yeni teoriler üretirler öyle ki her yeni teori bir gerçek yaşam problemini aydınlatır.

Matematikçiler için lisansüstü eğitim, matematik dilinin detaylarıyla öğrenildiği ve yazılan her makale, kitap ve tez ile insanlığa aktarıldığı çıraklık sürecidir. Şüphesiz ki bu sürecin en çok heyecan, emek ve zaman isteyen kısmı Doktora eğitimi olmakla birlikte en kıymetli parçası bir harf öğrettikleri için kırk yıl kölesi olunacak ustalarımızdır. Kıymetlidirler; çünkü uzun bir süreçte, sabırla, zahmetle ve en önemlisi de istekle akıllarımıza matematiksel düşünmeyi aynı bir nakış gibi işlerler ve sonunda bütün bu gayretleri gencecik beyinlerimizde ve doktora tezlerimizde vücut bulur. Bu anlamda en içten teşekkürlerimi bir borç bildiğim çok değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR’e kendisinden öğrendiğim çok yönlü bilimsel düşünme becerisi, dinamik ve yüksek motivasyonlu bir çalışma anlayışı, disiplinler arası ilişkiler kurabilme niteliği, çalışma alanım olan kesirli analizle tanışmamdaki desteği ve gayreti için minnettarım.

Doktora sürecimde kendisini bir adım arkadan örnek alarak yola devam ettiğim, ihtiyaç duyduğum her anda içtenlikle yanımda olduğunu bildiğim ve özellikle tezimin Matlab uygulamaları ile ilgili zamanını ve yardımını benden esirgemeyen kıymetli arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER’e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca değerli vakitlerini ayırarak tezimin her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle çalışmalarına ışık tutan tez izleme komitemdeki hocalarıma ve yine zaman zaman yardımlarını aldığım bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora eğitimim süresince “2211-Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı”na kayıtlı bursiyeri olduğum ve böylece maddi kaygı gütmeksizin bana eğitimime devam etme fırsatını sunan TÜBİTAK-BİDEB’e saygılarımla teşekkür ederim.

Yaşamımın her alanında olduğu gibi doktora gibi özveri ve motivasyon isteyen bu süreçte de karşılıksız anlayış, sevgi ve ilgileriyle yanımda olan ve kendileri de birer eğitimci oldukları için her anlamda bana örnek teşkil eden Annemin, Babamın ve Kardeşimin varlıklarına şükrederim. Annem her daim insanın hayatında seçimiyle insanın mutlu ya da mutsuz olma yolunu belirlediği iki şeyi söyler: insanın işi ve eşi. Matematikçi olmakla duyduğum mutluluğumu ve heyecanımı hayatımı paylaşmakla artarak sürdürdüğüm ve dahası aynı işi yapıyor olmanın güzelliklerini paylaştığım, ilgisiyle, desteğiyle ve bana duyduğu inançla çalışmalarına ivme kazandıran sevgili eşim İsmail AVCI’ya en samimi duygularıyla teşekkür ederim.

Son olarak bedenimde can bulduğunu bildiğim günden beri bana mutluluk veren, tezimi hazırlama sürecimin her anına gizlice şahit olan ve dünyaya gelişini heyecanla beklediğimiz oğlumuzun ilk hediyesi olarak tezimi armağan ediyorum.

1. GİRİŞ

Kesirli analiz, klasik analizin temel kavramları olan tamsayı mertebeli türevlerin ve katlı integrallerin reel ya da kompleks mertebeye genişlemesi olarak ortaya çıkmış bir teoridir. Klasik analizin kavramlarının doğadaki pek çok sürecin gerçeğine en uygun halde matematiksel olarak modellenmesinde tam olarak yeterli olmadığı gerçeğinin fark edilmesi Leibniz (1646-1716) ve Newton'un (1643-1727) diferansiyel hesaplama tekniğini buldukları tarihe dayanır.

Klasik analizin atalarından biri olan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), D^n türev ve $I^n = D^{-n}$ integral notasyonlarını terminolojiye katarak kendisinin bile farkında olmadığı yeni bir teoriyi ortaya çıkaracak bir sorgulamaya neden olmuştur. Bu sorgulama L'Hospital'in (1661-1704) Leibniz'e 30 Eylül 1695'te yazdığı mektubundaki bir soru ile başlar. Sorusu şöyledir: "Bir fonksiyonun herhangi n . tamsayı mertebeden türevinin tanımlandığını biliyoruz. Peki, aynı şekilde $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden türevini tanımlayabilir miyiz? Şayet tanımlayabilirsek bu ne anlama gelir?".

İşte, o tarihte adı konulmamış olan bu açık paradoks klasik analizin dışında başka bir matematiksel analizin ortaya konmasına ışık tutacaktır.

Bu tarihten itibaren P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A. K. Grünwald (1867-1872), A.V.Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), G. H. Hardy, J. E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Levy (1923), A. Marchaud (1927), A. Zygmund (1935-1945), E. R. Love (1938-1996), A. Erdelyi (1939-1965), H. Kober (1940), D. V. Widder (1941) ve M. Riesz (1949) gibi pek çok ünlü matematikçinin "Kesirli Analiz" adı verilen bu yeni teorisinin gelişmesine önemli katkıları olmuştur.

Kesirli analizin tarihsel sürecine bakıldığında 16. ve 19. yüzyıllar arasında daha ziyade teorik matematiksel bir disiplin olarak gelişimini sürdürdüğü

gözlenmektedir. Özellikle 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren doğadaki fiziksel sistemlerin ve gerçek materyallerin modellenmesinde yaygın olarak kullanılan kesirli türev ve integrallerle ifade edilen denklemlerin uygulama alanları günümüze kadar hızla artmıştır.

Biyoloji ve biyomühendislik, fizik, elektromanyetik teori, termodinamik, mekanik, sinyal ve sistem teorisi, kaos teorisi ve fraktallar, jeoloji, akışkanlar mekaniği ve kompleks sistemler içerisindeki madde iletimi teorisi, olasılık ve istatistik teorileri, elektrik-elektronik ve kontrol teori kesirli analizin en yaygın olarak kullanıldığı başlıca uygulama alanlarıdır [1-9].

O halde ilk akla gelen “Kesirli analizin bu kadar popüler uygulama alanları olmasının nedeni nedir?” sorusu olmaktadır. Bu sorunun en yalın cevabı şu şekildedir: “Doğada var olan fiziksel ve dinamik sistemlerin kalıtımsal ve hafızalı olma özellikleri vardır. Sistemlerin geçmişlerinden kaynaklanan bu özelliklerin bilinmesi ile şu anki ve gelecekteki işleyişleri hakkında kolayca öngörülebilir. Bu özellikleri tanımlamada ise klasik analizin temel kavramları yeterli olmamakla birlikte kesirli türevler ve integraller bu önemli boşluğu kolayca doldurmaktadır. Üstelik kesirli türev operatör tanımlarının birden fazla olması, birbirleri arasındaki ilişkiler ve farklılıklar sistemin tanımına en uygun olanını seçme fırsatını sunar.”

Bu tezde ele alınan problemin çatısını, “karmaşık sistemlerdeki anormal madde difüzyonu” ve “dinamikleri kesirli diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemlerin optimal kontrolü” olmak üzere iki temel uygulama problemi meydana getirmektedir. İleriki bölümlerde ayrıntıları verilecek olan bu iki olguyu kısaca şöyle açıklayalım.

Klasik teoride difüzyon, herhangi madde moleküllerinin bireysel ve rastgele hareketlerle değişim farkına bağlı olarak yani yüksek konsantrasyonlu bir ortamdan düşük konsantrasyonlu bir ortama doğru hareket etmesidir. En basit şekliyle düşünüldüğünde bir maddenin herhangi bir ortamda, örneğin suda çözünebilmesi için moleküllerin bu ortamda difüzlenmesi gerekir. Benzer şekilde, uçucu özellikteki moleküllerin hava içinde bir taraftan diğer tarafa hareket etmesi moleküllerin bu ortamdaki difüzyonundan kaynaklanır. Herhangi bir katı ilaç kapsülündeki etkin

madde moleküllerinin emilim bölgesine ulaşabilmesi için difüzenmesi gerekir. Bu aşamada çok yoğun olarak buldukları etkileşim ortamından, daha az buldukları veya hiç bulunmadıkları ortama difüzenerek salınırlar. Yine moleküllerin biyolojik zarlardan geçebilmesi için zar içinden difüzenmesi gerekir. Benzer durum yarı katı ilaç türleri (merhemler, kremler veya jeller), koloit sistemler (emülsiyonlar, süspansiyonlar, v.b.) için de geçerlidir.

Klasik difüzyon olgusu literatürde normal ya da Fickian difüzyon olarak da adlandırılır. Normal denmesinin olasılıksal olarak bir açıklaması mevcuttur. Normal difüzyonda parçacıklar normal (Gaussian) dağılım eğrisi biçiminde bir davranış gösterirler. Dahası difüzyon denkleminin çözümü olarak elde edilen fonksiyon bir Gauss fonksiyonudur. Genel halde bir Gauss fonksiyonu, $a, b, c > 0$ reel sabitler olmak üzere

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

biçiminde tanımlanır. Olasılık teorisinde, normal (Gaussian) dağılım bir sürekli olasılık dağılımıdır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu çan eğrisi ya da yukarıda da belirtildiği gibi Gauss fonksiyonu şeklinde

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

tanımlanır. Yukarıda herhangi bir Gauss fonksiyonu için keyfi sabitler ile verilen tanım burada anlamlı parametreler haline gelmiştir. Sırası ile μ parametresi dağılımın ortalamasını (tepe noktasını) ve σ^2 varyansı (dağılımın genişliğini) ifade eder. $\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ olması durumu standart normal dağılım olarak adlandırılır.

Normal dağılımın önemli bir özelliği ortalama karesel yer değiştirmenin zamanın lineer bir fonksiyonu biçiminde olmasıdır. Burada “*ortalama karesel yer değiştirme*” olarak ifade edilen kavram, belli bir zaman aralığında meydana gelen bir madde iletim işleminde bir molekülün gidebileceği ortalama uzaklığın ölçüsüdür. $r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t)$ sırası ile N tane x_1, x_2, \dots, x_N rastgele değişkenden oluşan bir

normal dağılımda rastgele değişkenlerin yer değiştirme miktarları olsun. Yani x_i rastgele değişkeninin 0 anından belli bir t anına kadar yaptığı vektör yer değiştirme $\Delta r_i(t) = r_i(t) - r_i(0)$ biçiminde ifade edilsin. Bu durumda olasılık teorisinde, normal dağılım için

$$\langle \Delta r_i(t)^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (r_i(t) - r_i(0))^2 \right\rangle \sim t$$

ilişkisi geçerlidir. Burada akla gelen, “Bütün olasılık dağılımları için karesel yer değiştirme, zamanın lineer bir fonksiyonu olarak mı tanımlanır?” sorusu, olasılık teorisindeki mevcut dağılımlara farklı bir sorgulama getirmiştir.

Doğada var olan bazı süreçlerde genele uymayan, diğer bir deyişle normal olmayan dağılımlar gözlenmiştir. Örneğin, yarı iletken malzemeler içindeki elektron hareketlerinde karesel yer değiştirmenin zamanın lineer bir fonksiyonu şeklinde olmadığı deneysel olarak fark edilmiştir. Bu farklılık matematiksel olarak

$$\langle \Delta r_i(t)^2 \rangle \sim t^\alpha, \alpha \neq 1$$

şeklinde ifade edilir. Bu ilişkiyi doğrulayan fiziksel sistemlerde $\alpha < 1$ durumunda parçacıkların yavaş difüzlendiği gözlenmiştir ki bu durum *alt-difüzyon* olarak adlandırılır. Doğadaki başlıca örnekleri: yer altı sularındaki atıkların dağılımı, ekolojik kazalar sebebiyle meydana gelen kirliliklerin yayılımı, protein moleküllerinin hücre zarı boyunca iletimi biçimindedir.

Benzer biçimde $\alpha > 1$ olması durumunda parçacıkların difüzlmesi hızlanmıştır ve bu durum *süper-difüzyon* adını almıştır. Albatros adı verilen deniz kuşlarının uçuşları sırasındaki yayılımları, örümcek maymunlarının kümeler halindeki hareketleri, denizlerdeki kirliliğin yayılımı ve hızlı rotasyonlu dairesel tankların içindeki parçacıkların dağılımı başlıca süper-difüzyon örnekleridir.

O halde ortaya çıkan bir diğer önemli soru, “Bu şekildeki dağılımların olasılık fonksiyonları yine bir Gauss fonksiyonu biçiminde mi tanımlanır?” olmuştur. Bu sorunun cevabı Gauss olmayan fonksiyonların varlığını ve dolayısıyla bu fonksiyonları çözüm kabul eden difüzyon denklemlerinin tanımlanabileceğini ortaya

çıkarmıştır. O halde açıkça söylenebilir ki burada tanımlanacak olan difüzyon denklemi artık normal bir difüzyon denklemi olmayacaktır. Yeni tanımlamaya ihtiyaç duyulan süreç artık normal bir süreç değil anormal bir difüzyon davranışıdır. O halde bu süreç farklı bir diferansiyel denklem ile ifade edilmelidir. İşte, anormal difüzyon davranışı zaman (t) ve/veya uzay (x) kesirli türevli diferansiyel denklemler ile ifade edilen bir süreçtir.

Kesirli difüzyon (anormal difüzyon) denklemleri şekilsiz yarı iletkenler, likit kristaller, camlar, polimerler, proteinler ve biyosistemler gibi içinde dispersiv (dağıtıcı) iletim gözlenen pek çok sistemin anormal davranışlarının açıklanmasında kullanılır. Normal (ya da Gaussian) difüzyonun tersine kesirli difüzyon Levy kararlı Gauss olmayan süreçlerle ilgilidir. Normal difüzyon davranışı ve kesirli difüzyona geçiş aşağıdaki biçimde açıklanabilir.

$u(x, t)$ belli bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında ve t anında bir dağılımın üreticini ya da üzerinde çalışılan herhangi parçacıkların konsantrasyonunu ifade etsin. Klasik difüzyon denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

biçiminde tanımlanır. Burada zaman (t) ve uzay (x) değişkenlerine bağlı olarak tanımlanan birinci ve ikinci mertebeden türevlerin söz konusu problemin yapısına uygun kesirli türevlerle yer değiştirmesi sonucunda meydana gelen yeni diferansiyel denklem artık anormal bir difüzyon problemini ifade eder. Ancak akla gelen ilk soru bu değişikliğe hangi durumlarda ihtiyaç duyulduğudur. Bu kısaca iki madde ile aşağıdaki şekilde açıklanabilir [10]:

- i. Difüzyon davranışındaki çok geniş parçacık sıçramaları x 'e göre ikinci mertebeden türevin kesirli bir türevle yer değiştirmesi ile ifade edilir.
- ii. Yine difüzyondaki sıçramalar arasındaki çok uzun bekleme süreleri t 'ye göre birinci mertebeden türev yerine uygun bir kesirli türev kullanarak belirtilir.

Sonuç olarak her iki davranışı da içine alan en genel anormal difüzyon modeli zaman ve uzay kesirli türevli denklemler ile ifade edilir. Bu tezde de optimal kontrolü

amaçlanan sistem yapısı bu tipteki denklemler ile tanımlanmıştır. O halde ana problem olan kesirli optimal kontrol problemi ile kastedilen nedir?

Klasik kontrol teoride bir sistem durum ve kontrol değişkenleri ile belirlidir. Sistemin davranışlarını ifade eden denklemler sistemin dinamik kısıtları olarak adlandırılır ve dinamik kısıtlar durum ve kontrol değişkenlerine bağlı olarak tanımlanır. Klasik teoride bir optimal kontrol probleminin amacı, durum ve kontrol değişkenleri ile tanımlanan dinamik kısıtlara bağlı olan bir fonksiyoneli (performans indeksi) minimize (ya da maksimize) eden optimal kontrol fonksiyonunu bulmaktır [11].

Eğer bir optimal kontrol probleminde performans indeks ya da sistemin dinamik kısıtlarından en az biri kesirli türevli terim (ya da terimler) içeriyorsa bu probleme “*Kesirli Optimal Kontrol Problemi*” denir. Bu tezdeki temel amaç da farklı koordinat sistemlerinde tanımlanmış anormal difüzyon sürecinin kesirli optimal kontrolü probleminin analitik ve nümerik çözümlerinin araştırılmasıdır.

Kesirli optimal kontrol probleminin literatüre ilk girişi Agrawal [12] ile olmuştur. Problem tanımlamalarında kullanılan kesirli analizin temel tanımları ve bazı önemli ilişkileri 2. Bölümde verilmiştir. 3. Bölümde ise hem anormal difüzyon hem de kesirli optimal kontrol problemleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar değerlendirilmiştir. Tez problemlerinin ilki olan kartezyen koordinatlarda kesirli optimal kontrol problemi 4. Bölümde ele alınmıştır.

Çözümün ilk adımında, sistem dinamiklerini tanımlayan anormal difüzyon denkleminin öz fonksiyonlar ile ifade edilen seri çözümlerinin spektral bir yöntem kullanılarak elde edilmesi amaçlanmıştır. Burada spektral yaklaşımın uygulanmasında elde edilen öz fonksiyonların ortogonal birer aile olmaları oldukça önemlidir. Bu yöntemin uygulanması ile sağlanan en önemli avantaj esasen zaman (t) ve durum (x) kesirli türevlerinin her ikisini de içeren dinamik sistemin sadece zaman kesirli türevli hale dönüşmesine olanak sağlamasıdır. Bu oldukça önemli bir avantajdır. Çünkü her iki türevi de içeren denklemlerin analitik ve hatta nümerik çözümlerine ulaşmak oldukça karmaşıktır ve bu nedenle literatürde yer alan çalışmaların çoğunda sadece nümerik çözümlerin bulunmasının amaçlandığı görülmektedir.

İkinci adımda, gerekli optimallik koşulları, *Lagrange çarpanı tekniği* kullanılarak elde edilmiştir. Böylece durum ve kontrol bileşen fonksiyonlarına bağlı, sağ ve sol kesirli türevli denklem sistemine ulaşılmış ve bu sistemin analitik ve nümerik olarak çözümü gerçekleştirilmiştir. Temeli ileri ve geri fark yaklaşımlarına dayanan Grünwald-Letnikov kesirli yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümler ve klasik yöntemle ulaşılan analitik çözümler MATLAB R2007b programı kullanılarak yazılan algoritmalar ile elde edilen şekillerle karşılaştırılmıştır. Bunun yanı sıra problem parametrelerinin değişimlerinin sistemin durumu ve kontrolü üzerinde etkisi de yine şekillerle gösterilmiş ve yorumlanmıştır. Ana hatları ayrıntılarıyla açıklanan bu problem 5. Bölümde kutupsal koordinatlarda ve 6. Bölümde de küresel koordinatlarda incelenmiştir. Her bir farklı koordinat sisteminde karşılaşılan ortogonal aile yapılarının sistemin durum ve kontrol yapısını değiştirdiğini de vurgulamak gerekir. 7. Bölümde ise direkt bir nümerik yaklaşım olduğu bilinen Grünwald-Letnikov yöntemi Volterra integral denklemlerinin çözümünde kullanılan iterasyonel bir nümerik yaklaşımla tezin 4. Bölümündeki problem örnek test problemi seçilerek karşılaştırılmıştır. Böylece yöntemin avantajları ve kullanışlılığı vurgulanmıştır.

Son olarak, 8. Bölümde tezin genel bir değerlendirmesi yapılarak elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Tanım (*Gamma Fonksiyonu*): Karmaşık düzlemin sağ yarısında yakınsak olan ve $\Gamma(\cdot)$ notasyonu ile gösterilen Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Gamma fonksiyonu faktöriyel fonksiyonunun bir genelleştirmesidir ve bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

- i. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \dots, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,
- ii. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
- iii. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,
- iv. $\Gamma(0) = \infty, \Gamma(\infty) = 0$,
- v. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (0 < z < 1)$.

2.2 Tanım (*Mittag-Leffler Fonksiyonu*): $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere bir ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonları

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\text{Mittag \& Leffler, 1905}) \quad (2.2)$$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\text{Agarwal \& Erdelyi, 1953}) \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanır. Bu fonksiyonlar, üstel fonksiyonun genelleştirmesi olarak ortaya atılmıştır ve başlıca özellikleri aşağıda verilmiştir:

- i. $E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z)$,

$$\begin{aligned}
\text{ii.} \quad E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\
\text{iii.} \quad E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\
\text{iv.} \quad E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \\
\text{v.} \quad E_{\frac{1}{2},1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z), \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.
\end{aligned}$$

2.3 Tanım (Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri): $\alpha > 0$ ve $f \in L_1(a, b)$ olmak üzere sol ve sağ α . mertebeden kesirli integralleri sırası ile aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

“*” konvolüsyon operatörü ve

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^{\alpha-1}, & t > 0 \end{cases}$$

olmak üzere (2.4)'de tanımı verilen integral, Laplace konvolüsyonu olarak da ifade edilebilir:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Benzer durum (2.5) integrali için de geçerlidir.

2.4 Tanım (Riemann-Liouville Kesirli Türevleri): $f(t) \in L_1(a, b)$ fonksiyonu için $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere f 'nin α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri sırası ile

$${}_a D_t^\alpha f(t) = D^n {}_a I_t^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = (-D)^n {}_t I_b^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır.

2.5 Tanım (*Caputo Kesirli Türevleri*): $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) ve f , n . mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere f 'nin α . mertebeden sol ve sağ kesirli türevleri sırasıyla

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t I_b^{n-\alpha} (-D)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} \left(-\frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanımlardaki farklılıktan da anlaşılacağı üzere Riemann-Liouville (RL) ve Caputo kesirli türev operatörleri arasında uygulamalarda belirleyici olan önemli farklar vardır. Bunları vurgulamak amacı ile tamsayı mertebeli türevlerin bir kısım özellikleri göz önüne alınmalıdır. Örneğin $\alpha = n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) olması durumunda bir $f(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} L\{f^{(n)}(t)\} &= s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \\ &= s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} f^{(n-k)}(0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

formülü ile ifade edilir. Burada $f^{(n-k)}(0)$ değerleri fiziksel yorumlanabilir başlangıç koşullarıdır.

α . mertebeden RL ve Caputo kesirli türevlerinin Laplace dönüşümleri ise sırası ile

$$\begin{aligned} L\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} &= s^\alpha \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \\ &= s^\alpha \bar{f}(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} [{}_0D_t^{\alpha-k} f(t)]_{t=0}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$L\{ {}_0^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-k-1} \quad (2.13)$$

biçimindedir. Dikkat edilirse, RL kesirli türevinin Laplace dönüşümü fiziksel olarak yorumlanamayan $[{}_0D_t^{\alpha-k} f(t)]_{t=0}$ başlangıç koşullarını içerir. Oysaki Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü $f^{(k)}(0)$ tamsayı mertebeli başlangıç koşullarını gerektirir. Bu özellik Caputo kesirli türevlerini fiziksel uygulamalar açısından daha kullanışlı yapar.

Yine, $\alpha = n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere klasik analizin en temel özelliklerinden biri $f(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevi ve integrali arasındaki ilişkidir:

$$D^n I^n = I, \quad I^n D^n \neq I. \quad (2.14)$$

Bu ilişki D^n operatörünün I^n 'nin sol tersi olduğu anlamına gelir. Dahası

$$I^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0 \quad (2.15)$$

eşitliği geçerlidir.

$\alpha \geq 0$ olmak üzere RL kesirli türevi için

$$D^\alpha I^\alpha = I \quad (2.16)$$

özellği geçerlidir. Buradan hareketle Caputo kesirli türevi için önemli bir sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
I^\alpha {}^C D_t^\alpha f(t) &= I^\alpha [I^{n-\alpha} D^n f(t)] \\
&= [I^\alpha I^{n-\alpha}] D^n f(t) \\
&= I^n D^n f(t) \\
&= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Yine Caputo kesirli türev operatörünün tamsayı mertebeli türevlere olan benzerliği (2.15) ve (2.17) sonuçlarında açıkça görülür. O halde (2.16) ve (2.17) ilişkileri göz önüne alınarak kesirli analizin önemli bir eşitliğine aşağıdaki biçimde ulaşılır:

$$\begin{aligned}
{}^C D_t^\alpha f(t) &= [{}^C D_t^\alpha I^\alpha] {}^C D_t^\alpha f(t) \\
&= {}^C D_t^\alpha [I^\alpha {}^C D_t^\alpha f(t)] \\
&= {}^C D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) \right] \\
&= {}^C D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

veya

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0). \tag{2.19}$$

(2.18) eşitliği RL ve Caputo kesirli türev operatörleri arasında direkt eşitlik olmadığını gösteren en önemli sonuçtur. Ancak, belli şartlar altında bu operatörler birbirine eşit olur:

2.6 Teorem: $f(t)$, (a, t) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $m-1 < \alpha < m$ ($m \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere $f^{(k)}(t)$ ($k=1, 2, \dots, m+1$) türevleri de $[a, t]$ üzerinde sürekli ve integrallenebilir ise $k=1, 2, \dots, m+1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ şartı sağlanırsa

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) \tag{2.20}$$

eşitliği geçerlidir.

2.7 Tanım (*Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri*): f , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere α . mertebeden sol ve sağ Grünwald-Letnikov (GL) türevleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}^GL D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{\lfloor t-a/h \rfloor} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh), \quad (2.21)$$

$${}^GL D_b^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{\lfloor b-t/h \rfloor} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t+rh), \quad (2.22)$$

2.8 Teorem: f fonksiyonu $[a, t]$ aralığında $(n-1)$ kez sürekli diferansiyellenebilir ve $f^{(n)}(t)$ türevleri de $[a, t]$ üzerinde integrallenebilir olsun. O halde $\forall \alpha$ ($0 < \alpha < n$) için ${}_a D_t^\alpha f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevi vardır ve ${}_a D_t^\alpha f(t)$ Grünwald-Letnikov kesirli türevine eşittir. $0 \leq m-1 \leq \alpha \leq m \leq n$ olması durumunda $a < \tau < t$ için

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}^GL D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t f^{(m+1)}(\tau)(t-\tau)^{m-\alpha} d\tau \quad (2.23)$$

eşitliği sağlanır.

Bunların yanı sıra Riesz, Riesz-Feller kesirli türevleri ve kesirli Laplace operatörü gibi kesirli analizin diğer önemli kavramları ve bunlar arasındaki ilişkiler anormal difüzyon yapısı açıklanırken verilecektir.

3. LİTERATÜR ÇALIŞMALARI

3.1 Anormal Difüzyon Problemleri

Anormal difüzyon, karmaşık ve homojen olmayan ortamlar içindeki etkileşimler ile bağlantılı olan fiziksel bir olgudur. Bu olgu, gözenekli materyaller içindeki madde iletiminde, kaotik ısı banyolarında, şekilsiz yarı iletkenlerde, polimer ağları içindeki parçacık dinamiklerinde, iki boyutlu rotasyonel madde iletimlerinde ve benzeri fizik olaylarında meydana gelir [13].

Anormal difüzyon olgusu fiziksel ve matematiksel bir bakış açısı ile klasik difüzyon denklemlerinin zaman ve/veya uzay tamsayı mertebeli türevlerinin uygun kesirli türev operatörleriyle yer değiştirmesi sonucu tanımlanan genelleştirilmiş difüzyon denklemleri ve olasılıksal olarak bu denklemler ile ilgili rastgele yürüyüş modelleri ile belirlidir. Genelleştirilmiş difüzyon denklemlerini ifade eden “uzay-zaman kesirli difüzyon” denklemi matematiksel olarak

$${}_t D_*^\beta u(x,t) = {}_x D_\theta^\alpha u(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanmıştır [21]. Burada α, θ, β parametrelerinin kısıtları

$$0 < \alpha \leq 2, \quad |\theta| \leq \min\{\alpha, 2 - \alpha\}, \quad 0 < \beta \leq 2, \quad (3.2)$$

olmak üzere ${}_t D_*^\beta$ notasyonu β . mertebeden Caputo (veya Riemann-Liouville) zaman kesirli türevini ve ${}_x D_\theta^\alpha$ α . mertebeden Riesz-Feller uzay kesirli türevini, θ ise eğrilik parametresini ifade eder. (3.1) genel denklemi, α ve β parametrelerinin farklı değer aralıkları için üç özel durum belirtir:

$$\begin{aligned} \{0 < \alpha \leq 2, \beta = 1\}, & \quad (\text{uzay-kesirli difüzyonu}) \\ \{\alpha = 2, 0 < \beta \leq 2\}, & \quad (\text{zaman-kesirli difüzyonu}) \\ \{0 < \alpha = \beta \leq 2\}, & \quad (\text{nötr-kesirli difüzyonu}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Burada bahsedilen eğrilik parametresi kavramı şöyle açıklanabilir. Standart difüzyon denklemi için

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \quad \text{ve} \quad u(x,0) = g(x) \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanan Cauchy probleminin temel çözümü (Green fonksiyonu) olasılık teorisindeki normal (Gaussian) dağılım eğrisine karşılık gelir. Bilindiği gibi normal dağılım eğrisi, dağılımın ortalaması etrafında simetrik olarak konumlanır, yani diğer bir deyişle çan eğrisi şeklindedir. O halde burada dağılımın eğriliği sıfırdır, denir. Fakat bu simetri her dağılım için söz konusu değildir ve dolayısıyla ortalamanın sağında ya da solunda bir eğrilik meydana gelir. İşte bunu ifade eden parametre “*eğrilik parametresi*”dir.

O halde uzay-zaman kesirli difüzyon denkleminin ortaya çıkışının olasılık dağılımları ile doğrudan ilişkili olduğu da sezilebilir. Feller 1952’de en genel halde bütün Levy kararlı olasılık dağılım fonksiyonlarını üretmeyi amaçlayan bir problemi göz önüne almıştır [14]. Feller’in buradaki temel düşüncesi, klasik difüzyon denklemindeki ikinci mertebeden uzay türevini özel bir yalancı diferansiyel operatörü ile değiştirmesine neden olmuştur.

Burada, olasılık teorisine ait olan bazı temel kavramlara da kısaca değinmek gerekir. Bir dağılımın *kararlı* olması demek, dağılım içinde yer alan sonlu sayıda rastgele değişkenin lineer toplamının yine dağılım içindeki bir rastgele değişkeni ifade etmesi demektir. Diğer bir deyişle dağılım, toplamsallığa göre kapalıdır ve bu dağılımın şeklinin ötelemeye ve ölçek parametresine göre korunduğu anlamına gelir. *Ölçek parametresi* dağılımın yoğunluğunu belirler. Bu parametre büyüdükçe dağılımın yayılması artar, yani yoğunluğu azalır.

İşte normal (Gaussian) dağılım, Cauchy dağılımı ve Levy dağılımı kararlı dağılımların üç özel halidir. Bu tipteki dağılımlar μ konum, c ölçek, β eğrilik (asimetri) ve α yoğunluk olmak üzere dört parametre ile karakterize edilirler.

Herhangi bir olasılık dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ifade edilebildiği gibi karakteristik fonksiyon ile de belirtilebilir. Matematiksel olarak bir X dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu f_X olmak üzere karakteristik fonksiyonu bunun Fourier dönüşümü olarak tanımlanır:

$$\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X dx. \quad (3.5)$$

Kararlı bir olasılık dağılımının karakteristik fonksiyonu yukarıdaki dört parametre ile

$$\varphi(t) = \exp\left[it\mu - |ct|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\Phi) \right] \quad (3.6)$$

biçiminde tanımlıdır. Burada, $\Phi = \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\beta \in [-1,1]$ olup bu parametrelerin durumlarına göre kararlı dağılımların özel halleri elde edilir.

Feller'in [14] çalışmasında olasılık yoğunluk fonksiyonunu $g_\alpha(x, t; \theta)$ parametrizasyonu ile gösterdiği Levy kararlı dağılımlarının karakteristik fonksiyonları

$$g_\alpha(\kappa, t; \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa x} g_\alpha(x, t; \theta) dx = \exp\left(-t|\kappa|^\alpha e^{i(\operatorname{sign}\kappa)\theta\pi/2}\right) \quad (3.7)$$

biçiminde ifade edilmektedir, öyle ki $x, \kappa \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Burada α kararlılık indeksi ve θ eğrilik parametresi olarak adlandırılmıştır. Bu parametreler arasındaki ilişki ise

$$0 < \alpha \leq 2; \quad |\theta| \leq \begin{cases} \alpha, & 0 < \alpha < 1 \\ 2 - \alpha, & 1 < \alpha < 2 \\ 0, & \alpha = 1, 2 \end{cases} \quad (3.8)$$

şeklinde verilir. Bunun yanı sıra zaman parametresi t , bir ölçek parametresi olarak rol oynar. O halde Feller, Levy kararlı dağılımlarını göz önüne alarak esasında genel bir durum için parametrizasyon vermiştir. Çünkü özel halde $\alpha = 2$ ve $\alpha = 1$ ($\theta = 0$) durumları sırası ile normal (Gaussian) ve Cauchy kararlı dağılımlarına karşılık gelir.

İşte; (3.7) karakteristik fonksiyonun özel Feller formu literatüre $g_\alpha(x, t; \theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu Green fonksiyonu olarak çözüm kabul eden

$$\frac{\partial u}{\partial t} = {}_x D_\theta^\alpha u, \quad u = u(x, t; \alpha, \theta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \quad (3.9)$$

“Feller uzay-kesirli difüzyon denklemi”nin girmesine sebep olmuştur. Buradaki ${}_x D_\theta^\alpha$ notasyonu ileriki kısımlarda tanımlı ayrıntılı biçimde verilen “Feller yalancı-diferansiyel operatörü” ya da “Riesz-Feller kesirli türevi” olarak adlandırılır.

Gorenflo ve Mainardi [15] uzay-kesirli (Levy-Feller) difüzyon süreçlerini göz önüne alarak Grünwald-Letnikov yaklaşımı ile çözülen rastlantısal yürüyüş modelleri ortaya koymuşlardır. Bu çalışmaları, Levy-Feller süreçlerinin olasılıksal bir bakış açısıyla değerlendirilmesi bakımından oldukça önemlidir. Çalışmada, aynı zamanda yukarıda bahsedilen Feller'in parametrizasyonu ile ilgili temel kavramlara da ayrıntılı şekilde yer verilmiştir. Yine bu çalışmanın paralelinde Levy-Feller difüzyon süreçlerinin rastlantısal yürüyüş modeli üzerine yapılan diğer çalışmaları literatürde bulmak mümkündür [16-21].

A notasyonu genel bir yalancı-diferansiyel operatörünü temsil etmek üzere $x \in \mathbb{R}$ değişkenine göre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} A[f(x)] dx = \hat{A}(\kappa) \hat{f}(\kappa)$$

biçiminde Fourier gösterimi ile tanımlıdır öyle ki burada $\hat{A}(\kappa)$ A operatörünü sembolik olarak temsil eder. Diğer bir deyişle,

$$\hat{A}(\kappa) = (Ae^{-ikx})e^{+ikx}$$

biçimindedir. İşte; Feller yalancı diferansiyel operatörünün Fourier gösterimi de $\psi_{\alpha}^{\theta}(\kappa)$ sembolü ile ifade edilmek üzere

$$F\{ {}_x D_{\theta}^{\alpha} f(x); \kappa \} = -\psi_{\alpha}^{\theta}(\kappa) \hat{f}(\kappa) \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır öyle ki $\psi_{\alpha}^{\theta}(\kappa) = |\kappa|^{\alpha} e^{i(\text{sign}\kappa)\theta\pi/2}$.

(3.10) ile Fourier gösterimi verilen operatörün Riesz-Feller kesirli türevi olarak literatüre geçmesinin nedeni $\theta=0$ ve $\alpha \neq 1$ durumu için 1940'lı yıllarda Marcel Riesz tarafından ortaya konan ve Riesz potansiyeli olarak bilinen kesirli integralin soldan tersine eşit olmasıdır. Diğer bir deyişle Feller'in en genel durum için yaptığı tanımlamayı aslında ilk olarak Riesz simetrik dağılımlar için ($\theta=0$) yapmıştır [22].

Orijinal olarak Feller'in çalışmasında yer alan yalancı diferansiyel operatörü Mainardi ve diğ. [23] tarafından sezgisel bir bakış açısı ile sadeleştirerek ifade edilmiştir. Buradaki düşünce, ilk olarak pozitif tanımlı

$$A := \frac{d^2}{dx^2} \div \kappa^2 = |\kappa|^2$$

diferansiyel operatörünü göz önüne alarak başlar. Bu operatörün pozitif kuvvetleri ve Fourier görüntüleri

$$-A^{\alpha/2} := -\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{\alpha/2} \div -(|\kappa|^2)^{\alpha/2} = -|\kappa|^\alpha, \quad \alpha > 0$$

biçiminde ifade edilmiştir. Buradaki $-A^{\alpha/2}$ yalancı diferansiyel operatörü Riesz'in kesirli türev tanımıdır. 3.1.1 tanımında verileceği üzere yeni tanımlanmış bu operatörün temeli Riesz potansiyellerine dayanır. Daha sonraki zamanlarda bu operatör için ilk kez Saichev ve Zaslavsky'nin kullandığı notasyon [24]

$$A^{\alpha/2} \equiv \frac{d^\alpha}{d|x|^\alpha}$$

olacaktır. Riesz'in kesirli türev operatörü Feller'in tanımının $\theta=0$ özel hali olduğundan

$${}_x D_0^\alpha = -\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{\alpha/2} = \frac{d^\alpha}{d|x|^\alpha}$$

olarak da ifade edilir.

O halde literatür çalışmalarına değinmeden önce ilk olarak Riesz Potansiyeli (integrali), Riesz türevi ve Riesz-Feller türevi tanımlarına yer verilmelidir.

3.1.1 Tanım (Riesz Potansiyeli) : Keyfi bir $\alpha > 0$ ($\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$) ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere Riesz potansiyeli (kesirli integrali) ve bunun Fourier görüntüsü

$$I^\alpha \phi(x) := \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\xi|^{\alpha-1} \phi(\xi) d\xi \div \frac{\hat{\phi}(\kappa)}{|\kappa|^\alpha} \quad (3.11)$$

biçimindedir.

(3.11) ile verilen tanım, *Weyl kesirli integralleri*

$$\begin{cases} {}_x I_+^\alpha \phi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-\xi)^{\alpha-1} \phi(\xi) d\xi, \\ {}_x I_-^\alpha \phi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (\xi-x)^{\alpha-1} \phi(\xi) d\xi \end{cases} \quad (3.12)$$

olmak üzere

$$I^\alpha \phi(x) = \frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} [{}_x I_+^\alpha \phi(x) + {}_x I_-^\alpha \phi(x)] \quad (3.13)$$

şeklinde de ifade edilir. Ayrıca Weyl kesirli integrallerinin Fourier gösterimleri

$${}_x I_\pm^\alpha \div (\mp i\kappa)^{-\alpha} = |\kappa|^{-\alpha} e^{\pm i(\text{sign}\kappa)\alpha\pi/2} \quad (3.14)$$

biçimindedir.

3.1.2 Tanım (*Riesz Kesirli Türevi*) : $0 < \alpha < 2$ ($\alpha \neq 1$) ve I^α Riesz potansiyeli olmak üzere Riesz kesirli türevi

$${}_x D_0^\alpha \phi(x) := -I^{-\alpha} \phi(x) = -\frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} [{}_x D_+^\alpha \phi(x) + {}_x D_-^\alpha \phi(x)] \quad (3.15)$$

olarak tanımlanır.

Burada ${}_x D_\pm^\alpha$ ($0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$) notasyonu *Weyl kesirli türevlerini* ifade eder:

$${}_x I_\pm^{-\alpha} f(x) = {}_x D_\pm^\alpha f(x) = \begin{cases} \pm \frac{d}{dx} [{}_x I_\pm^{1-\alpha} f(x)], & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} [{}_x I_\pm^{2-\alpha} f(x)], & 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Yine Weyl kesirli türevlerinin Fourier gösterimi de (3.14)'dekine benzer olarak ifade edilir:

$${}_x D_\pm^\alpha \div (\mp i\kappa)^\alpha = |\kappa|^\alpha e^{\mp i(\text{sign}\kappa)\alpha\pi/2}. \quad (3.17)$$

Riesz kesirli türev operatörünün her iki yönlü türevleri içermesi fiziksel olarak difüzyonun meydana geldiği bölgenin her bir yönünden birbiri ile etkileşen akım rejimlerinin modellenmesine olanak sağlamaktadır.

Çok değişkenli fonksiyonların kesirli integro-diferansiyellerini ifade eden kesirli Laplace operatörü $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ile Riesz operatörleri arasındaki eşitlik

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = F^{-1} |x|^{-\alpha} F f = \begin{cases} I^\alpha f, & \text{Re}(\alpha) > 0 \\ D^{-\alpha} f, & \text{Re}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

biçimindedir ([1],[7]). Buradaki I^α ve D^α sırasıyla Riesz kesirli integral ve türevlerini temsil eder.

3.1.3 Yardımcı Teorem [25]: Sonsuz bir $-\infty < x < \infty$ bölgesinde tanımlanan bir $u(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = -\frac{1}{\cos(\alpha\pi/2)} \left[{}_x D_+^\alpha u(x) + {}_x D_-^\alpha u(x) \right] = \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x). \quad (3.19)$$

3.1.4 Uyarı: Sonlu bir $[0, L]$ aralığında tanımlanan bir $u(x)$ fonksiyonu için

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x), & x \in (0, L) \\ 0, & x \notin (0, L) \end{cases} \quad (3.20)$$

genişlemesi göz önüne alındığında, diğer bir deyişle sınırdaki ve sınır ötesindeki noktalarda $u^*(x) = 0$ koşulu sağlandığında, (3.19) eşitliği yine geçerlidir.

3.1.5 Tanım [26]: Varsayalım ki $(-\Delta)$ Laplace operatörü sınırlı bir D bölgesinde öz değerleri λ_n^2 olan bir tam φ_n ortonormal öz fonksiyonlar kümesine sahip olsun. Yani,

$$(-\Delta)\varphi_n = \lambda_n^2 \varphi_n$$

öyle ki $B(\varphi)$ Dirichlet, Neumann ve Robin sınır koşullarından biri olmak üzere bölgenin ∂D sınırı üzerinde

$$B(\varphi) = 0$$

olması koşulu göz önüne alınsın. O halde

$$F_\gamma = \left\{ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, c_n = \langle f, \varphi_n \rangle \left| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 |\lambda_n|^\gamma < \infty, \gamma = \max(\alpha, 0) \right. \right\} \quad (3.21)$$

olmak üzere $\forall f \in F_\gamma$ için kesirli Laplace operatörünün öz fonksiyonlar türünden gösterimi (spektral gösterim)

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\lambda_n^2)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_n \quad (3.22)$$

biçiminde tanımlıdır.

Dikkat edilirse, kesirli Laplace operatörü için iki farklı tanım mevcuttur. Bunlardan ilki, sonsuz bir bölgede Fourier dönüşümü kullanılarak yapılan ve aynı zamanda sonlu bir bölgede tanımlanan fonksiyonlara da (3.20) ilişkisi ile genişletilebilen (3.18)'de verilen tanımdır. Bu tanımda kesirli Laplace operatörü ile Riesz kesirli türevi arasında direkt eşitlik durumu söz konusudur. İkinci tanım ise, sonlu bir bölgede öz fonksiyon genişlemesi üzerine kurulur. Matematiksel olarak kesirli Laplace ve Riesz operatörleri arasında ilk tanımda olduğu gibi eşitlik olmamasına rağmen nümerik yaklaşımların uygulanabilirliği açısından önemlidir. Bu yüzden hem bu tezde kullanılmıştır hem de literatürde yaygın olarak kullanılmaktadır.

3.1.6 Tanım (*Riesz-Feller Kesirli Türevi*) : $0 < \alpha < 2$ ($\alpha \neq 1$) ve $|\theta| \leq \min\{\alpha, 2 - \alpha\}$ olmak üzere Riesz-Feller kesirli türevi

$${}_x D_\theta^\alpha f(x) := -[c_+(\alpha, \theta) {}_x D_+^\alpha + c_-(\alpha, \theta) {}_x D_-^\alpha] f(x) \quad (3.23)$$

biçimindedir. Buradaki c_\pm katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} c_+(\alpha, \theta) = \frac{\sin[(\alpha - \theta)\pi/2]}{\sin(\alpha\pi)}, \\ c_-(\alpha, \theta) = \frac{\sin[(\alpha + \theta)\pi/2]}{\sin(\alpha\pi)}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Özel halde $\theta = 0$ iken

$$c_+(\alpha, 0) = c_-(\alpha, 0) = \frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)}$$

ve ayrıca $\alpha \rightarrow 2$ olmak üzere limit durumu göz önüne alındığında

$$c_+(2, 0) = c_-(2, 0) = -1/2$$

elde edilir. Bu durumda Riesz-Feller kesirli türevi:

$${}_x D_0^2 = -{}_x I_0^{-2} = \frac{1}{2} (I_+^{-2} + I_-^{-2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dx^2} \right) = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Fiziksel olarak, uzay kesirli türevleri anormal difüzyon (dispersiyon/yayıma) ve adveksiyon (yatay iletim) olgularının modellenmesinde kullanılır. Bu türevler, simetrik durumlar için Riesz (ya da kesirli Laplace operatörü) ve simetrik olmayan durumlar için Riesz-Feller kesirli türev operatörleridir. Örneğin, bu operatörlerin en yaygın uygulamalarından biri yer altı su tabakasındaki çözünen maddelerin taşınmasını modelleyen kesirli adveksiyon-dispersiyon denklemleridir. Klasik teoride bu denklemler

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.25)$$

biçiminde tanımlanır. Burada u çözünen madde yoğunluğunu, v ve D pozitif sabitleri sırasıyla ortalama akışkan hızını ve dispersiyon katsayısını, x uzay ve t zaman değişkenlerini ifade eder.

Huang ve Liu [27], (3.25) denkleminde birinci mertebeden zaman türevini $\alpha \in (0, 1]$ mertebeden Caputo kesirli türevi ve ikinci mertebeden uzay türevini ise $\beta \in (0, 2]$ mertebeden Riesz-Feller kesirli türevi ile yer değiştirilmesi sonucu meydana gelen bir uzay-zaman kesirli adveksiyon-dispersiyon denklemini göz önüne almışlardır. Bu denklem

$${}_t D_*^\alpha u(x, t) = -v D_x u(x, t) + D D_0^\beta u(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+), \quad (3.26)$$

başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(\pm\infty, t) = 0, \quad t > 0$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada ele aldıkları Cauchy probleminin temel çözümlerini Green fonksiyonları cinsinden Fourier ve Laplace dönüşümlerini kullanarak elde etmişlerdir. Ayrıca buradaki temel çözüm olan Green fonksiyonu bir uzaysal olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak da düşünülebilir.

Ilic ve diğ. sınırlı bir bölgede tanımladıkları bir kesirli uzay difüzyon denklemini homojen [28] ve homojen olmayan [26] sınır koşulları altında incelemiştir. Denkleminde kullanılan kesirli türev operatörlerinin (Caputo ve Riesz) matris gösterimi üzerine kurdukları yeni bir matris transfer tekniğini kullanarak nümerik çözümleri elde etmişlerdir. Burada yöntemin yeniliği kesirli operatörlere uygulanan standart bir ayrıklaştırmanın bir lineer diferansiyel denklem sisteminin çıkışına ve böylelikle de geri fark formülleri üzerine kurulmuş DASSL adı verilen diferansiyel/cebirsal sistem çözücüsü kullanılarak denklemin kolayca çözülebilmeye yol açmasıdır. Yine bu çalışmada denklemin analitik çözümünü elde edebilmek için 3.1.5 Tanımındaki spektral gösterim kullanılmıştır.

Liu ve diğ. [29] Levy-Feller adveksiyon-dispersiyon süreci için bir rastlantısal yürüyüş modeli tanımlamışlar ve nümerik çözümler için kesirli türevlerin Grünwald-Letnikov ayrıklaştırmasından yola çıkarak bir sonlu fark yaklaşımı ortaya koymuşlardır. Burada ele aldıkları denklem

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = aD_{\theta}^{\alpha}u(x,t) - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (3.27)$$

başlangıç koşulu $u(x,0) = \varphi(x)$ biçimindedir öyle ki $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $a > 0$, $b \geq 0$.

Zhang ve diğ. [30] Levy-Feller difüzyon denklemini için tanımladıkları

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{\theta}^{\alpha}u(x,t), & 0 < \alpha \leq 2 \ (\alpha \neq 1), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \ f \in L_1(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (3.28)$$

Cauchy probleminin nümerik çözümleri ve bunların olasılıksal yorumları üzerine çalışmışlardır.

Ciesielski ve Leszczynski [31] Riesz-Feller kesirli türev operatörü ile tanımlanan bir anormal difüzyon denklemi için sınır değer problemini sonlu farklar metodu temeline dayanan bir nümerik metotla çözmüşlerdir. Örnek olarak da bu tipteki denklemler ile tanımlanan nanotüpler içindeki lineer olmayan sıcaklık profillerini ele almışlar ve bunun üzerinde yöntemi uygulamışlardır.

Zhang ve Liu [32] uzay ve uzay-zaman Riesz kesirli kısmi diferansiyel denklemlerinin periyodik çözümlerini Fourier ve Laplace dönüşümlerini kullanarak elde etmişlerdir. Özdemir ve diğ. [33], [32]'deki problemi iki boyutlu uzayda incelemişler ve periyodik çözümler için Grünwald-Letnikov nümerik yaklaşımını uygulamışlardır. Özdemir ve Avcı [34] ise hem iki boyutlu uzayda hem de Caputo ve Riesz-Feller anlamında tanımladıkları anormal difüzyon denklemini göz önüne alarak simetrik olmayan durumlar için de anormal difüzyon probleminin periyodik çözümlerini incelemişlerdir.

Chen ve diğ. [35] klasik reaksiyon-dispersiyon denkleminde ikinci mertebeden uzay türevinin $\beta \in (1, 2]$ mertebeli Riesz kesirli türevi ile yer değiştirmesi sonucu elde edilen uzay-kesirli reaksiyon-dispersiyon denklemin temel çözümlerini Laplace ve Fourier dönüşümlerini kullanarak bulmuşlardır. Ayrıca bir sonlu fark yaklaşımı uygulamışlar ve bu yaklaşımın kararlılığını ve yakınsaklığını analiz etmişlerdir. Göz önüne aldıkları uzay-kesirli reaksiyon-dispersiyon denklemi aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -u(x, t) + {}_x D_0^\beta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.29)$$

Shen ve diğ. [36] bir Riesz kesirli adveksiyon-dispersiyon denkleminin temel çözümü üzerine çalışmışlardır. Ele aldıkları denklem

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t) + B \frac{\partial^\beta}{\partial |x|^\beta} u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.30)$$

biçimindedir. Çalışmalarında temeli sonlu fark yaklaşımı üzerine kurulmuş olan bir ayrık rastlantısal yürüyüş modeli tanımlamışlar ve ayrıca belli başlangıç ve sınır koşullarını göz önüne alarak açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımları ile problemi nümerik olarak çözmüşlerdir. Dahası uyguladıkları yaklaşımların kararlılık ve

yakınsaklık analizlerini de yaparak yöntemlerinin geçerliliğini de test etmişlerdir. Bir sonraki adımda yine Shen ve diğ. [37], (3.30)'daki denklemin bir genelleştirmesi olan dağıtılmış dereceli bir zaman-uzay kesirli difüzyon denklemini ele almışlar:

$${}_t D_*^\alpha u(x, t) = B_1 \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial |x|^{\beta_1}} u(x, t) + B_2 \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial |x|^{\beta_2}} u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.31)$$

ve bu denklemin başlangıç-değer probleminin temel çözümünü araştırmışlardır. Burada α ($0 < \alpha \leq 1$) Caputo zaman kesirli türevinin mertebesini, β_1 ($0 < \beta_1 < 1$) ve β_2 ($1 < \beta_2 < 2$) Riesz uzay kesirli türevlerinin mertebelerini, B_1 ve B_2 pozitif sabitleri ifade etmektedir. Yine önceki çalışmalarına paralel olarak (3.31) denkleminin temel çözümü zamanla değişen bir uzaysal olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak yorumlanacağından problem için sonlu fark yaklaşımı temeline dayanan bir ayırık rastlantısal yürüyüş modelini ortaya koymuşlar ve böylelikle de nümerik çözümlere ulaşmışlardır.

Yang ve diğ. [38] çalışmalarında homojen Dirichlet ve Neumann sınır koşulları altında tanımladıkları bir zaman ve uzay-simetrik kesirli difüzyon denklemini düşünmüşlerdir:

$${}_t D_*^\alpha u(x, t) = -\kappa_\beta (-\Delta)^{\beta/2} u(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.32)$$

$$(0 < \alpha < 1, \quad 1 < \beta \leq 2).$$

Bu denklemin analitik çözümünü değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Nümerik çözümlerini ise zaman kesirli türevi için sonlu fark ve Laplace dönüşüm yöntemlerini, uzay-simetrik türevi için matris dönüşüm yöntemini uygulayarak bulmuşlardır. Burada kullanılan ve uzay-simetrik kesirli türevi olarak adlandırılan operatör 3.1.3 Yardımcı Teoreminde ve 3.1.5 Tanımında ifade edilen kesirli Laplace operatörüdür. Dikkat edilirse bu çalışmadaki homojen sınır koşulları varsayımı bu operatörün öz fonksiyonlar cinsinden ifadesine imkân sağlamaktadır. Yine çalışmadaki bazı varsayımlar fiziksel açıdan bazı önemli anlamlar taşımaktadır. Örneğin, $\kappa_\beta > 0$ varsayımı madde akışının bölgenin solundan sağına doğru olduğunu ifade eder. Homojen Dirichlet sınır koşullarının fiziksel anlamı, bölgenin sınırının sınıra ulaşacak madde yoğunluğunun ihmal edilebilir derecede küçük olacak şekilde belirlenmesidir. Yine homojen Neumann sınır koşulları ise taşınan parçacıkların

bölgenin sınırı boyunca serbest olarak yani dış etkenlerden izole edilmiş olarak hareket ettiklerini gösterir. (3.32) denkleminde $0 < \alpha < 1$ ve $\beta = 2$ olması alt difüzyon davranışını, $\alpha = 1$ ve $1 < \beta < 2$ olması ise Levy sürecini belirtmektedir. İşte bu iki anormal difüzyon süreci arasındaki ilişkiyi temsil ettiğinden bu denklemin çözümü oldukça önemlidir. Zaman ve uzay-simetrik kesirli difüzyon denklemini Hamilton kaotik sistemleri modellemek amacı ile ilk olarak Zaslavsky ortaya koymuştur [39].

(3.32) denklemi iki boyutlu uzayda

$${}_t D_*^\gamma u(x, y, t) = -K_\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} u(x, y, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.33)$$

$$(0 < \gamma < 1, 1 < \alpha \leq 2),$$

biçiminde tanımlanarak Yang ve diğ. [40] tarafından ele alınmıştır. Çalışmada uzay kesirli türevinin ayrıklaştırılmasında hem sonlu elemanlar ve hem de sonlu farklar yöntemlerinin uygulanışı ve zaman kesirli türevinin ayrıklaştırılmasında ise sonlu farklar ve Laplace dönüşüm yöntemlerinin uygulanışı gösterilmiştir. Ayrıca matris dönüşüm yöntemi uygulanmış ve matris fonksiyonunun yaklaşımında Lanczos ve M-Lanczos yöntemleri göz önüne alınmıştır. Sonunda ise nümerik çözümler Mittag-Leffler fonksiyonları olarak bulunan analitik çözümler ile karşılaştırılmış ve böylece seçilen nümerik yöntemlerin geçerliliği vurgulanmıştır.

Yang ve diğ. [25] sınırlı bir bölgede Riesz uzay kesirli türevleri ile tanımlanan iki kesirli kısmi diferansiyel denklem tipi için nümerik çözüm metodlarını araştırmışlardır. Ele aldıkları bu denklem tipleri sırasıyla kesirli difüzyon denklemi:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < L, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (3.34)$$

ve kesirli adveksiyon-dispersiyon denklemi:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t) + K_\beta \frac{\partial^\beta}{\partial |x|^\beta} u(x, t), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < L, \quad (3.35)$$

$$(1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta < 1)$$

dir. Bu çalışmanın literatüre en önemli katkısı 3.1.3 Yardımcı Teoreminin açık ispatı olmuştur. Böylelikle 3.1.5 Tanımından yararlanarak ilk olarak problemlerin analitik çözümleri ortaya konmuştur. Dahası bu tanımın uygulanışı L1/L2 yaklaşımları, standart/ötelenmiş Grünwald ve matris transfer yöntemleri gibi üç farklı yöntemin kullanılmasına olanak sağlamış ve nümerik çözümler elde edilmiştir.

Povstenko, klasik termoelastisite teorisinde Fourier kanunu temeline dayanan ısı iletim denklemini ve böylece ısı iletimi esnasında ortaya çıkan termal gerilim ve gerilme ilişkilerini kesirli analizin temel kavramlarını kullanarak genelleştirmiştir [41,42]. Göz önüne aldığı uzay-zaman kesirli ısı iletim denklemi bir boyutlu durumda [43]

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = a \frac{\partial^\beta T}{\partial |x|^\beta}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 2, \quad (3.36)$$

veya çok boyutlu uzayda

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = -a(-\Delta)^{\beta/2} T, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 2, \quad (3.37)$$

formundadır. Özel halde silindirik koordinatlarda bir Cauchy probleminin temel çözümü ile ilişkili olan termal gerilmeleri hesaplamıştır [44].

Farklı bir bakış açısı ile Lin ve diğ. [45] değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi ve bunun Grünwald-Letnikov genişlemesi arasındaki eşitlik ilişkisini kurmuşlar ve bu ilişkiyi kullanarak $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{\alpha(x,t)}$ operatörünün bazı özelliklerini ortaya koymuşlardır. Böylelikle ele aldıkları ve bir sonlu fark yaklaşımı ile çözümünü aradıkları değişken mertebeli lineer olmayan kesirli difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B(x,t) {}_x R^{\alpha(x,t)} u(x,t) + f(u,x,t), \quad (1 < \alpha(x,t) \leq 2) \quad (3.38)$$

biçimindedir. Benzer biçimde Zhuang ve diğerlerinin üzerinde çalıştıkları [46] kaynak terimli ve değişken mertebeli kesirli bir adveksiyon-difüzyon denklemi:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \kappa(x,t) R_{\alpha(x,t)} u(x,t) - v(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + f(u,x,t), \quad (1 < \alpha(x,t) \leq 2). \quad (3.39)$$

Belirli varsayımlar altında bu denklem için açık ve kapalı Euler yaklaşımları ortaya koymuşlardır. Bunu yaparken reel mertebeli Riemann-Liouville, Caputo ve Riesz gibi kesirli türev operatörlerinin tanımlarının değişken mertebe durumuna genelleştirmelerine değinmişlerdir. Ayrıca çalışmalarında uyguladıkları nümerik yaklaşımların kararlılık ve yakınsaklık analizlerine de yer vermişlerdir.

Dikkat edilirse, literatürde anormal difüzyon problemi olarak ele alınan fiziksel süreçler çeşitlendikçe çalışılan denklem tipleri de bir o kadar farklılaşmaktadır. İşte bu denklem tiplerinden bir yenisi de kesirli Fokker–Planck denklemleridir. Klasik teoride bir dış $F(x) = -V'(x)$ kuvvetinin etkisine maruz kalan Brown hareketi Fokker–Planck denklemi ile tanımlanır:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_1} + K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] W(x,t). \quad (3.40)$$

Bu denklemin çözümü olan $W(x,t)$, belli bir t anında x durumundaki test parçacığını bulmaya yarayan olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Yine denklemdeki m parçacığın kütesini, K_1 difüzyon katsayısını ve η_1 çevresi ile etkileşim halinde bulunan parçacığın sürtünme katsayısını temsil eder. Ancak homojen olmayan karmaşık sistemler içindeki dış kuvvet etkisi altındaki madde iletimini ifade etmek için her zaman (3.40) denklemi yeterli olmaz. İşte, bu tipteki yapılar kesirli türevli Fokker–Planck denklemleri ile ifade edilmektedir. Bu anlamda Metzler ve Klafter [47] bir zaman kesirli Fokker–Planck denklemini ortaya koymuşlardır. Benson ve diğ. [48,49] ise Levy dağılımı ile benzetim yaparak bir uzay Fokker–Planck denklemi tanımlanmışlardır. Denklem çözümü olan olasılık dağılım fonksiyonu üzerindeki farklı varsayımlar çeşitli zaman ve uzay kesirli Fokker–Planck denklemlerinin ortaya çıkışına yol açmıştır. Bu amaçla Yang ve diğ. [50] kendilerinden önceki bu çalışmaları genelleştirerek zaman ve uzay kesirli Fokker–Planck denklemini

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_\alpha} + K_\alpha^\mu \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^\mu} \right] W(x,t) + f(x,t) \right\} \quad (3.41)$$

göz önüne almışlar ve bu denklemin nümerik çözümlerini araştırmışlardır. Burada K_α^μ anormal difüzyon katsayısını, m parçacık kütesini, η_α genelleştirilmiş

sürtünme katsayısını ve $d(x) = \frac{V'(x)}{m\eta_\alpha}$ sürüklenme katsayısını ifade etmektedir.

Ayrıca ${}_0D_t^{1-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) Riemann-Liouville zaman-kesirli türevini ve

$\frac{\partial^\mu}{\partial |x|^\mu}$ ($1 < \mu < 2$) Riesz uzay-kesirli türevini temsil etmektedir.

3.2 Kesirli Optimal Kontrol Problemleri

Dinamik sistemlerin gerçeğine en yakın olarak modellenmesine duyulan ihtiyaç, birtakım kesirli diferansiyel denklemler ile tanımlanmalarını gerektirmiştir. Dinamik sistemlerin optimal kontrol tasarımlarında amaç, sistemi tanımlayan zaman değişkenli durum ve kontrol fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlanan ve performans indeksi (ya da maliyet fonksiyonu) olarak adlandırılan fonksiyoneli minimize (ya da maksimize) eden optimal kontrolü belirleyebilmektir.

Aşağıda matematiksel tanımı verilen bir kesirli optimal kontrolünde, sistem dinamikleri kesirli diferansiyel denklemler ile tanımlanır. Durum ve kontrol fonksiyonlarına bağlı olarak lineer ya da kuadratik formlarda ifade edilen performans indeksi minimize eden kontrol fonksiyonunun bulunabilmesi amaçlanır. İlk kez Agrawal [12] tarafından tanımlanan problem matematiksel olarak aşağıdaki biçimde ifade edilir.

Sistem dinamikleri

$${}_0D_t^\alpha x = G(x, u, t), \quad (3.42)$$

başlangıç koşulu

$$x(0) = x_0, \quad (3.43)$$

olmak üzere

$$J(u) = \int_0^1 F(x, u, t) dt \quad (3.44)$$

performans indeksini minimize eden optimal $u(t)$ kontrol fonksiyonunu bulmayı amaçlayan probleme “*Kesirli Optimal Kontrol Problemi (KOKP)*” denir. Burada $x(t)$ ve $u(t)$ sırası ile durum ve kontrol fonksiyonlarını F ve G keyfi skaler ya da vektörel fonksiyonları ve $x(0)$ sistemin $t=0$ anındaki başlangıç durumunu ifade eder. ${}_0D_t^\alpha x$ kesirli türevi Riemann-Liouville anlamında tanımlanmıştır. Özel halde $\alpha=1$ olması durumunda ise problem standart optimal kontrol problemine dönüşür. Ayrıca sistemin başlangıç koşullarının sayısı α ’nın seçildiği aralığa bağlı olarak değişir. Örneğin, $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu $0 < \alpha < 1$ olması için yeterlidir. Ancak $1 < \alpha < 2$ olması durumunda sistemin $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x_1$ biçiminde ikinci bir başlangıç koşuluna daha ihtiyaç duyulur.

Problemin tanımlanmasından sonraki çözüm aşamasında ilk olarak gerekli optimallik koşulları elde edilmelidir. Bu koşulların elde edilmesindeki yolların başlıcaları aşağıda ifade edilmiştir.

i. Geleneksel olan ilk yöntem “*Lagrange çarpanı tekniği*” olarak adlandırılır. Bu teknikte λ Lagrange çarpanı olmak üzere (3.42) ve (3.44)’teki F ve G fonksiyonları kullanılarak birtakım hesaplamalar sonucunda optimallik koşulları

$${}_0D_t^\alpha x = G(x, u, t), \quad (3.45)$$

$${}_tD_1^\alpha \lambda = \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x}, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \quad (3.47)$$

olarak elde edilir. Buradan eşitlikler arasında düzenlemeler yapılırsa bir yardımcı durum değişkeni işlevi gören λ Lagrange çarpanı yok edilir ve böylelikle x durumuna ve u kontrolüne bağlı iki denkleme ulaşılır. Bundan sonra analitik ve/veya nümerik çözüm yöntemleri kullanılarak aranan optimal kontrol bulunur.

ii. İkinci yolla ise klasik hesaplama tekniklerinden yararlanılarak (3.42) eşitliğinden u kontrolü yalnız bırakılarak (3.44)’te yerine yazılır ve bu yolla optimallik koşulları elde edilmeye çalışılır. Ancak bu yolun kullanılması her zaman

kolaylık sağlamayabilir. Örneğin G fonksiyonu lineer olmayan bir yapıda ise u kontrolünün yalnız bırakılması zordur.

iii. Bu yolda da yine klasik hesaplama ile optimallik koşulları elde edilmeye çalışılır. Öncelikle (3.42) integre edilerek x durumu u kontrolüne bağlı olarak ifade edilir ve (3.44)'te yerine yazılır.

Agrawal [12]'de ilk olarak varyasyonlar hesabını, Lagrange çarpanı tekniğini ve kısmi kesirli integrasyon formülünü kullanarak optimallik koşullarını ifade eden Euler-Lagrange denklemlerini biçiminde elde etmiştir. Eşitliklerdeki λ , Lagrange çarpanını (ya da yardımcı durum değişkeni) temsil eder. Agrawal'ın burada klasik Euler-Lagrange denklemlerinden farklı olarak farkına vardığı önemli sonuç, kesirli durumda bu denklemlerin hem sol hem de sağ yönlü kesirli türevler ile ifade edilmeleri olmuştur. Üstelik $\alpha = 1$ olması durumunda bu türevler sırası ile

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha x &= \frac{dx}{dt}, \\ {}_tD_1^\alpha u &= -\frac{du}{dt} \end{aligned} \quad (3.48)$$

standart formuna dönüşür. Böylece klasik optimal kontrol problemini de içine alan daha genel bir yapı ortaya konmuştur. Agrawal, formülasyonunun geçerliliğini ve güvenilirliğini zaman değişkenli ve zamandan bağımsız olan iki kesirli dinamik sistem ele alarak test etmiştir. Sonuç denklemlerine, Legendre ortonormal polinomlar ailesini taban fonksiyonları seçerek seri açılımları şeklinde nümerik bir yaklaşım uygulamıştır. Buradaki önemli sonuçlardan bir diğeri de ortonormal polinomlar ailesinin seçilmesi nümerik olarak kararlı yapıda belli bir sistematik içinde ifade edilebilen matrislerin elde edilmesine yol açmasıdır. Bu, algoritmaların yazımında, hesaplamaların kontrolünde ve hesaplama süresinde zamandan oldukça önemli tasarruf sağlar.

Yukarıda detayları verilen problem yine Agrawal [51] tarafından Caputo anlamında kesirli türevi ile tanımlanarak yeniden ele alınmıştır. Burada ele alınan sistem

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t) \quad (3.49)$$

biçiminde zaman değişkenli ve sabit katsayılı lineer bir sistem ve performans indeks

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)] dt \quad (3.50)$$

biçiminde kuadratik formdadır. $x(t)$ durum ve $u(t)$ kontrol fonksiyonlarına bağlı elde edilen Volterra integral denklemleri iterasyonel bir yaklaşım kullanılarak çözülmüştür. Bu problem değişken katsayılı olması durumunda yani dinamik sistem

$${}_0^c D_t^\alpha x = -a(t)x + b(t)u \quad (3.51)$$

ve performans indeks

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [q(t)x^2(t) + r(t)u^2(t)] dt \quad (3.52)$$

olmak üzere yeniden ele alınmıştır öyle ki $q(t) \geq 0$ ve $r(t) > 0$ [52]. Yine bu çalışmada da Volterra integral denklemlerine Simpson $\frac{1}{3}$ iterasyonel yaklaşımı uygulanarak nümerik çözümler elde edilmiştir.

Agrawal ve Baleanu [53], [12]'de ele alınan problemi değişken ve sabit katsayılı olarak iki durumda Grünwald-Letnikov nümerik yaklaşımı kullanılarak çözmüşlerdir. Benzer olarak Baleanu ve diğ. [54] modifiye edilmiş Grünwald-Letnikov yöntemini uygulayarak sonuçları karşılaştırmışlardır.

Tangpong ve Agrawal [55] vektörel durum ve kontrol fonksiyonları ile tanımlanan ve sistem dinamikleri

$$\frac{\partial^\alpha x(y,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial y^2} + u(y,t) \quad (3.53)$$

formunda olan sürekli bir sistem sınıfı için

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^L [Q'x^2(y,t) + R'u^2(y,t)] dy dt \quad (3.54)$$

performans indeksini minimize etmeyi amaçlayan bir problemi analiz etmişlerdir. Nümerik çözümleri elde ederken de Volterra integral denklemlerini kullanmışlardır.

Yine Agrawal tarafından dağıtılmış parametrelili bir sistem sınıfı için KOKP'nin nümerik çözümleri “öz fonksiyon açılımı tekniği” kullanılarak elde

edilmiştir öyle ki bu teknikle sistemin durum ve kontrol fonksiyonları öz fonksiyonların birer serisi olarak ifade edilir. Burada “*dağıtılmış parametrelî*” kavramı ile kastedilen sistem dinamiklerinin (3.53)’te olduğu gibi durum ve kontrol fonksiyonlarına bağlı kısmi bir diferansiyel ile ifade edilmesidir [56]. Bu çalışmada uygulanan durum ve kontrol fonksiyonlarının öz fonksiyonlar ile ifade edilmesi yöntemi sayesinde ana KOKP birbirinden bağımsız olarak çözülebilen çoklu KOKP’lere dönüştürülmüştür. Böylece çözüm kolaylığı sağlanmış ve eğrisel (kutupsal, küresel, silindirik) koordinat sistemlerinde tanımlanan problemlerin çözümlerinde de oldukça yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin, Özdemir ve diğ. [57] iki-boyutlu Kartezyen koordinatlarda Riemann-Liouville anlamında tanımladıkları

$${}_0D_t^\alpha x(\xi, \eta, t) = \frac{\partial^2 x(\xi, \eta, t)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x(\xi, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u(\xi, \eta, t) \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (3.55)$$

dağıtılmış parametrelî difüzyon-dalgı denklemi için belli başlangıç ve sınır koşulları altında

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^L \int_0^L [Q'x^2(\xi, \eta, t) + R'u^2(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta dt \quad (3.56)$$

kuadratik performans indeksini minimize etmeyi amaçlamışlardır. Bunu yaparken öz fonksiyonları belirleyerek durum ve kontrol fonksiyonlarını öz fonksiyonların lineer toplamı biçiminde ifade etmişlerdir. Nümerik hesaplamalarda yöntem olarak Grünwald-Letnikov yaklaşımını kullanmışlardır. Bu problemdeki yöntemi kullanarak yine Özdemir ve diğ. [58] ana problemi kutupsal koordinatlarda ele almışlardır. Burada çözümlerin açı değişkeninden bağımsız olduğu düşünülerek problem radyal simetrik durumda analiz edilmiştir. Ele alınan dinamik sistem

$$\frac{\partial^\alpha x}{\partial t^\alpha} = \beta \left(\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial r} \right) + u(r, t) \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (3.57)$$

olmak üzere

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^R r [Ax^2(r, t) + Bu^2(r, t)] dr dt \quad (3.58)$$

performans indeksi minimize edilmiştir. O halde kutupsal koordinatlar için yapılabilen formülasyon diğır üç-boyutlu eğrisel koordinat sistemlerine de

genişletilebilir düşüncesi Özdemir ve diğerlerini [59] silindirik koordinatlarda da problemi yorumlamaya yönlendirmiştir. Bu çalışmalarında yine radyal simetrik durumu göz önüne almışlardır öyle ki dinamik sistemi

$${}_0D_t^\alpha x(r, z, t) = \beta \left(\frac{\partial^2 x(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial x(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 x(r, z, t)}{\partial z^2} \right) + u(r, z, t) \quad (3.59)$$

ve performans indeksi

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^L \int_0^R r [Ax^2(r, z, t) + Bu^2(r, z, t)] dr dz dt, \quad (3.60)$$

$$0 < t < 1, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < L$$

biçiminde tanımlamışlardır. Kutupsal ve silindirik koordinatlarda yaptıkları her iki çalışmada da Riemann-Liouville kesirli türevini kullanmışlardır ve Lagrange çarpanı tekniği ile optimallik koşullarını belirleyip nümerik çözüm aşamasını Grünwald-Letnikov yaklaşımı ile tamamlamışlardır. Buradaki en önemli sonuç, koordinat sistemlerinin değişmesi ile elde edilen öz fonksiyonlar değiştiğinden (Trigonometrik fonksiyonlar, Bessel fonksiyonları) sistemin durum ve kontrol fonksiyonlarının cevabının ve dolayısıyla fiziksel yorumlarının da her defasında değişkenlik göstermesidir.

Hasan ve diğ. [60] bu problem tipini Caputo anlamında düşünerek silindirik ve küresel koordinatlarda Caputo anlamında ele almışlardır. Yine silindirik koordinatlarda radyal simetrik durumu göz önüne almışlar ve küresel koordinatlarda açı değişkeni iki tane olduğundan (θ, φ) hem yarı hem de tam radyal simetrik durumlar için problemi incelemişlerdir. Burada öncelikle değişkenlerine ayırma yöntemi ile öz fonksiyonları belirlemişler ve ana problemi Volterra integral denklemlerine dönüştürerek Grünwald-Letnikov nümerik yaklaşımı ile çözmüşlerdir. Dikkat edilirse problemin ana çatısı aynı olmasına rağmen ilk olarak kullanılan türev operatörleri açısından farklılık göstermektedirler. Buna ek olarak Lagrange çarpanı tekniği ve Volterra integral denklemleri bu tipteki problemler için yaygın olarak kullanılan iki önemli tekniktir ve bu çalışmalar her ikisinin de güzel birer uygulamasıdır. Burada akla gelen soru Grünwald-Letnikov yaklaşımının neden bu kadar sık kullanıldığı olabilir. KOKP'de optimallik koşulları elde edildiğinde sağ ve sol yönlü kesirli türevler kendiliğinden ortaya çıkmaktadır. İşte, Grünwald-Letnikov

yaklaşımı da ileri ve geri fark yöntemlerinin genelleştirmesi olarak ortaya konmuş matrisel hesaplamalara dayanan direkt bir yaklaşım olduğundan bu tipteki problemler için kullanımı oldukça uygundur öyle ki algoritmaların oluşturulması belirli bir sistematığe dayanır.

Tüm bunların yanı sıra elbette literatüre alternatif yöntemler de girmiştir. Örneğin, Biswas ve Sen [61] bir yansıma operatörü kullanarak Riemann-Liouville ya da Caputo anlamında tanımlanan sağ yönlü kesirli türevi sol yönlü türeve dönüştürmüşlerdir. Böylelikle standart bir nümerik çözüm yöntemi uygulayarak KOKP'yi çözebilmişlerdir.

Farklı bir bakış açısı olarak (3.51) ve (3.52)'de ifade edilen zaman değişkenli KOKP'nin nümerik çözümleri kesirli kuvvet serileri üzerine kurulan direkt bir yaklaşım ile hesaplanmış ve aynı zamanda bir hata analizi yapılmıştır [62]. Çalışmada kullanıldığı kadarı ile de kesirli Taylor serileri hakkında temel bilgiye de yer verilmiştir. Bu tipteki serilerde kesirli kuvvetler belirlenirken problemdeki kesirli türevlerin mertebeleri göz önüne alınır. Aynı zamanda bu yaklaşım lineer çözücü ile çözülebilen bir lineer denklem sistemi oluşturur. Bu çalışmada, böyle bir nümerik yöntem uygulanabilmesi için optimallik koşullarının belirlenmesinde verilen üç yöntemden ikincisi uygulanmıştır.

Çok boyutlu uzayda, durum ve kontrol fonksiyonlarının farklı boyutlu vektörler olması durumunda, KOKP Riemann-Liouville anlamında Agrawal ve diğ. [63] tarafından ele alınmıştır. Göz önüne alınan performans indeks

$$J = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[{}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\alpha \theta \right]^2 dt \quad (3.61)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\alpha \theta &= u(t), \\ \theta(t) &= x_1(t), \\ {}_0D_t^\alpha \theta &= x_2(t) \end{aligned}$$

olmak üzere nümerik çözümler Grünwald-Letnikov yaklaşımı kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışmada da diğerlerinde olduğu gibi $\alpha < 1$ durumu incelenmiştir. Buna gerekçe olarak da viskoelastik materyaller gibi pek çok sistemin dinamik davranışlarını ifade eden kesirli diferansiyel denklemlerin mertebesinin $\alpha < 1$ olması

verilmiştir. Yine burada ifade edilen önemli bir husus, mertebesi $\alpha > 1$ olan kesirli diferansiyel denklemlerin durum-uzay formunda ifade edildiklerinde her biri $\alpha < 1$ mertebeli olan denklemlere dönüştüğüdür. O halde her durumda çözüm gerektiren $\alpha < 1$ hali olduğundan esasında $\alpha < 1$ en genel durumu ifade etmektedir.

Defterli [64] çok boyutlu uzayda farklı boyutlu durum ve kontrol fonksiyonları ile Riemann-Liouville anlamında tanımlanan bir sistem için KOKP'yi formülize etmiştir. Bu çalışması ile [53]'te skaler durum için düşünülen problemi vektörel forma genişletmiştir. Defterli çalışmasında özel halde iki-boyutlu

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha x_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ {}_0D_t^\alpha x_2(t) &= -2x_2(t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

dinamik sistemini ve

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt \quad (3.63)$$

performans indeksini göz önüne almış ve Grünwald-Letnikov yaklaşımını kullanarak nümerik çözümlerini elde etmiştir.

Alipour ve diğ. [65] çok boyutlu KOKP'ler için Bernstein polinomlarını kullanarak fonksiyonlara yaklaşmışlar ve yine bu polinomlarla kesirli türevler için yeni bir operasyonel matris oluşturmuşlardır. Böylelikle çok boyutlu KOKP'yi cebirsel bir denklem sistemine dönüştürerek ana problemi basitleştirilmiş bir forma sokmuşlardır. Bernstein polinomları ile ortaya koydukları bu yeni yaklaşımın geçerliliğini göstermek için literatürde çalışılmış farklı nümerik uygulama problemlerini göz önüne almışlar ve karşılaştırma analizi yapmışlardır.

Biswas ve Sen [66] tamsayı ve Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevlerini içeren kesirli diferansiyel denklemlerle tanımlanan bir özel tip dinamik sistem için KOKP'yi yalancı-durum-uzay modeli oluşturarak incelemiştir. Çalışmada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ve $\mathbf{x}(t)$ n boyutlu vektör, $u(t)$ bir kontrol girdisi olmak üzere dinamik sistem

$$\dot{\mathbf{x}} + P {}_0D_t^\alpha \mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (3.64)$$

ve performans indeks

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + r u^2) dt \quad (3.65)$$

olarak tanımlanmıştır. Sonuç olarak bu formülasyonlarını bir kütle-yay-viskodarper sistemi üzerinde uygulayarak geçerliliğini göstermişlerdir.

Bir başka araştırmalarında Biswas ve Sen [67], sabit ve sabit olmayan final durumlu kesirli bir sistemin kısıtlı dinamik optimizasyon problemini ele almışlardır. Genel halde

$$J(u) = S(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} V(x, u, t) dt \quad (3.66)$$

performans indeksini göz önüne alarak bunun alt problemlerinden ilki olan sabit final durumundaki

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [q(t)x^2 + r(t)u^2] dt \quad (q(t) \geq 0, r(t) > 0) \quad (3.67)$$

performans indeksini, sınır koşulları

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (3.68)$$

ve sistem dinamikleri

$${}_0 D_t^\alpha x = a(t)x + b(t)u \quad (3.69)$$

olmak üzere minimize etmişlerdir. İkinci alt problemin performans indeks yapısı ise aşağıdaki gibidir:

$$J(u) = \frac{1}{2} s(t_f) x^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [q(t)x^2 + r(t)u^2] dt, \quad q \geq 0, r > 0, s \geq 0. \quad (3.70)$$

Gecikmeli durum değişkenleri olması durumunda kesirli varyasyonel hesap [68] ve optimal kontrol problemi [69] Baleanu ve diğ. tarafından düşünülmüştür. Burada göz önüne alınan performans indeks

$$J(y, u) = \int_a^b F(x, y(x), u(x), y(x-\tau), y'(x), y'(x-\tau), D_b^\beta y(x)) dx \quad (3.71)$$

ve dinamik sistem

$${}_a D^\alpha y(x) = G(x, y(x), u(x)) \quad (3.72)$$

öyle ki $x \in [a - \tau, a]$, $a < b$, $\tau > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ biçimindedir. Bu çalışmada gecikmeli durumda kesirli varyasyon prensipleri n boyuta genelleştirilmiştir ve elde edilen sonuçlar (3.71) ve (3.72)'de verilen KOKP'nin optimallik koşullarını elde etmede kullanılmıştır.

Tricaud ve Chen [70-72] KOKP'lerin yaklaşık çözümleri için yeni bir yol geliştirmişlerdir. Çalışmalarında, lineer/lineer olmayan, zamandan bağımsız/bağımlı, SISO/MIMO (Single-Input-Single-Output/ Multiple-Input-Multiple-Output), durum/girdi kısıtlı, serbest sınır koşullu gibi pek çok tipteki KOKP'ye uygulanabilen genel bir yöntemi ortaya koymuşlardır. Metotlarında kesirli türevlerin rasyonel bir yaklaşımı söz konusudur. Ayrıca genel amaçlı olarak herhangi bir optimal kontrol problemini çözmek üzere oluşturulmuş MATLAB içinde bir araç kutusu olan RIOTS_95'i kullanarak algoritmalarını oluşturmuşlardır. Dahası, problemin çözüm aşamasında durum-uzay modeli oluşturmuşlardır. Belirli eşitsizlik kısıtları ve başlangıç koşulu altında ele aldıkları bu problemde performans indeks

$$J(u) = G(x(a), x(b)) + \int_a^b L(x, u, t) dt \quad (3.73)$$

ve dinamik sistem

$${}_a D_t^\alpha x(t) = H(x, u, t) \quad (3.74)$$

biçimindedir. Burada $0 < \alpha < 1$ ve L, G, H lineer olmayan fonksiyonlardır.

Klasik kontrol teorisinin temel teoremlerinden biri olan Noether'in Teoremi herhangi bir sistemde meydana gelen her simetrinin sonucunda bir korunum yasasının görüldüğü gerçeğini ortaya koyar. Örneğin, zamanda simetri enerji korunumunu, kaydırmada simetri momentumun korunumunu, döndürmede simetri açıl momentumun korunumunu meydana çıkarmıştır. İşte simetriler ve bunların KOKP'ler için ortaya çıkardıkları kesirli korunum kanunları ve kesirli Noether teoremi Riemann-Liouville ve Caputo anlamında ilk olarak Frederico ve Torres [73-76] tarafından çalışılmıştır.

Jelicic ve Petrovacki [77] sistem dinamikleri yüksek mertebeden tamsayı mertebeli türevler içeren kesirli diferansiyel denklem ile tanımlanan KOKP'ler için optimallik koşullarını, farklı bir yaklaşım olan kesirli türevler için bir genişleme formülü kullanarak elde etmişlerdir. Ele aldıkları problemde performans indeks

$$J(u) = \int_0^1 F(x(t), u(t), t) dt \quad (3.75)$$

ve diferansiyel denklem

$$x'(t) + k({}_0D_t^\alpha x)(t) = G(x, u, t) \quad (3.76)$$

biçiminde tanımlanmıştır ve sistemdeki en yüksek mertebeden türevin tamsayı mertebeli olduğu da fiziksel uygulamaları düşünülerek vurgulanmıştır.

Rapaic ve Jelicic [78] genelleştirilmiş kesirli ısı denklemi ile ifade edilen

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + \sum_{m=0}^M \gamma_m \frac{\partial^{\alpha_m} Q(x, t)}{\partial t^{\alpha_m}} = \mathbf{D} \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + g(x, t) \quad (3.77)$$

öyle ki $\mathbf{D} > 0$ termal difüzyon katsayısını, $\alpha_m \in (0, 1)$, $\gamma_m \in \mathbb{R}$ ($m = 0, 1, \dots, M$), $g(x, t)$ ortam içindeki ısı üreticini temsil eder. Bu denklem ile ifade edilen dağıtılmış parametrelili sistem ilk olarak tamsayı mertebeli toplu parametrelili sisteme dönüştürülmüştür. Bu dönüştürme işlemi herhangi bir yaklaşıma gerek duymaksızın direkt yöntemle gerçekleştirilmiştir. Burada yeni gözlenen model sonsuz boyutludur. Metodun en önemli avantajı optimallik koşulları olarak kesirli Euler-Lagrange denklemlerin elde edilmesine ihtiyaç duyulmamasıdır. Bunun yerine çözümü elde edebilmek için klasik optimal kontrol teorisinin iyi bilinen tekniklerinden biri olan lineer kuadratik regülatörü kullanılmıştır. Uygulama problemi olarak da Bang-Bang kontrol seçilmiş ve böylelikle yöntemin etkililiği gösterilmiştir.

Wang ve Zhou [79] yarı lineer kesirli evölüsyon denklemlerinin zayıf çözümleri üzerine çalışmışlar, bu tipteki denklemlerle tanımlanan sistemler için Lagrange problemini ve bununla beraber bu tipteki sistemler için optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını analiz etmişlerdir. Yine diğer çalışmalarında Wang ve Zhou [80], Caputo türevli yarı lineer kesirli evölüsyon denklemi ile tanımlanan bir sistem için zaman optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını göstermişlerdir.

Bunlara ek olarak Banach uzayında tanımlanan bu tipteki problemler için yaklaşım süreci üzerine de çalışma yapılmıştır [81,82].

Benzer doğrultuda Mophou [83] optimal kontrol problemini iki kısımda incelemiştir. İlk Hilbert uzayında tanımlanan kesirli difüzyon denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini ortaya koymuştur ve sonrasında bu tipteki denklemler üzerine kurulmuş optimal kontrol probleminin çözümünün varlık ve tekliğini araştırmıştır.

Matignon [84] adjoint (eşlenik) sistemleri kullanarak kesirli lineer sistemlerin optimal kontrolü üzerine çalışmıştır. Bu amaçla difüzyon realizasyonu olarak adlandırılan bir yöntem kullanmış ve adjoint sistemleri durum-uzay modeli formunda ifade ederek formülasyonu gerçekleştirmiştir.

Günümüzde tıp alanının oldukça popüler bir araştırma konusu olan HIV virüsleri ve bunların tedavi yöntemleri ile ilgili kesirli türevlerin ve optimal kontrol probleminin önemli bir uygulama örneği Ding ve diğ. [85] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada hafızalı, HIV enfekte olmuş bir bağışıklık sistemi öncelikle zaman kesirli türevli bir denklem sistemi ile modellenmiştir. Enfeksiyonun viral yolla ilerlemesini ve enfekte olmuş hücrelerin sayısını minimize eden bir objektif fonksiyonu (performans indeksi) kullanılarak ve minimal dozda anti-HIV ilaçları ile optimal kontrol probleminin çözümü gerçekleştirilmiştir. Böylece matematiksel olarak optimal terapinin etkileri gösterilmiştir. Yöntem olarak Lagrange çarpanı tekniğine başvurulmuştur.

Bu zamana kadar yapılan çalışmalarda üzerinde optimal kontrol problemlerinde tanımlanan kesirli dinamik sistemler lineer ya da lineer olmayan, sabit ya da değişken katsayılı, skaler ya da vektörel gibi farklı biçimlerde ele alınmıştır. Ancak her birinde sistem dinamikleri sadece zaman kesirli türevli denklemler ile ifade edilmiştir ve dolayısıyla sadece zaman kesirli türevinin KOKP'ler üzerindeki etkisi hesaba katılmıştır. Oysaki doğada pek çok süreç hem zaman hem de uzay kesirli türevli kesirli diferansiyel denklemlerle tanımlanan anormal difüzyon olgusu ile karakterize edilir. Bu tipteki dinamik sistemler için KOKP bu zamana kadar incelenmemiştir. Bu eksiklik tezin araştırma konusunun belirlenmesine ışık tutmuştur.

4. BİR UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMİNİN BİR BOYUTLU UZAYDA VE KARTEZYEN KOORDİNATLARDA OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, Riesz-Caputo anlamında tanımlanan bir uzay-zaman kesirli difüzyon sisteminin optimal kontrol problemi bir boyutlu uzayda ve Kartezyen koordinatlarda incelenmiştir [86]. Burada sistem dinamikleri

$${}_0^C D_t^\alpha x(y,t) = -\kappa_\beta (-\Delta)^{\beta/2} x(y,t) + u(y,t), \quad (4.1)$$

başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$x(y,0) = x_0(y), \quad (4.2)$$

$$x(0,t) = x(L,t) = 0 \quad (4.3)$$

biçiminde tanımlanan bir anormal difüzyon sürecine bağlı olan

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^L [Ax^2(y,t) + Bu^2(y,t)] dy dt \quad (4.4)$$

performans indeksini minimize eden optimal kontrol probleminin bulunması temel amaçtır.

Burada $x(y,t)$ ve $u(y,t)$, $\{(y,t) | y \in [0,L] \wedge t \in [0,1]\}$ bölgesinde tanımlı durum ve kontrol fonksiyonlarını A ve B pozitif keyfi sabitleri, $\kappa_\beta > 0$ anormal difüzyon katsayısını ifade eder. Ayrıca ${}_0^C D_t^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) notasyonu Caputo anlamında zaman kesirli türevini ve $(-\Delta)^{\beta/2}$ ($1 < \beta \leq 2$) ise kesirli Laplace operatörünü temsil etmektedir. Ayrıca dikkat edilirse burada sabit son zamanlı ve serbest son durumlu bir KOKP düşünülmektedir.

İlk olarak durum ve kontrol fonksiyonları öz fonksiyonlar cinsinden ifade edilmelidir. Bu amaçla $x(y,t) = Y(y)T(t)$ formundaki değişkenlerine ayrılabilir çözümleri elde etmek için

$$-\Delta Y(y) = \mu^2 Y(y) \quad (4.5)$$

özdeğer problemi $Y(L) = 0$ sınır koşulu ile göz önüne alınsın. Bu durumda

$\mu_n = \frac{n\pi}{L}$ ($n = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{Z}^+$) özdeğerler olmak üzere öz fonksiyonlar

$\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$ olarak elde edilir. Böylece $x(y,t)$ durum ve $u(y,t)$ kontrol fonksiyonları

için

$$x(y,t) = \sum_{n=1}^m x_n(t) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right), \quad (4.6)$$

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^m u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

varsayımı yapılabilir. Dikkat edilirse (4.6) seri fonksiyonları (4.3) sınır koşullarını sağlar. Yine buradaki öz fonksiyonların ortonormal bir aile meydana getirmesi kesirli Laplace operatörünün öz fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesine imkân verir. Bunun için 3.1.5 Tanımındaki (3.22) eşitliği dikkate alınırsa

$$(-\Delta)^{\beta/2} x(y,t) = \sum_{n=1}^m x_n(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^\beta \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (4.7)$$

elde edilir. Ayrıca (4.6) serilerindeki üst limit değeri gerçekte $m \rightarrow \infty$ olacaktır. Ancak nümerik hesaplamalar yakınsaklık durumu göz önünde bulundurularak sonlu limit değeri için yapılacağından m sonlu bir değer olarak düşünülmektedir.

Gerekli optimallik koşullarının belirlenebilmesi için (3.42)-(3.44)'teki Agrawal'ın genel KOKP tanımında F ve G fonksiyonlarının belirlenmesi gerekmektedir [12]. Bu amaçla ilk olarak (4.6) seri fonksiyonları (4.4) performans indeksinde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$J(u) = \frac{L}{4} \int_0^1 \left\{ \sum_{n=1}^m [Ax_n^2(t) + Bu_n^2(t)] \right\} dt \quad (4.8)$$

olur. Burada

$$F(x_n, u_n, t) = \frac{L}{4} [Ax_n^2(t) + Bu_n^2(t)] \quad (n=1, 2, \dots, m) \quad (4.9)$$

biçimindedir. Benzer biçimde G 'yi hesaplayabilmek için (4.6) ve (4.7) serileri (4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$${}_0^c D_t^\alpha x_n(t) = -\kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} x_n(t) + u_n(t), \quad (n=1, 2, \dots, m) \quad (4.10)$$

elde edilir ve

$$G(x_n, u_n, t) = -\kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} x_n(t) + u_n(t) \quad (4.11)$$

olarak bulunur. Böylelikle F ve G fonksiyonları $x_n(t)$ ve $u_n(t)$ bileşen fonksiyonları cinsinden ifade edilmiş olur. O halde $x_n(t)$ durum bileşen fonksiyonunun başlangıç değerini belirlemek için (4.6) serilerindeki $x(y, t)$ (4.2) başlangıç koşulunda yazılırsa

$$x_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L x_0(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) d\xi \quad (4.12)$$

başlangıç koşuluna ulaşılır. Bu sonuçta da görüldüğü gibi önemli olan, bileşen fonksiyonu için başlangıç değerinin her zaman sistemin durumu için verilen başlangıç değerine bağlı olmasıdır. Diğer bir deyişle sistem için seçilen başlangıç koşulu, bileşen fonksiyonlarının başlangıç değerini belirlemektedir. (4.12) başlangıç değer fonksiyonu hem analitik hem de nümerik hesaplamalarda kullanılmaktadır.

Belirlenen F ve G fonksiyonları ile genel bir KOKP için tanımlanan gerekli optimallik koşulları olan (3.45)-(3.47) kullanılarak

$${}_0^C D_t^\alpha x_n(t) = -\kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} x_n(t) + u_n(t), \quad (4.13)$$

$${}_t^C D_1^\alpha \lambda_n(t) = A \frac{L}{2} x_n(t) - \kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \lambda_n(t), \quad (4.14)$$

$$B \frac{L}{2} u_n(t) + \lambda_n(t) = 0 \quad (4.15)$$

bulunur öyle ki

$$x_n(0) = x_{n0}, \lambda_n(1) = 0. \quad (4.16)$$

Buradaki $\lambda_n(t)$ 'ler Lagrange çarpanları (yardımcı durum değişkeni)'dir. (4.14) ve (4.15) optimallik koşulları yeniden düzenlenirse

$${}_t^C D_1^\alpha u_n(t) = -\frac{A}{B} x_n(t) - \kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} u_n(t) \quad (4.17)$$

elde edilir. Sonuç olarak $x_n(t)$ ve $u_n(t)$ bileşen fonksiyonlarını ve dolayısıyla sistemin $x(y,t)$ durumunu ve $u(y,t)$ kontrolünü belirlemeyi sağlayan iki ana denklem aşağıdaki gibidir:

$${}_0^C D_t^\alpha x_n(t) = -\kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} x_n(t) + u_n(t), \quad (4.18)$$

$${}_t^C D_1^\alpha u_n(t) = -\frac{A}{B} x_n(t) - \kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} u_n(t). \quad (4.19)$$

O halde (4.18)-(4.19) kesirli denklem sisteminin analitik ve nümerik çözümleri belirlenmelidir.

4.1 Analitik Çözüm

Kesirli diferansiyel denklem çözümlerinde analitik çözüm ya da diğer bir deyişle açık (kesin) çözüm bulmak her zaman kolay ve hatta mümkün olmayabilir. Literatürde analitik çözüm diye bahsedilen çözümler ise çoğunlukla Laplace ya da Fourier gibi integral dönüşümlerinin uygulanması ile elde edilen kapalı formdaki çözümlerdir. Dahası bu çözümlerin de çeşitli parametrelere göre davranışı incelenmek istendiğinde yine uygun bir nümerik metot uygulanarak istenen sonuca ulaşılır.

Bu kısımda analitik çözüm ile kastedilen zaman kesirli türevin mertebesinin $\alpha = 1$ olmasıdır. Bunu yaparken amaç, (4.18)-(4.19) denklem sistemini klasik çözüm yöntemiyle çözülebilir hale getirmek ve seçilen nümerik yöntemi de benzer biçimde uygulayarak yöntemin geçerliliğini test etmektir.

Kesirli analizde $\alpha = 1$ olması durumunda sol ve sağ yanlı kesirli Caputo türevleri için bilinen klasik türevlere aşağıdaki biçimde eşit olduklarıdır:

$${}_0^c D_t^1 = \frac{d}{dt}, \quad {}_t^c D_1^1 = -\frac{d}{dt}. \quad (4.20)$$

Bu durumda (4.18)-(4.19) kesirli denklem sistemi de

$$\frac{d}{dt} x_n(t) = -\kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} x_n(t) + u_n(t), \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dt} u_n(t) = \frac{A}{B} x_n(t) + \kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} u_n(t) \quad (4.22)$$

biçimine dönüşür. Buradaki katsayı parametreleri kısalık olması amacıyla

$$E_n = \kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \quad (4.23)$$

olarak yeniden adlandırılır. Sonuç olarak (4.21)-(4.22) denklem sistemi

$$x_n(0) = x_{n0}, \quad u_n(1) = 0 \quad (4.24)$$

uç değerleri göz önüne alınarak çözüldüğünde

$$x_n(t) = x_{n0} \frac{[(K_n - E_n)e^{-K_n(1-t)} - (K_n + E_n)e^{K_n(1-t)}]}{[(K_n - E_n)e^{-K_n} - (K_n + E_n)e^{K_n}]}, \quad (4.25)$$

$$u_n(t) = Fx_{n0} \frac{[e^{-K_n(1-t)} - e^{K_n(1-t)}]}{[(K_n - E_n)e^{-K_n} - (K_n + E_n)e^{K_n}]} \quad (4.26)$$

elde edilir. Burada $K_n = \sqrt{E_n^2 + F}$ dir.

4.2 Nümerik Çözüm

(4.18)-(4.19) denklem sisteminin nümerik çözümlerinin hesaplanmasında ileri-geri fark yöntemleri temeline dayanarak ortaya konmuş olan GL yaklaşımı uygulanmıştır. Bunun için öncelikle RL ve GL türevleri arasındaki ilişki kullanılmıştır. Ancak problemde zaman kesirli türevi Caputo anlamında tanımlanmıştır. O halde ilk olarak RL ve Caputo kesirli türevleri arasındaki ilişki göz önüne alınmalıdır. $n-1 < \alpha \leq n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere bu ilişki aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x) = {}^C D_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k}{dx^k} f(x) \Big|_{x=a} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, \quad (4.27)$$

$${}^{RL}D_b^\alpha f(x) = {}^C D_b^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k}{dx^k} f(x) \Big|_{x=b} \frac{(b-x)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \quad (4.28)$$

Grünwald-Letnikov yaklaşımında zaman bölgesi olan $[0,1]$ aralığı N tane ve $h = \frac{1}{N}$ uzunluklu alt zaman aralıklarına ayrılır. Böylece M . andaki yaklaşımın değeri

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^M w_j^{(\alpha)} f(hM - jh), \quad (4.29)$$

$${}^{RL}D_b^\alpha f(x) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-M} w_j^{(\alpha)} f(hM + jh) \quad (4.30)$$

olarak hesaplanır. Burada yaklaşımın katsayıları

$$\begin{aligned} w_0^{(\alpha)} &= 1, \\ w_j^{(\alpha)} &= \left(1 - \frac{\alpha + 1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

biçimindedir. (4.29) ve (4.30) yaklaşımları (4.27) ve (4.28) eşitliklerinde uygulanırsa

$${}^C D_{Mh}^\alpha x_n(Mh) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^M w_j^{(\alpha)} x_n(hM - jh) - x_n(0) \frac{[Mh]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (4.32)$$

$${}^C D_{Mh}^\alpha u_n(Mh) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-M} w_j^{(\alpha)} u_n(hM + jh) - u_n(Nh) \frac{[(N-M)h]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (4.33)$$

elde edilir. O halde (4.18)-(4.19) denklem sisteminin nümerik çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^M w_j^\alpha x_n(Mh - jh) - x_n(0) \frac{[Mh]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} x_n(Mh) &= u_n(Mh) \\ (M = 1, 2, \dots, N, n = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-M} w_j^\alpha u_n(Mh + jh) - u_n(Nh) \frac{[(N-M)h]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} u_n(Mh) &= -\frac{A}{B} x_n(Mh) \\ (M = N - 1, N - 2, \dots, 0, n = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nümerik hesaplamaların algoritmaları MATLAB R2007b kullanılarak yazılırken başlangıç koşulu olarak

$$x(y, 0) = x_0(y) = y^2(\pi - y) \quad (4.36)$$

seçilmiştir. Bu seçim keyfi olmakla birlikte yazılan algoritma, (4.12) integralini her bir $n \in \mathbb{Z}^+$ değeri için ve (4.36) başlangıç koşulunu kullanarak hesaplar. Böylelikle $x_n(t)$ 'ler için başlangıç koşullarını belirlemiş olur. Ayrıca kontrol bileşen

fonksiyonunun son değeri $u_n(1) = u_n(Nh) = 0$ 'dır. Bunun anlamı, sistemin kontrolüne ayrılan süre tamamlandığında kontrolün çalışmasının durmasıdır.

Analitik ve nümerik tüm hesaplamalarda yalınlık olması bakımından $A = B = L = \kappa_\beta = 1$ olarak seçildiği belirtilmelidir. *Bu kabul tezin sonraki bölümlerinde de geçerlidir.*

İlk olarak sistemin $x_1(t)$ durum ve $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının analitik ve nümerik çözümünün karşılaştırması Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$ ve $N = 100$ değerleri için yapılmıştır. Bu şekilde, verilen nümerik algoritmanın probleme uygunluğu test edilmiştir. Analitik ve nümerik çözümlerin birbirlerine çok yakın olarak örtüşmesi ile algoritmanın istedik uygunlukta çalıştığı sonucuna ulaşılmıştır.

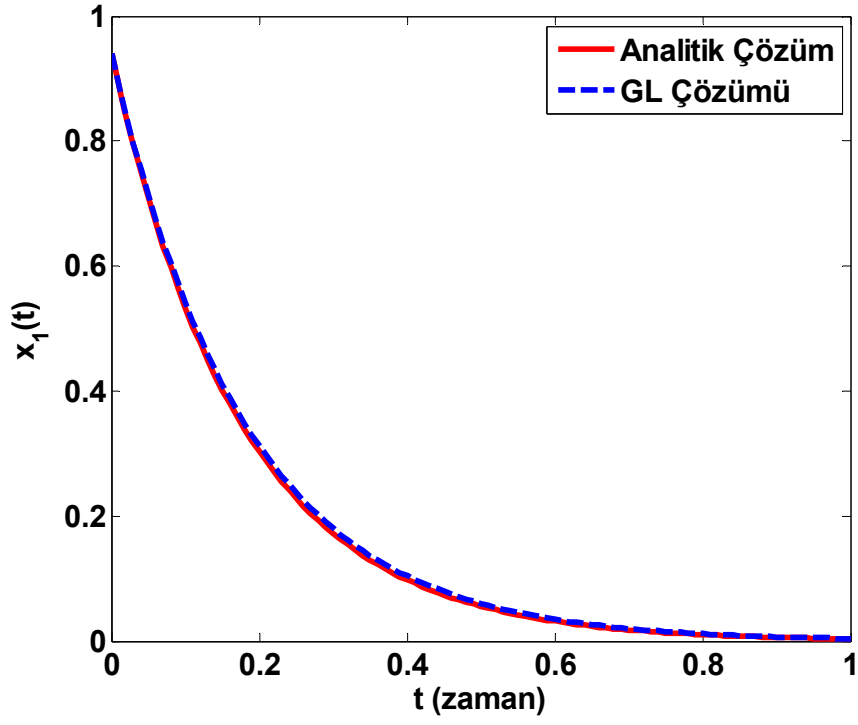
Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'te uygulanan GL nümerik yaklaşımındaki h alt aralık uzunluklarının değişiminin sistemin $x_1(t)$ durum ve $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonları üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu şekiller için $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.5$ keyfi parametre değerleri seçilmiştir. Burada beklenen az sayıda alt aralık kullanarak hassasiyeti yüksek sonuçlar elde etmektir ve bunun $h = 0.025$ değeri için sağlandığı gözlenmiştir. $h < 0.025$ değerleri için sistemin hem durum hem de kontrol bileşen fonksiyonları için düzgünlük, yani örtüşme aradaki hata ihmal edilebilir ölçüde birebirdir. O halde $h = 0.025$ 'ten daha küçük alt aralık uzunluğu seçmek hassasiyette anlamlı bir fark yaratmayıp sadece algoritmanın çalışma süresini uzatmaktadır.

Bilindiği gibi α zaman kesirli türevinin mertebesidir. α parametresinin değişiminin sistemin durum ve kontrolü üzerindeki etkisi iki farklı biçimde değerlendirilmiştir. İlk olarak Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da $x_1(t)$ durum ve $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının nümerik çözümünün $\alpha \rightarrow 0$ düşük değerlerine göre davranışı $\beta = 1.5$, $N = 500$ için incelenmiştir. Benzer analiz Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'de $\alpha \rightarrow 1$ olacak biçimde α 'nın yüksek değerleri için yapılmıştır. Her iki durumda da amaçlanan α 'nın tamsayı değerlerine yaklaşması durumunda sistemin cevabını görebilmektir.

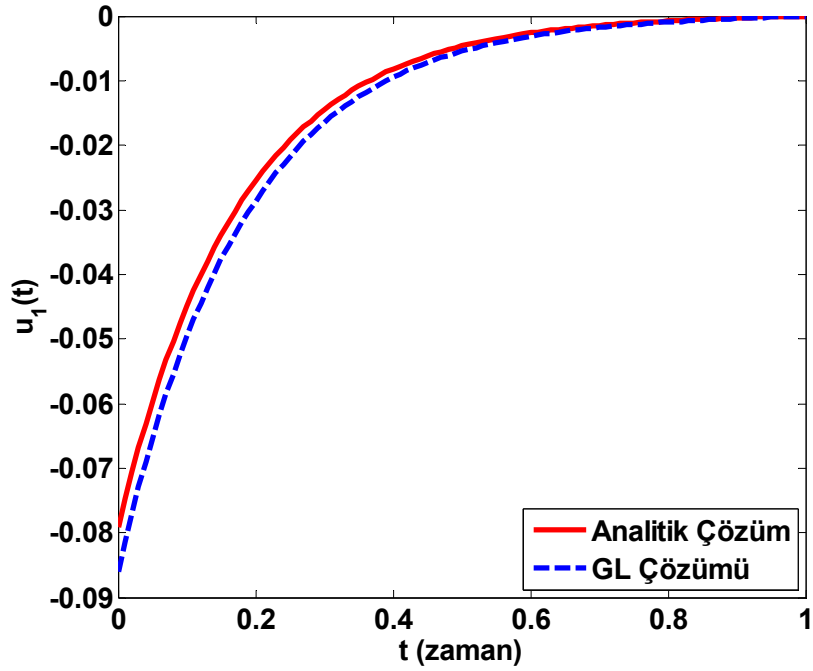
Yine Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'da uzay kesirli türevin mertebesi β 'nın $\beta \rightarrow 2$ limit durumunda sistemin durum ve kontrolü üzerindeki etkisini görmek amaçlanmıştır. Bunu yaparken $\alpha = 1$ ve $N = 100$ değerleri kullanılmıştır. Burada $\beta \rightarrow 1$ limit durumunda Riesz ya da buna denk olan kesirli Laplace operatörünün tanımsızlığını tekrar belirtmek gerekir öyle ki bu durum için benzer analizi yapmak anlamlı değildir.

Sistemin $x(y, t)$ durum ve $u(y, t)$ kontrol fonksiyonlarının sırası ile $x_i(t)$ durum ve $u_i(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının lineer birer toplamı olduğu (4.6) eşitliklerinden bilindiğine göre buradaki terim sayılarının serilere katkısı önemlidir. Çünkü gerçekte sonsuz toplam ile ifade edilen durum ve kontrol fonksiyonları için serilerdeki terim sayılarının ve terimlerin serilere olan katkılarının ters orantılı olması beklenmektedir. Böylece az sayıda terim kullanılarak durum ve kontrol fonksiyonları hesaplanabilecektir. Bu amaçla Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de $i = 1, 2, \dots, 5$ olacak biçimde 5 terimin sistemin durum ve kontrolüne olan katkısı incelenmiştir. Burada $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.5$ keyfi parametreleri kullanılmıştır. Şekillerde de görüldüğü gibi $i > 5$ olması durumunda $x_i(t)$ durum ve $u_i(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının sistemin durum ve kontrol cevabına olan katkısı gittikçe azalacaktır. Bu ise az sayıda terim kullanılarak sistemin cevabına iyi derecede yaklaşma imkânı sunar. Bu durum algoritmanın tekrarlama sayısını azaltarak nümerik hesaplamalarda zamandan tasarruf sağlar.

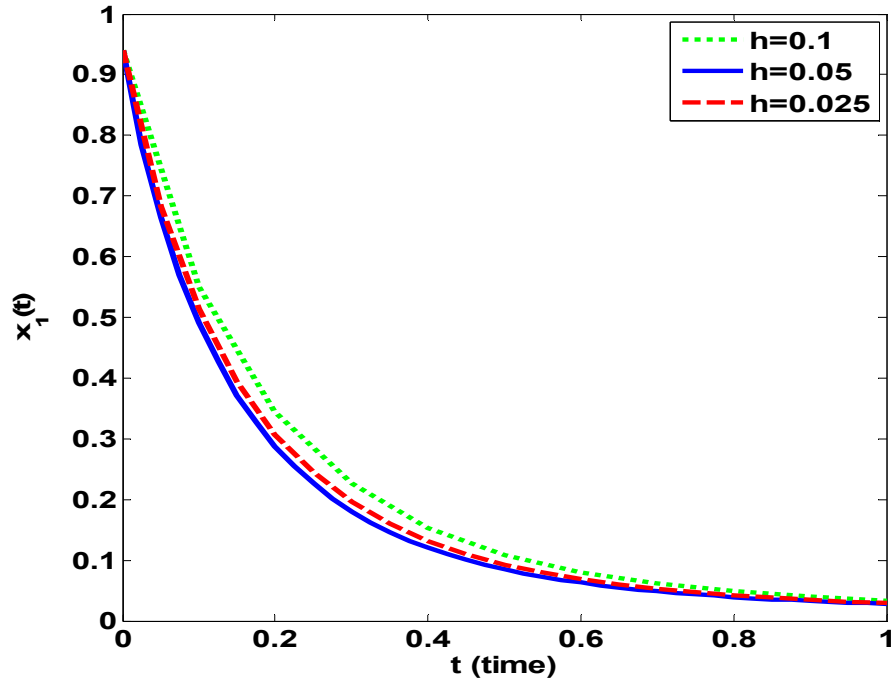
Son olarak sistemin optimal kontrolünün ve buna karşılık durumunun gösterdiği davranış Şekil 4.13 ve Şekil 4.14'te üç boyutta gösterilmiştir. Bu yapılırken Şekil 4.13'te $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ ve $N = 100$ keyfi parametreleri kullanılmıştır. Şekil 4.14'te ise $\alpha = 0.99$, $\beta = 1.9$ ve $N = 100$ parametreleri tercih edilmiştir. Bu seçimler, özel fiziksel bir sistem üzerinde çalışılması halinde sistemin yapısına göre elbette değişiklik gösterebilir.



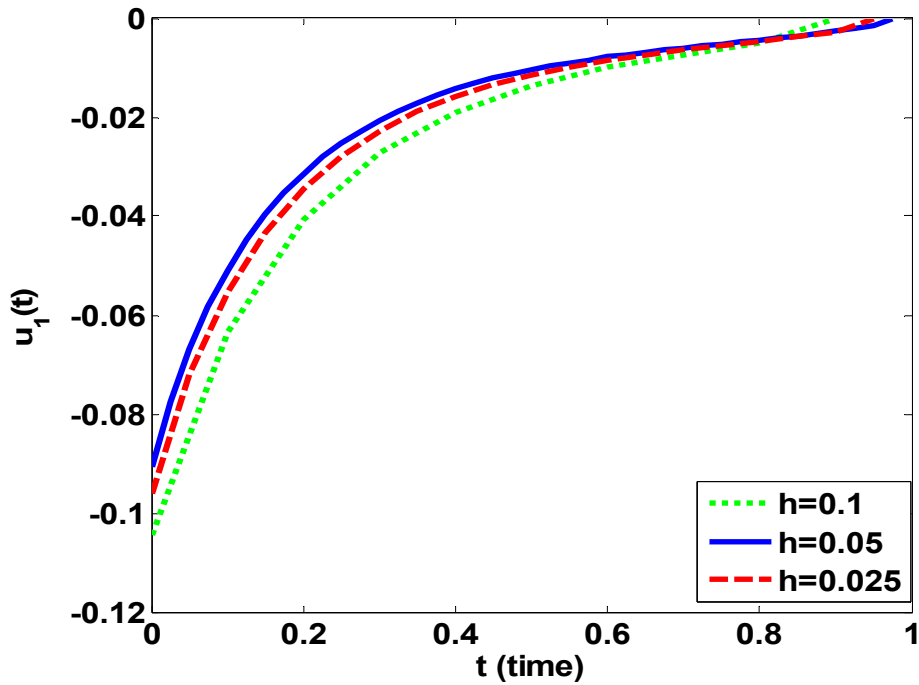
Şekil 4.1: Sistemin $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $\alpha = 1$, $\beta=1.5$ ve $N = 100$.



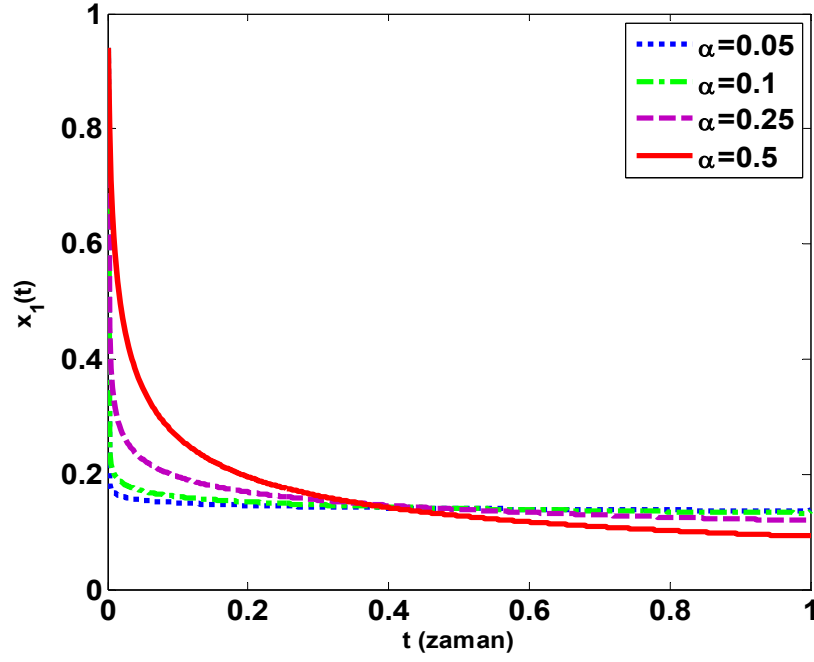
Şekil 4.2: Sistemin $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $\alpha = 1$, $\beta=1.5$ ve $N = 100$.



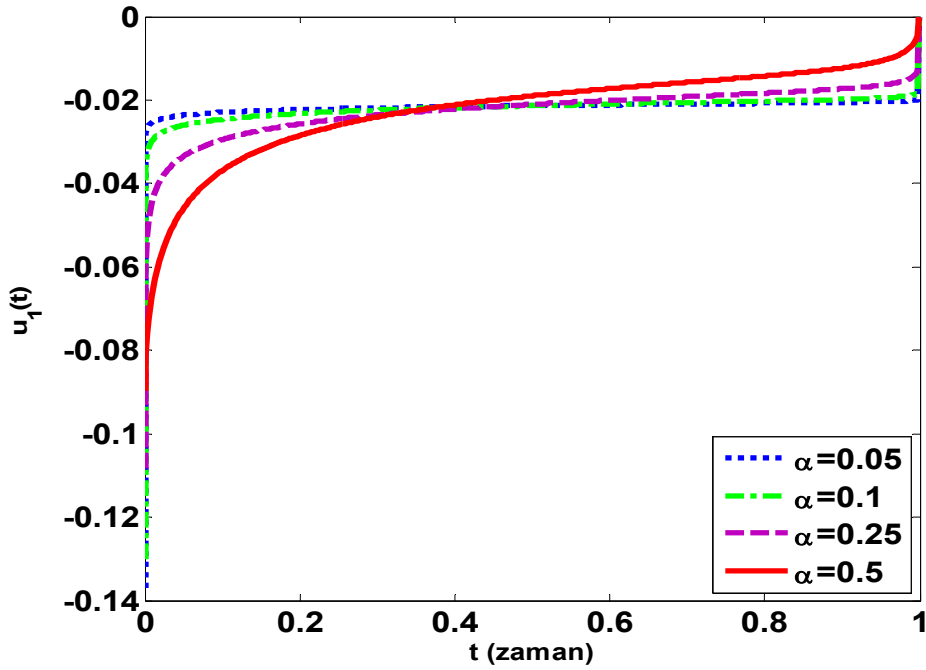
Şekil 4.3: GL nümerik yaklaşımındaki adım uzunluğunun sistemin $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun cevabına etkisi: $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.5$.



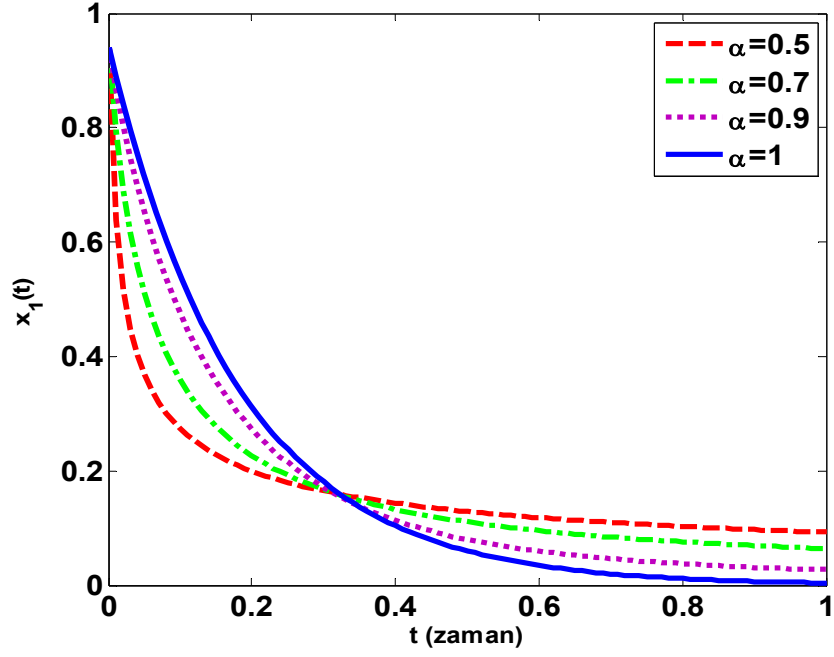
Şekil 4.4: GL nümerik yaklaşımındaki adım uzunluğunun sistemin $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun cevabına etkisi: $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.5$.



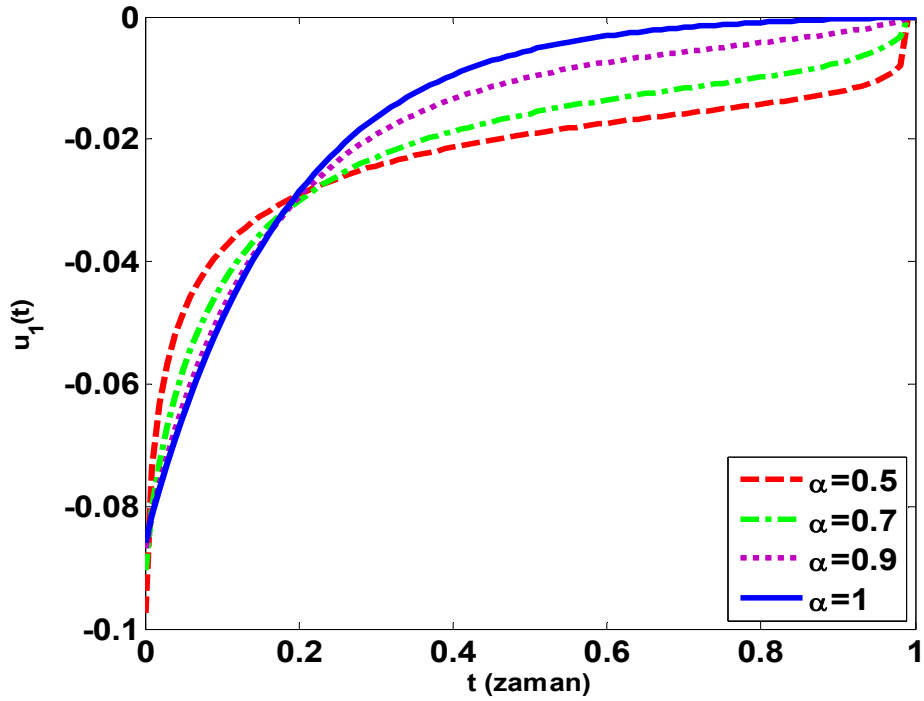
Şekil 4.5: $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonun nümerik çözümünün düşük α değerlerine göre davranışı: $\beta = 1.5$, $N = 500$.



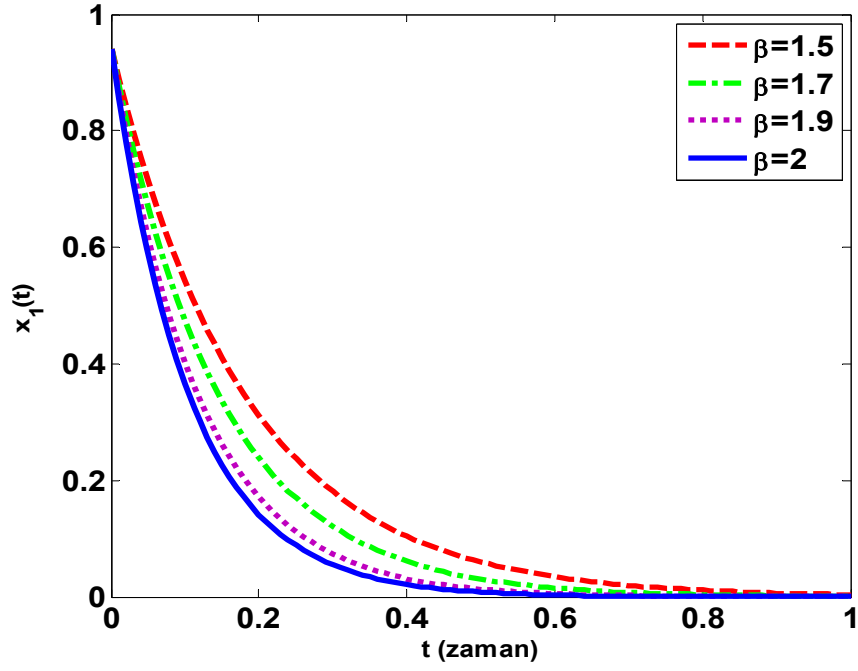
Şekil 4.6: $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonun nümerik çözümünün düşük α değerlerine göre davranışı: $\beta = 1.5$, $N = 500$.



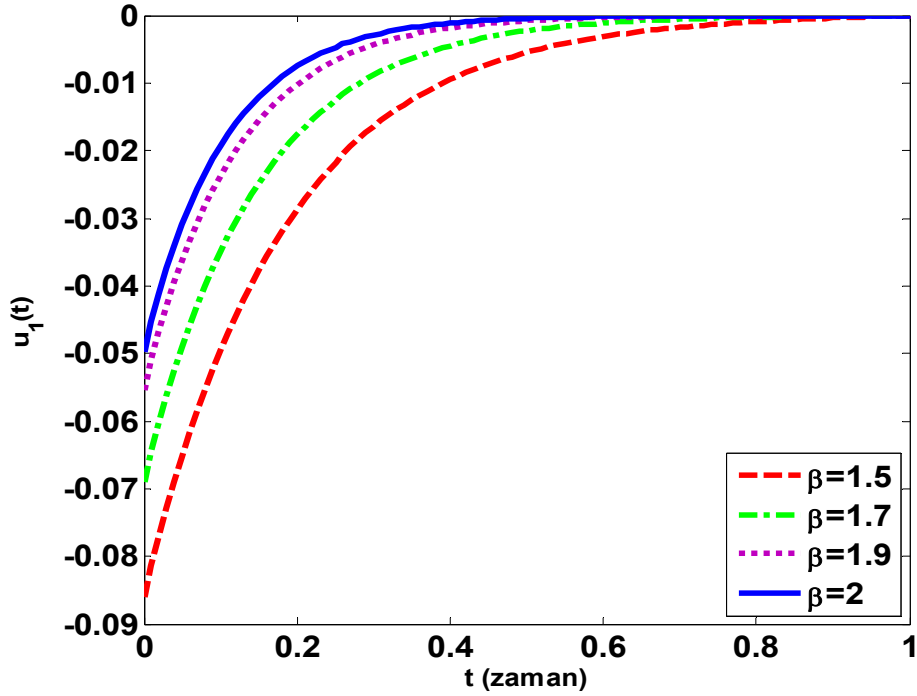
Şekil 4.7: $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun nümerik çözümünün yüksek α değerlerine göre davranışı: $\beta = 1.5$, $N = 100$.



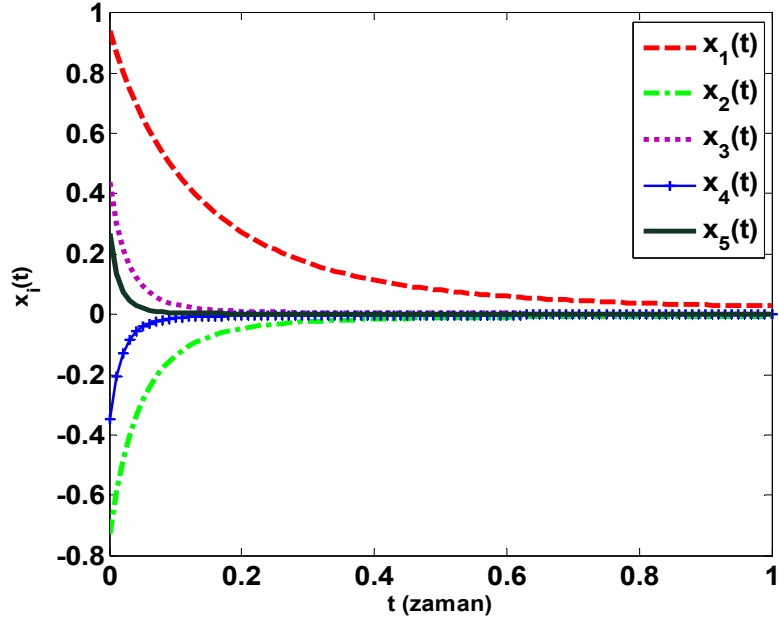
Şekil 4.8: $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun nümerik çözümünün yüksek α değerlerine göre davranışı: $\beta = 1.5$, $N = 100$.



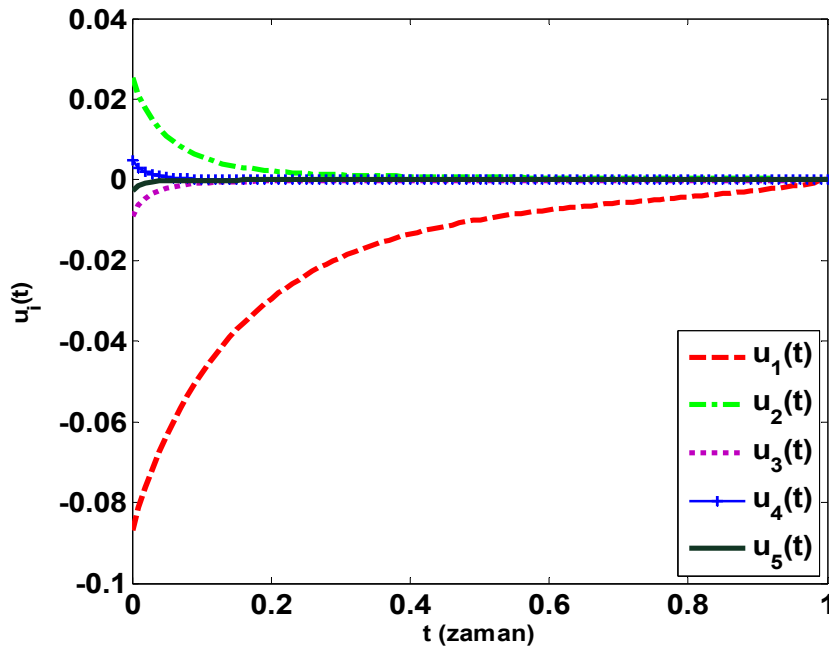
Şekil 4.9: $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun nümerik çözümünün yüksek β değerlerine göre davranışı: $\alpha = 1$, $N = 100$.



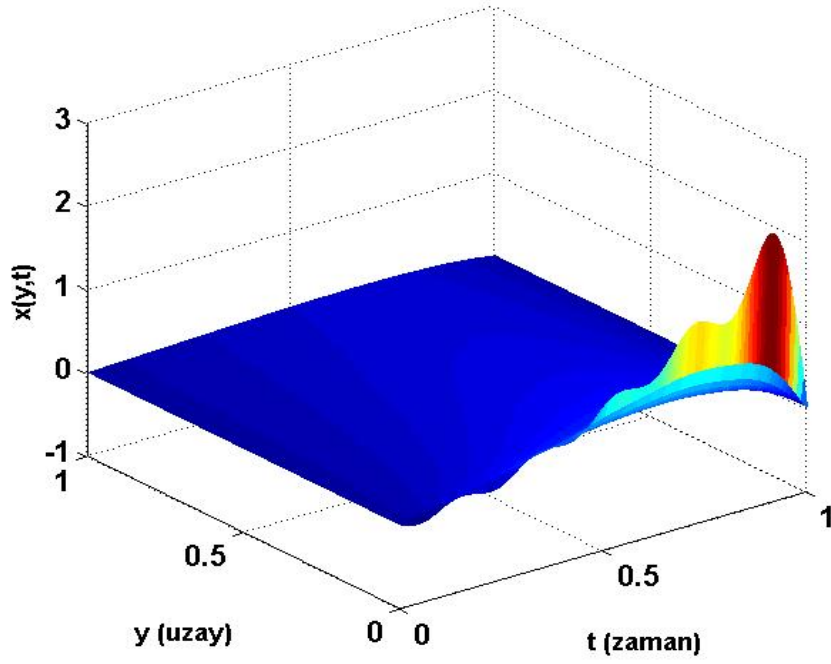
Şekil 4.10: $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun nümerik çözümünün yüksek β değerlerine göre davranışı: $\alpha = 1$, $N = 100$.



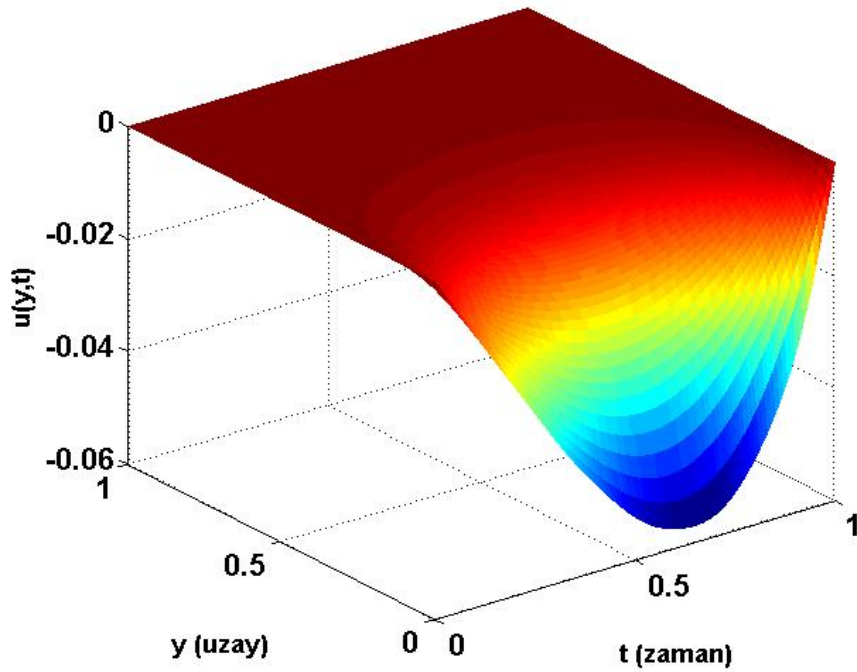
Şekil 4.11: Sistemin $x(y,t)$ durum fonksiyonuna $x_i(t)$ durum bileşen fonksiyonlarının katkısı: $\alpha = 0.9$, $\beta=1.5$.



Şekil 4.12: Sistemin $u(y,t)$ kontrol fonksiyonuna $u_i(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının katkısı: $\alpha = 0.9$, $\beta=1.5$.



Şekil 4.13: $x(y,t)$ durum fonksiyonunun yüzeyi: $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$, $N = 100$.



Şekil 4.14: $u(y,t)$ optimal kontrol fonksiyonunun yüzeyi:
 $\alpha = 0.99$, $\beta = 1.9$, $N = 100$.

5. BİR UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMİNİN KUTUPSAL KOORDİNATLARDA OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, bir önceki bölümde Kartezyen koordinatlarda incelenmiş olan KOKP'nin kutupsal koordinatlardaki davranışı, sistemin davranışının açılı değişkeninden bağımsız olması durumu göz önüne alınarak yani radyal simetrik durum için ele alınmıştır [87]. O halde dinamik sistem kutupsal koordinatlarda ve radyal simetrik durumda tanımlanan bir uzay-zaman kesirli difüzyon süreci

$${}_0^C D_t^\alpha x(r, t) = -\kappa_\beta (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} x(r, t) + u(r, t), \quad (5.1)$$

başlangıç ve sınır koşulları

$$x(r, 0) = x_0(r), \quad (0 < r < a), \quad (5.2)$$

$$x(a, t) = 0, \quad (t > 0), \quad (5.3)$$

olmak üzere

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^a [Ax^2(r, t) + Bu^2(r, t)] r dr dt, \quad (5.4)$$

performans indeksini minimize eden optimal kontrolün bulunması problemi incelenmektedir. Burada kesirli Laplace operatörü kutupsal koordinatlarda radyal simetrik durumda

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} x(r, t) = \left(-\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial r} \right)^{\frac{\beta}{2}} x(r, t), \quad (5.5)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Ayrıca $\kappa_\beta > 0$ anormal difüzyon katsayısını, $0 < \alpha \leq 1$ ve $1 < \beta \leq 2$ sırası ile zaman ve uzay kesirli türevlerin mertebesini, ${}_0^C D_t^\alpha$ Caputo kesirli türevini ve $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ kesirli Laplace operatörünü göstermektedir.

İlk olarak kesirli Laplace operatörünün öz fonksiyonlar ile (3.22) gösterimindeki gibi ifade edilebilmesi için

$$-\Delta R(r) = \mu^2 R(r) \quad (5.6)$$

Helmholtz denkleminin

$$R(a) = 0, \quad (5.7)$$

homojen sınır koşulu altındaki çözümü olan

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{a}r\right), \quad (5.8)$$

Bessel fonksiyonu göz önüne alınır [88]. Burada $\mu_n = \frac{\alpha_n}{a}$ ve α_n 'ler J_0 Bessel fonksiyonlarının pozitif sıfırlarıdır [89]. Buradaki p reel dereceli birinci tip Bessel fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır [90]:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \quad (5.9)$$

Böylece sistemin durum ve kontrol fonksiyonları için

$$x(r, t) = \sum_{n=1}^m x_n(t) J_0(\mu_n r), \quad (5.10)$$

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^m u_n(t) J_0(\mu_n r), \quad (5.11)$$

varsayımı yapılabilir. Dikkat edilirse (5.10) durum fonksiyon serisi (5.7) sınır koşulunu sağlamaktadır ve bu serilerin üst limiti olan m değerinin gerçekte $m \rightarrow \infty$ olduğu belirtilmelidir. Ayrıca Bessel fonksiyonlarının ortogonal birer aile oluşturdukları da göz önünde bulundurulmalıdır öyle ki bu özellik radyal değişkenli (r) kesirli Laplace operatörünün (3.22) gösterimi için gereklidir.

J_0 Bessel fonksiyonu için ortogonallik koşulu $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\int_0^a r J_0(\mu_n r) J_0(\mu_m r) dr = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n) & n = m \end{cases} \quad (5.12)$$

biçimindedir [88]. Aynı zamanda J_0 fonksiyonlarının ortonormalleştirilmesi için

$$\langle J_0, J_0 \rangle = \|J_0\|^2 = \int_0^a r J_0^2(\mu_n r) dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n), \quad (n=1,2,\dots) \quad (5.13)$$

olduğu dikkate alınırsa J_0 'ın ortonormalleştirilmiş formu

$$\frac{J_0(\mu_n r)}{\|J_0\|} \quad (5.14)$$

olarak ifade edilir. O halde

$$\frac{\sqrt{2}}{a J_1(\alpha_n)} J_0(\mu_n r) \quad (5.15)$$

ortonormal öz fonksiyonları kullanılarak sistemin (5.10) ve (5.11)'deki $x(r,t)$ durum ve $u(r,t)$ kontrol fonksiyonları yeniden

$$x(r,t) = \sum_{n=1}^m x_n(t) \frac{\sqrt{2}}{a J_1(\alpha_n)} J_0(\mu_n r), \quad (5.16)$$

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^m u_n(t) \frac{\sqrt{2}}{a J_1(\alpha_n)} J_0(\mu_n r), \quad (5.17)$$

biçiminde ifade edilebilir. Önceki gösterimlerine benzer şekilde (5.16) serisi (5.3) sınır koşulunu da sağlamaktadır. Ayrıca (5.16) serisi göz önüne alınırsa (3.22) gösterimine sahip olan kesirli Laplace operatörü aşağıdaki biçimdedir:

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} x(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) (\mu_n)^{\beta} \frac{\sqrt{2}}{a J_1(\alpha_n)} J_0(\mu_n r). \quad (5.18)$$

Tüm bunlardan hareketle ilk olarak (3.45)-(3.47) optimallik koşullarının belirlenmesinde gerekli olan F ve G fonksiyonları hesaplanmalıdır. Bu nedenle (5.16) ve (5.17) serileri (5.4)'te yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$F_n(x, u, t) = \frac{1}{2} [Ax_n^2(t) + Bu_n^2(t)], \quad (5.19)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.16)-(5.18) serileri (5.1) denkleminde yazılır ve düzenlemeler yapılırsa

$$G_n(x, u, t) = -\kappa_\beta (\mu_n)^\beta x_n(t) + u_n(t), (n = 1, 2, \dots) \quad (5.20)$$

olarak hesaplanır. O halde (5.19) ve (5.20) fonksiyonları kullanılarak elde edilen gerekli optimallik koşulları aşağıdaki gibidir:

$${}^c D_t^\alpha x_n(t) = -\kappa_\beta (\mu_n)^\beta x_n(t) + u_n(t), \quad (5.21)$$

$${}^c D_1^\alpha \lambda_n(t) = Ax_n(t) - \kappa_\beta (\mu_n)^\beta \lambda_n(t), \quad (5.22)$$

$$Bu_n(t) + \lambda_n(t) = 0. \quad (5.23)$$

Burada (5.22) ve (5.23) eşitlikleri düzenlenirse

$${}^c D_1^\alpha u_n(t) = -\frac{A}{B} x_n(t) - \kappa_\beta (\mu_n)^\beta u_n(t), \quad (5.24)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $x_n(t)$ durum ve $u_n(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarına göre oluşturulan kesirli denklem sistemi

$${}^c D_t^\alpha x_n(t) = -\kappa_\beta (\mu_n)^\beta x_n(t) + u_n(t), \quad (5.25)$$

$${}^c D_1^\alpha u_n(t) = -\frac{A}{B} x_n(t) - \kappa_\beta (\mu_n)^\beta u_n(t), \quad (5.26)$$

dir. (5.25)-(5.26) kesirli denklem sisteminin çözülmesi ile sistemin $x(r, t)$ durumu ve $u(r, t)$ kontrolü belirlenmiş olacaktır. Bu amaçla denklem sisteminin analitik ve nümerik çözümleri incelenmiştir.

5.1 Analitik Çözüm

$\alpha = 1$ olması durumunda (5.25)-(5.26) kesirli türevli denklem sistemi

$$\frac{d}{dt}x_n(t) = -\kappa_\beta(\mu_n)^\beta x_n(t) + u_n(t), \quad (5.27)$$

$$\frac{d}{dt}u_n(t) = \frac{A}{B}x_n(t) + \kappa_\beta(\mu_n)^\beta u_n(t), \quad (5.28)$$

sistemine dönüşür. Bu denklem sisteminin çözümü

$$x_n(t) = c_1 \exp(-p(n)t) + c_2 \exp(p(n)t), \quad (5.29)$$

$$u_n(t) = c_1(q(n) - p(n)) \exp(-p(n)t) + c_2(q(n) + p(n)) \exp(p(n)t) \quad (5.30)$$

olarak elde edilir. Buradaki kısaltmalar ve katsayılar

$$q(n) = (\mu_n)^\beta, \quad (5.31)$$

$$p(n) = \sqrt{q(n)^2 + 1}, \quad (5.32)$$

$$c_1 = \frac{(p(n) - q(n))}{\{(p(n) - q(n)) + (q(n) + p(n)) \exp(2p(n))\}} x_n(0), \quad (5.33)$$

$$c_2 = \frac{(p(n) + q(n)) \exp 2p(n)}{\{(p(n) - q(n)) + (q(n) + p(n)) \exp(2p(n))\}} x_n(0), \quad (5.34)$$

şeklindedir. Durum ve kontrol bileşen fonksiyonlarının başlangıç ve son değerleri

$$x_n(0) = x_{n0}, \quad u_n(1) = 0 \quad (5.35)$$

olmakla birlikte durum bileşen fonksiyonunun başlangıç koşulu $x_n(0)$ sistemin (5.2) ile verilen başlangıç koşulunun seçimine bağlı olarak belirlenir. O halde her $n \in \mathbb{Z}^+$ değerine karşılık başlangıç koşulu değişeceğinden sistemin durum ve kontrolünün cevabı da beklendiği üzere farklılık gösterecektir. Ancak $x_n(0)$ başlangıç koşulu belirlenirken daha önce belirlenen öz fonksiyonlarının ortogonallik özelliklerinin

dikkate alındığı unutulmamalıdır. Diğer bir deyişle $x_n(0)$ başlangıç koşulunun belirlenmesi için (5.16) ile verilen durum fonksiyonu (5.2)'de yazılır ve J_0 için (5.12) ortogonallik şartı dikkate alınır

$$x_n(0) = \frac{\sqrt{2}}{aJ_1(\alpha_n)} \int_0^a x_0(r) J_0(\mu_n r) r dr \quad (5.36)$$

elde edilir. İşte burada $x(r,0) = x_0(r)$ 'nin seçimi keyfidir ancak yine de hesaplamalardaki sadelik açısından Bessel fonksiyonunun ortogonallik özelliği göz önüne alınarak bir seçim yapılır. Örneğin, bu kısımdaki analitik çözümler ve bir sonraki kısımda bahsedilecek olan nümerik çözümler için

$$x_0(r) = J_1(\mu_n r), \quad (0 < a < r) \quad (5.37)$$

başlangıç koşulu seçilmiştir.

5.2 Nümerik Çözüm

(5.25)-(5.26) kesirli denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde edebilmek için 4.2 Kısımındaki benzer olarak Caputo ve RL kesirli türevleri arasındaki ilişkiyi gösteren (4.27)-(4.28) eşitlikleri ve RL türevinin GL yaklaşımına karşılık gelen (4.29)-(4.30) yaklaşık hesapları kullanılır. Böylece (5.25)-(5.26) denklem sisteminin nümerik çözümleri

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^M w_j^\alpha x_n(Mh - jh) - x_n(0) \frac{[Mh]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \kappa_\beta (\mu_n)^\beta x_n(Mh) = u_n(Mh) \quad (5.38)$$

$$(M = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, m),$$

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-M} w_j^\alpha u_n(Mh + jh) - u_n(Nh) \frac{[(N-M)h]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \kappa_\beta (\mu_n)^\beta u_n(Mh)$$

$$= -\frac{A}{B} x_n(Mh) \quad (5.39)$$

$$(M = N-1, N-2, \dots, 0, \quad n = 1, 2, \dots, m)$$

olarak bulunur. Buradaki h, M, N notasyonları ve w_j^α katsayıları 4.2 Kısımında verilmiştir. 5.1 Kısımında da belirtildiği gibi nümerik algoritmada uygulanan başlangıç koşulu (5.36)'dır.

Bu kısımda da ilk olarak analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırılması ele alınmıştır. Bu amaçla sistemin $x_1(t)$ durum ve $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının davranışları incelemiştir. Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'de uzay kesirli türevinin mertebesi β 'nin sabit olması durumunda zaman kesirli türevindeki değişimin sistemin durumu ve kontrolü üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Aynı zamanda α ve β parametrelerinin her ikisinin de tamsayı olması durumu için analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırması yapılmıştır. Burada GL yaklaşımındaki alt aralık sayısı (bölüntü sayısı) $N = \frac{1}{h} = 100$ alınmıştır.

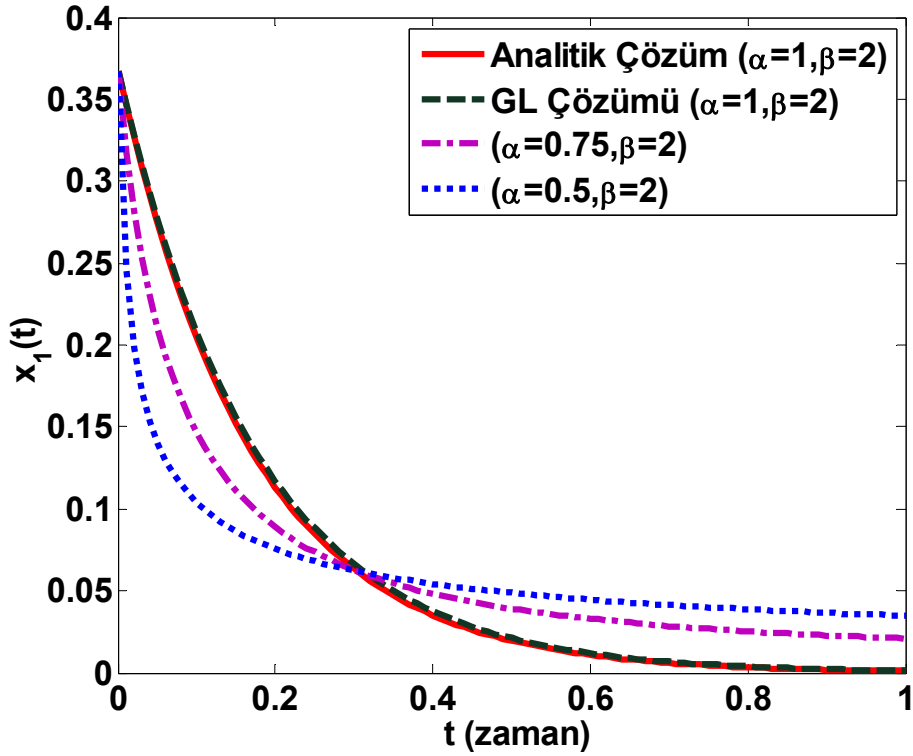
Benzer analiz Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te zaman kesirli türevinin mertebesinin $\alpha = 1$ tamsayı olması durumu karşısında uzay türev mertebesi β 'nin değişimi için yapılmıştır. Yine analitik ve nümerik çözümlerin karşılaştırması da gösterilmiştir. Buraya kadar bahsedilen dört şekilde uzay ve zaman kesirli türevlerinin mertebelerindeki değişimin sistemin durumu ve kontrolü üzerindeki etkisinin hem sayısal değerler hem de fiziksel davranış anlamında farklılaştığı gözlenmiştir.

GL nümerik yaklaşımındaki alt aralık sayısı N 'nin değişiminin sistemin hem durum hem de kontrol davranışlarının düzgünlüğüne etkisi önemlidir. Fark yaklaşımları temeline dayanan pek çok nümerik yöntemde olduğu gibi GL yaklaşımında da N 'nin artması durumunda sistem davranışlarının giderek düzgünleşmesi beklenir. Ancak belli bir N değerinden sonra düzgünlükteki değişim ihmal edilebilir ölçüde azalmaktadır. Bu değerlendirme Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da vurgulanmıştır. Bu incelemede $N = 30$ değerinden sonraki değerler için sistemin durum ve kontrolündeki düzgünlük değişiminin önemsenmeyecek ölçüde azaldığı görülmüştür ve hatta elde edilen sonuçlar örtüşmüştür. O halde $N = 30$ değeri bölüntü sayısı için kabul edilebilir bir değer olarak tespit edilmiştir.

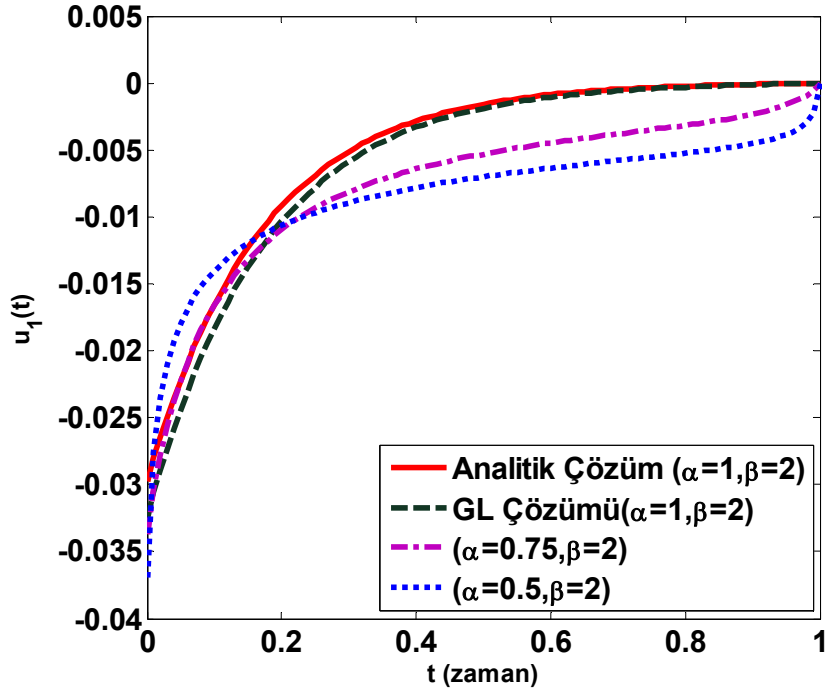
Dikkat edilirse 4.2 Kısımında olduğu gibi bu kısımda da sistem parametrelerinin değişimi $x_1(t)$ ve $u_1(t)$ bileşen fonksiyonları için Şekil 5.7

ve Şekil 5.8’de incelenmiştir. Çünkü bu şekillerde, bileşen fonksiyonlarının sayısının sistemin durum ve kontrolüne olan katkısı gösterilmiştir. $i > 5$ olmak üzere $x_i(t)$ ve $u_i(t)$ ’lerin değeri giderek sıfıra yaklaşmaktadır. Bu yüzden matematiksel olarak ilk bileşenler için parametre değişimlerini incelemek yerindedir.

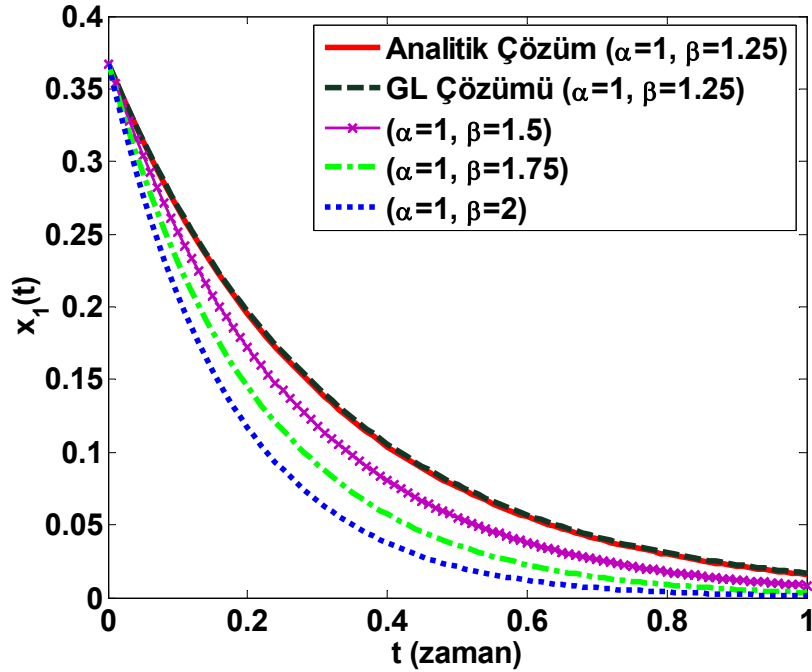
Son olarak sistemin $x(r,t)$ durum ve $u(r,t)$ kontrol fonksiyon yüzeyleri Şekil 5.9 ve Şekil 5.10’da gösterilmiştir. Bu şekillerde α ve β parametrelerin her ikisinin de kesirli olması durumu incelenmiştir. Ayrıca seçilen başlangıç koşulunun da sistemin davranışları üzerindeki etkisini bu üç boyutlu şekillerde görmek mümkündür.



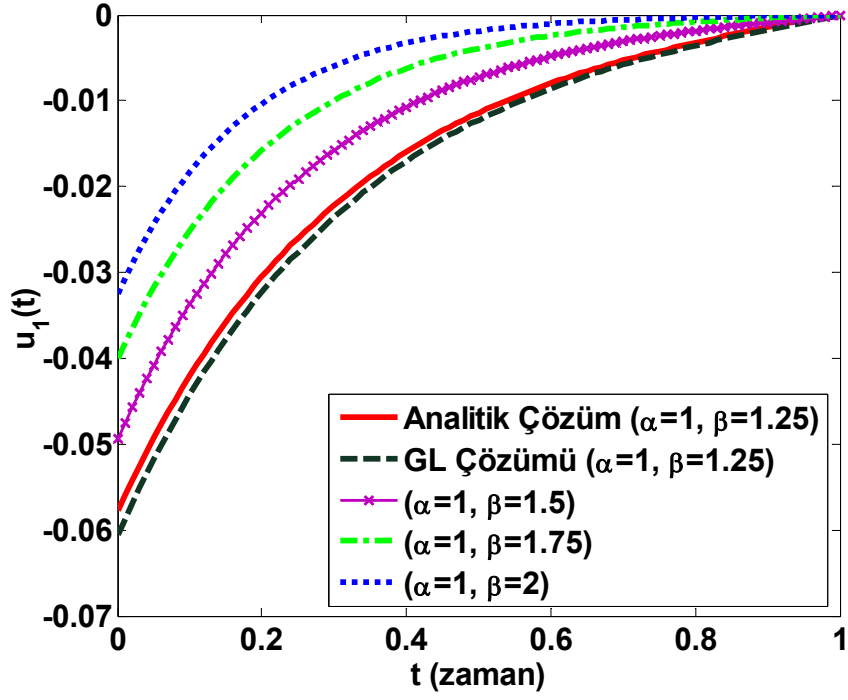
Şekil 5.1: $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun α parametresinin değişimine bağlı olarak analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $N = 100$.



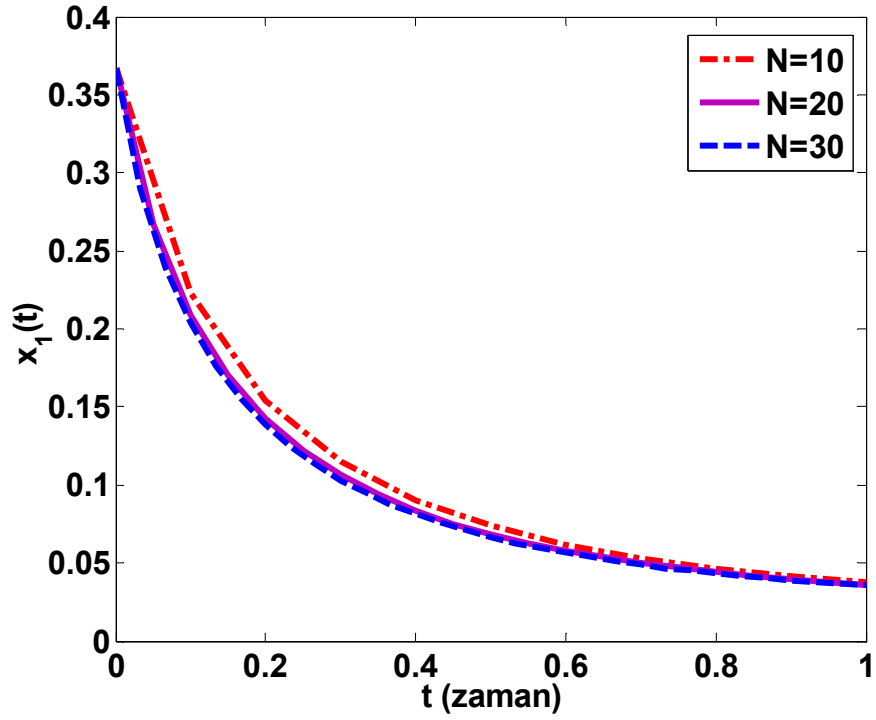
Şekil 5.2: $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun α parametresinin değişimine bağlı olarak analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $N = 100$.



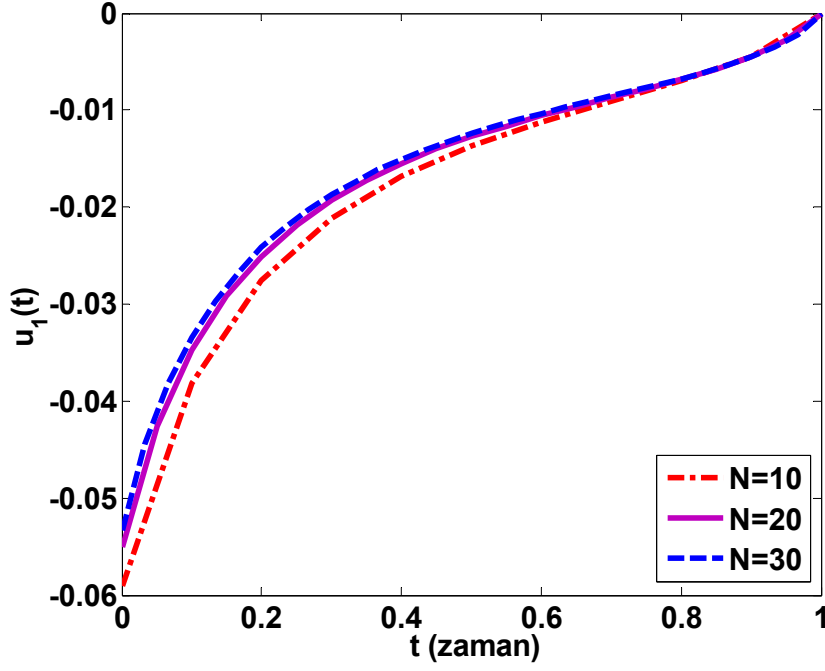
Şekil 5.3: $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun β parametresinin değişimine bağlı olarak analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $N = 100$.



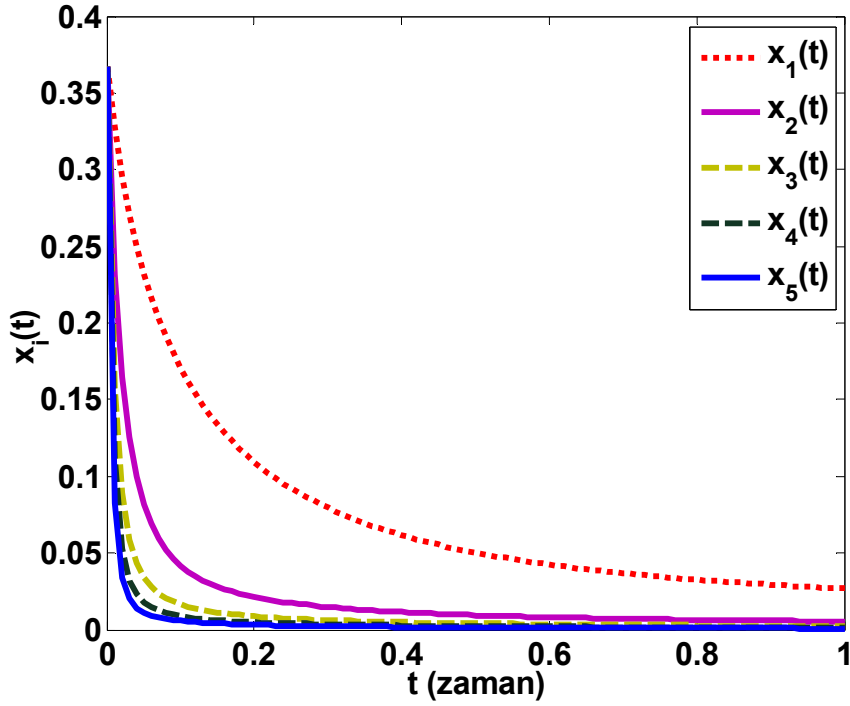
Şekil 5.4: $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun β parametresinin değişimine bağlı olarak analitik ve nümerik çözümlerinin karşılaştırması: $N = 100$.



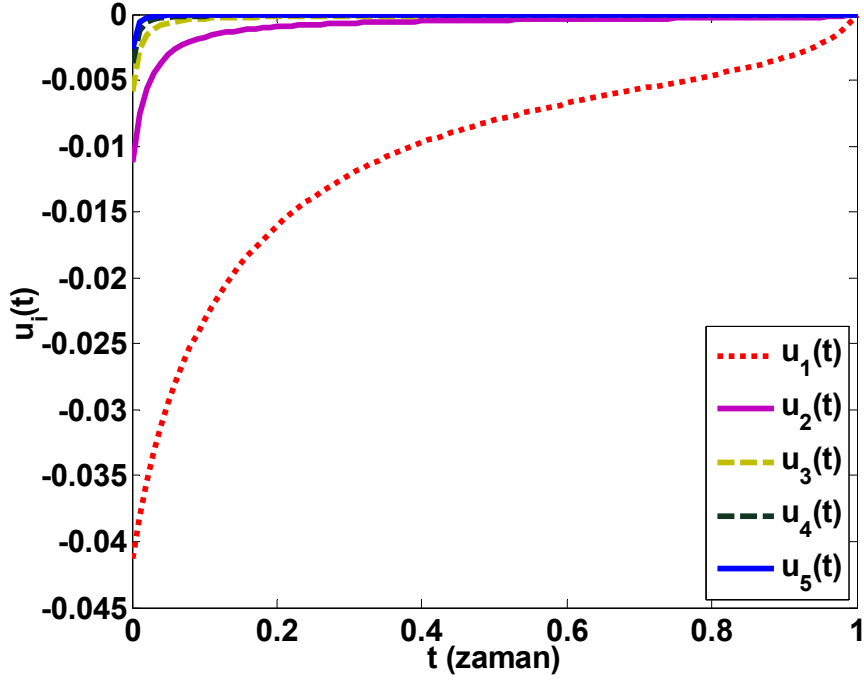
Şekil 5.5: GL yaklaşımındaki N adım sayısının değişimine göre $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonunun davranışı: $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.5$.



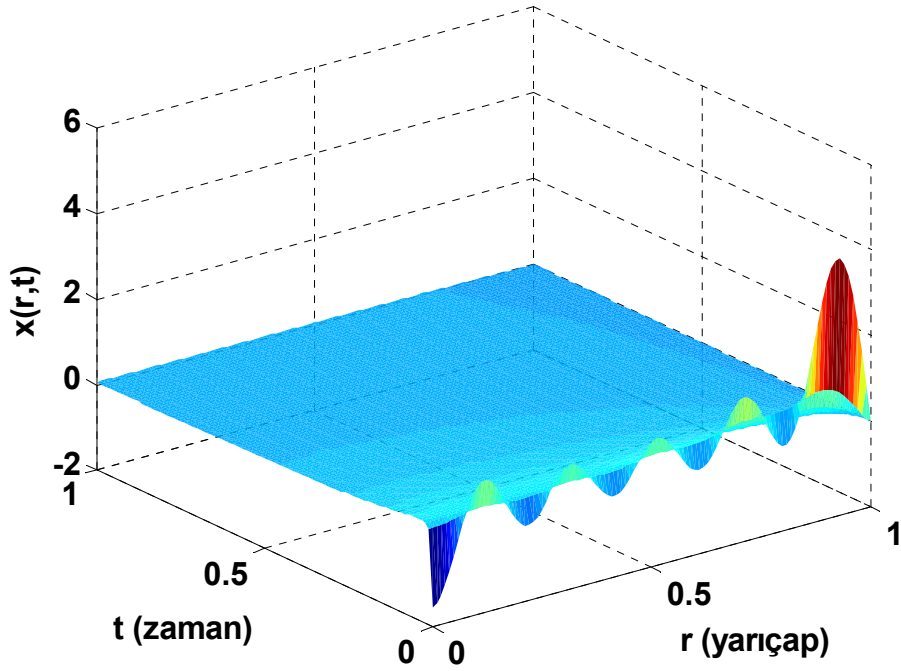
Şekil 5.6: GL yaklaşımındaki N adım sayısının değişimine göre $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun davranışı: $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.5$.



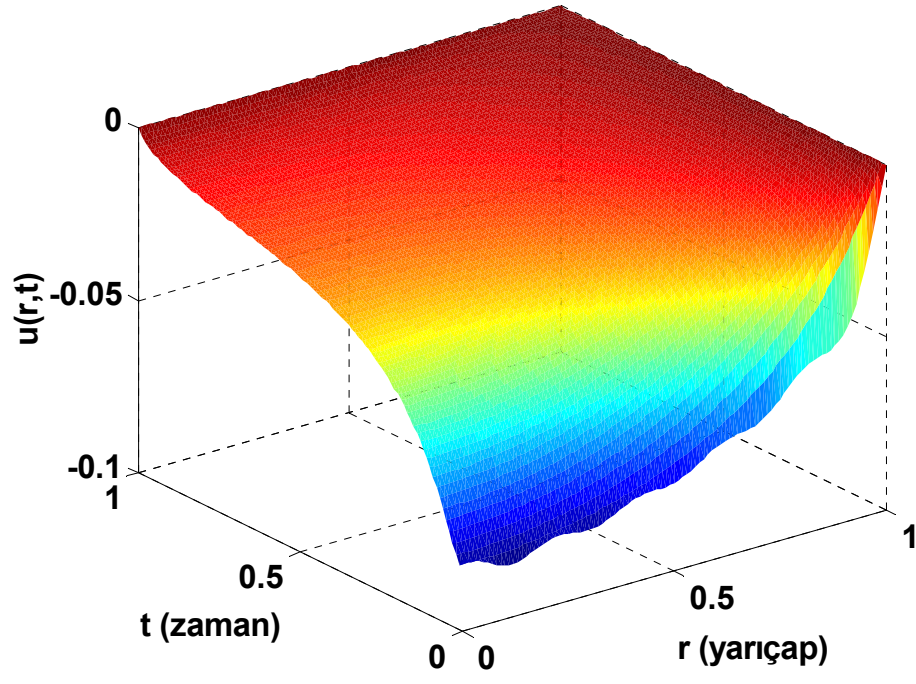
Şekil 5.7: Sistemin $x(r,t)$ durum fonksiyonuna $x_i(t)$ durum bileşen fonksiyonlarının katkısı: $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.75$.



Şekil 5.8: Sistemin $u(r,t)$ kontrol fonksiyonuna $u_i(t)$ kontrol bileşen fonksiyonlarının katkısı: $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.75$.



Şekil 5.9: Sistemin $x(r,t)$ durumunun yüzeyi: $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.75$, $N = 100$.



Şekil 5.10: Sistemin $u(r,t)$ kontrolünün yüzeyi: $\alpha = 0.75$, $\beta = 1.75$, $N = 100$.

6. BİR UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFÜZYON SİSTEMİNİN KÜRESEL KOORDİNATLARDA OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Tezin bu bölümünde 5. Bölümde kutupsal koordinatlarda radyal simetrik durumda formülize edilen problem bir üst boyuta taşınarak küresel koordinatlarda ele alınmıştır. Küresel koordinatlarda da radyal simetrik durum söz konusudur. Ancak koordinat sisteminde $\varphi(0 < \varphi \leq 2\pi)$ ve $\theta(0 < \theta \leq \pi)$ gibi iki açı değişkeni olduğundan radyal simetri durumu da yarı ve tam radyal simetri olmak üzere iki alt kısımda analiz edilmiştir.

6.1 Yarı Radyal Simetrik Durum

Bu kısımda sistemin davranışının φ açı değişkeninden bağımsız olduğu düşünülür. O halde sistem dinamikleri

$${}_0^C D_t^\alpha x(r, \theta, t) = -\kappa_\beta (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} x(r, \theta, t) + u(r, \theta, t) \quad (6.1)$$

uzay-zaman kesirli difüzyon denklemi ile tanımlanan, başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$x(r, \theta, 0) = x_0(r, \theta) \quad (0 < r \leq a, \quad 0 < \theta \leq \pi), \quad (6.2)$$

$$x(a, \theta, t) = x(0, \theta, t) = 0 \quad (6.3)$$

olan anormal difüzyon sisteminin

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^a [Ax^2(r, \theta, t) + Bu^2(r, \theta, t)] r^2 \sin \theta dr d\theta dt \quad (6.4)$$

performans indeksini minimize eden optimal $u(r, \theta, t)$ kontrolünün belirlenmesi problemi ele alınmaktadır. 4. ve 5. Bölümlerde olduğu gibi $\kappa_\beta > 0$ anormal difüzyon

katsayısını, A ve B pozitif keyfi sabitleri, ${}_0^C D_t^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) Caputo kesirli türevini ve $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ ($1 < \beta \leq 2$) kesirli Laplace operatörünü, $x(r, \theta, t)$ ve $u(r, \theta, t)$ sırasıyla sistemin durum ve kontrol fonksiyonlarını ifade eder.

Çözüm aşamasının ilkinin oluşturduğu kesirli Laplace operatörünün öz fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilmesi için

$$-\Delta x(r, \theta) = \psi^2 x(r, \theta), \quad 0 < r < a, \quad (6.5)$$

$$0 < \theta < \pi$$

Helmholtz denklemi ve

$$x(a, \theta) = 0 \quad (6.6)$$

sınır koşulu göz önüne alınmıştır. Problemden yarı radyal simetrik Laplace operatörü ile kastedilen

$$\Delta x(r, \theta) = \nabla^2 x(r, \theta) = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \quad (6.7)$$

dir. $x(r, \theta) = R(r)Y(\theta)$ varsayımı altında değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak elde edilen, (6.5) denkleminin öz fonksiyonlarının ilki

$$R_{n,m}(r) = j_n(\psi_{n,m} r); \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

biçimindedir. Burada özdeğerler

$$\psi_{n,m} = \frac{\mu_{n+\frac{1}{2},m}}{a} \quad (6.9)$$

ve $\mu_{n+\frac{1}{2},m}$ 'ler $J_{n+\frac{1}{2}}$ Bessel fonksiyonunun m . pozitif kökleridir öyle ki küresel Bessel fonksiyonları olarak adlandırılan $j_n(r)$ 'ler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$j_n(r) = \left(\frac{\pi}{2r} \right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(r). \quad (6.10)$$

Öz fonksiyonların ikincisi ise P_n , n . dereceden Legendre polinomları olmak üzere

$$Y(\theta) = P_n(\cos \theta) \quad (6.11)$$

olarak bulunur.

n . dereceden bir Legendre polinomu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (6.12)$$

öyle ki

$$M = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift} \\ \frac{(n-1)}{2}, & n \text{ tek.} \end{cases} \quad (6.13)$$

(6.12) polinomuna alternatif olarak Legendre polinomlarını üretmek amacı ile *Rodrigues formülü* de kullanılır [88]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]. \quad (6.14)$$

O halde $\psi_{n,m}$ özdeğerler olmak üzere (6.5) Helmholtz denklemini sağlayan öz fonksiyonlar aşağıdaki biçimde elde edilmiş olur:

$$x_{n,m}(r, \theta) = j_n(\psi_{n,m} r) P_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.15)$$

Dikkat edilirse hem j_n küresel Bessel fonksiyonlar ailesi hem de P_n Legendre polinomları birer ortogonal aile oluşturmaktadırlar. Legendre polinomları için ortogonalite şartı

$$\int_{-1}^1 P_q(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & q \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & q = n \end{cases} \quad (6.16)$$

ve buradan

$$\|P_n(x)\| = \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{1/2} \quad (6.17)$$

olduğu göz önüne alınarak Legendre polinomlarının ortonormalleştirilmiş formu

$$\frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|} = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n(x) \quad (6.18)$$

olarak elde edilir.

Böylece öz fonksiyonları

$$x_{n,m}(r, \theta) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}j_{n+1}\left(\mu_{n+\frac{1}{2},m}\right)} j_n(\psi_{n,m}r) P_n(\cos \theta) \quad (6.19)$$

biçiminde ortonormalleştirerek hesaplamalarda sadelik oluşturmak mümkün hale gelmiştir. Ayrıca (6.19) öz fonksiyonları

$$x_{n,m}(a, \theta) = 0, \quad (0 < \theta < \pi) \quad (6.20)$$

sınır koşulunu sağlamaktadır. Tüm bunlardan hareketle çözüm aşamalarının ikincisi olan sistemin $x(r, \theta, t)$ durum ve $u(r, \theta, t)$ kontrol fonksiyonların öz fonksiyonlar cinsinden seri gösterimlerinin sırasıyla

$$x(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm}(t) \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}j_{n+1}\left(\mu_{n+\frac{1}{2},m}\right)} j_n(\psi_{n,m}r) P_n(\cos \theta), \quad (6.21)$$

ve

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(t) \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}j_{n+1}\left(\mu_{n+\frac{1}{2},m}\right)} j_n(\psi_{n,m}r) P_n(\cos \theta) \quad (6.22)$$

olduğu varsayımı yapılabilir. Dahası (6.21) durum seri fonksiyonu (6.3)'te verilen sınır koşullarını sağlar. Şimdi (6.1) dinamik sistemindeki kesirli Laplace operatörünü

belirlenen özdeğer ve öz fonksiyonlar türünden ifade edebilmek için (6.21) seri fonksiyonu göz önüne alınırsa 3.1.5 Tanımına göre

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} x(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm}(t) (\psi_{n,m})^{\beta} x_{n,m}(r, \theta) \quad (6.23)$$

elde edilir. Buradaki $x_{n,m}(r, \theta)$ 'ler (6.19)'da belirlenmiştir.

Çözüm aşamalarının üçüncüsü olan gerekli optimallik koşullarının belirlenebilmesinde öncelikle hesaplanması gereken F ve G fonksiyonlarıdır. Bunun için (6.21) ve (6.22) seri fonksiyonları (6.4)'te yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa F fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$F_{nm}(x, u, t) = \frac{1}{2} [Ax_{nm}^2(t) + Bu_{nm}^2(t)]. \quad (6.24)$$

Yine (6.21)-(6.23) sonuçları (6.1) dinamik sisteminde yazılır ve sadeleştirilirse

$$G_{nm}(x, u, t) = -\kappa_{\beta} (\psi_{n,m})^{\beta} x_{nm}(t) + u_{nm}(t) \quad (6.25)$$

olarak elde edilir. Buradan da (3.45)-(3.47) gerekli optimallik koşulları

$${}^C_0 D_t^{\alpha} x_{nm}(t) = -\kappa_{\beta} (\psi_{n,m})^{\beta} x_{nm}(t) + u_{nm}(t), \quad (6.26)$$

$${}^C_t D_1^{\alpha} \lambda_{nm}(t) = Ax_{nm}(t) - \kappa_{\beta} (\psi_{n,m})^{\beta} \lambda_{nm}(t), \quad (6.27)$$

$$Bu_{nm}(t) + \lambda_{nm}(t) = 0 \quad (6.28)$$

biçiminde belirlenir. Burada $x_{nm}(t)$ durum bileşen fonksiyonu için başlangıç ve $u_{nm}(t)$ kontrol bileşen fonksiyonu için son değerleri

$$\begin{aligned} x_{nm}(0) &= x_{nm}(r, \theta), \\ u_{nm}(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

dır. Yine (6.27) ve (6.28) eşitlikleri kendi arasında düzenlenirse

$${}^C_t D_1^{\alpha} u_{nm}(t) = -\frac{A}{B} x_{nm}(t) - (\psi_{n,m})^{\beta} \kappa_{\beta} u_{nm}(t) \quad (6.30)$$

elde edilir. Sonuç olarak sistemin $x(r, \theta, t)$ durum ve $u(r, \theta, t)$ kontrolünü belirleyecek olan, durum ve kontrol bileşen fonksiyonlarına göre analitik ve nümerik olarak çözülmesi planlanan kesirli denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$${}^c D_t^\alpha x_{nm}(t) = -\kappa_\beta (\psi_{n,m})^\beta x_{nm}(t) + u_{nm}(t), \quad (6.31)$$

$${}^c D_t^\alpha u_{nm}(t) = -\frac{A}{B} x_{nm}(t) - \kappa_\beta (\psi_{n,m})^\beta u_{nm}(t). \quad (6.32)$$

İlk olarak (6.31)-(6.32) denklem sisteminin çözümünde gerekli olan $x_{nm}(0)$ değeri belirlenmelidir. Bunun için sistemin durum seri fonksiyonu (6.21) ve başlangıç koşulu (6.2) göz önüne alınır. Bu amaçla sırasıyla

- (6.21)'de $t=0$ alınır;
- eşitliğin her iki tarafı sırası ile $P_n(\cos \theta) \sin \theta$ ile çarpılıp 0'dan π 'ye integral alınır;
- benzer biçimde $j_n(\psi_{n,m} r)$ ile çarpılıp 0'dan a 'ya integral alınır;
- ve P_n ve j_n fonksiyonlarının ortogonallik özellikleri de göz önüne alınarak elde edilen sonuç

$$x_{nm}(0) = \frac{(2n+1)^{1/2}}{a\sqrt{a}j_{n+1}\left(\mu_{n+\frac{1}{2},m}\right)} \int_0^a \int_0^\pi x(r, \theta, 0) P_n(\cos \theta) \sin \theta j_n(\psi_{n,m} r) r^2 d\theta dr \quad (6.33)$$

olacaktır. O halde elde edilmek istenen $x_{nm}(0)$ başlangıç değeri $x(r, \theta, 0)$ 'in seçimine bağlı olarak (6.33) ile hesaplanacaktır. Burada sistemin ana başlangıç koşulunu ifade eden $x(r, \theta, 0)$ değeri genelde öz fonksiyonların ortogonallik özellikleri uygulanacak biçimde öngörülür. Örneğin, bu kısımda kullanılacak olan sistemin ana başlangıç koşulu

$$x(r, \theta, 0) = P_0(\cos \theta) j_0(\psi_{0,1} r) \quad (6.34)$$

olup buna bağlı olarak (6.33) ile hesaplanan $x_{nm}(0)$ değeri aşağıdaki biçimdedir:

$$x_{nm}(0) = \begin{cases} J_1\left(\frac{\mu_{1,1}}{2}\right); & n=0, m=1 \\ 0; & n>0, m>1. \end{cases} \quad (6.35)$$

Bu başlangıç değerinin yanında kontrol bileşen fonksiyonunun son değeri $u_{nm}(1) = 0$ dır.

6.1.1 Analitik Çözüm

(6.31)-(6.32) denklem sistemi $\alpha = 1$ olması durumunda tamsayı mertebeli

$$\frac{d}{dt}x_{nm}(t) = -\kappa_\beta (\psi_{n,m})^\beta x_{nm}(t) + u_{nm}(t), \quad (6.36)$$

$$\frac{d}{dt}u_{nm}(t) = \frac{A}{B}x_{nm}(t) + \kappa_\beta (\psi_{n,m})^\beta u_{nm}(t) \quad (6.37)$$

sistemine dönüşür. Burada

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \kappa_\beta (\psi_{n,m})^\beta \quad (n=0,1,\dots \wedge m=1,2,\dots), \\ e &= \frac{A}{B}, \\ b_{nm} &= \sqrt{e + a_{nm}^2} \end{aligned}$$

kısaltmaları kullanılarak elde edilen analitik çözümler aşağıdaki gibidir:

$$x_{nm}(t) = x_{nm}(0) \left[\frac{b_{nm} \cosh(b_{nm}(t-1)) - a_{nm} \sinh(b_{nm}(t-1))}{b_{nm} \cosh(b_{nm}) + a_{nm} \sinh(b_{nm})} \right], \quad (6.38)$$

$$u_{nm}(t) = x_{nm}(0) \left[\frac{(b_{nm}^2 - a_{nm}^2) \sinh(b_{nm}(t-1))}{b_{nm} \cosh(b_{nm}) + a_{nm} \sinh(b_{nm})} \right]. \quad (6.39)$$

6.1.2 Nümerik Çözüm

(6.31)-(6.32) denklem sisteminin GL yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümleri

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^M w_j^\alpha x_{nm}(Mh - jh) - x_{nm}(0) \frac{[Mh]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \kappa_\beta (\psi_{n,m})^\beta x_{nm}(Mh) = u_{nm}(Mh)$$

$$(M = 1, 2, \dots, N, n = 0, 1, \dots, p, m = 1, 2, \dots, q),$$

(6.40)

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-M} w_j^\alpha u_{nm}(Mh + jh) - u_{nm}(Nh) \frac{[(N-M)h]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$$+ \kappa_\beta (\psi_{n,m})^\beta u_{nm}(Mh) = -\frac{A}{B} x_{nm}(Mh) \quad (6.41)$$

$$(M = N-1, N-2, \dots, 0, n = 0, 1, \dots, p, m = 1, 2, \dots, q)$$

biçimindedir. Buradaki w_j^α, N, M ve h GL yaklaşımında kullanılan standart notasyonlardır. Ayrıca şekiller için kullanılan $x_{nm}(0)$ başlangıç değeri (6.35)'te hesaplanan değer ve kontrolün son değeri $u_{nm}(Nh) = u_{nm}(1) = 0$ dır.

Aşağıda verilen şekiller elde edilirken ilk olarak problem parametrelerinin değişimleri karşısında sistemin en küçük bileşenleri olan $x_{nm}(t)$ ve $u_{nm}(t)$ 'lerin davranışının görülmesi amaçlanmıştır. Burada $x_{01}(t)$ durum ve $u_{01}(t)$ kontrol bileşen fonksiyonları üzerindeki analizlere yer verilmiştir. Bu seçimler tamamen (6.35)'teki başlangıç değerinin seçimi ile ilgilidir. Farklı başlangıç koşullarının seçimi elbette farklı durum ve kontrol bileşen fonksiyonları ortaya çıkarabilir. Diğer bir deyişle, burada seçilen başlangıç değeri ile sistemin durum ve kontrol davranışlarına en fazla katkısı olan terimler $x_{01}(t)$ ve $u_{01}(t)$ 'dir.

Şekil 6.1 ve Şekil 6.2'de $x_{01}(t)$ ve $u_{01}(t)$ bileşen fonksiyonlarının analitik ve nümerik çözümleri için bir karşılaştırma yapılmıştır. Yine bu sayısal karşılaştırmalarda $\beta = 1.75$ sabit değeri seçilerek α parametresinin değişiminin etkisi incelenmiştir.

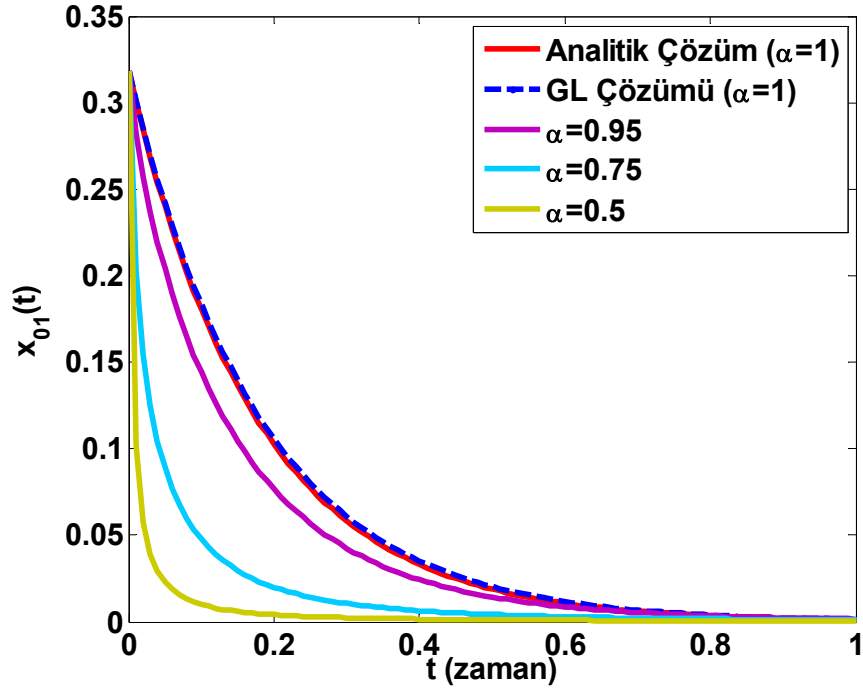
Benzer düşünceyle Şekil 6.3 ve Şekil 6.4'te $x_{01}(t)$ ve $u_{01}(t)$ bileşen fonksiyonlarının uzay kesirli türevi β 'nın değişimi karşısındaki davranışları gösterilmiştir. Zaman kesirli türevinin $\alpha = 0.9$ seçilmesi çözümlerin GL yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümler olduğunu açıkça göstermektedir. Burada GL

nümerik yaklaşımındaki alt aralık sayısı $N = 100$ olarak seçilmiştir. Dolayısı ile alt aralık uzunluğu $h = \frac{1}{100}$ dür. N 'nin seçimi keyfi olmakla birlikte değeri büyüdükçe algoritmanın çalışma süresi de uzadığından sonuçların düzgünlüğünü gerçekleyen asgari N değerinin kullanılması önemlidir.

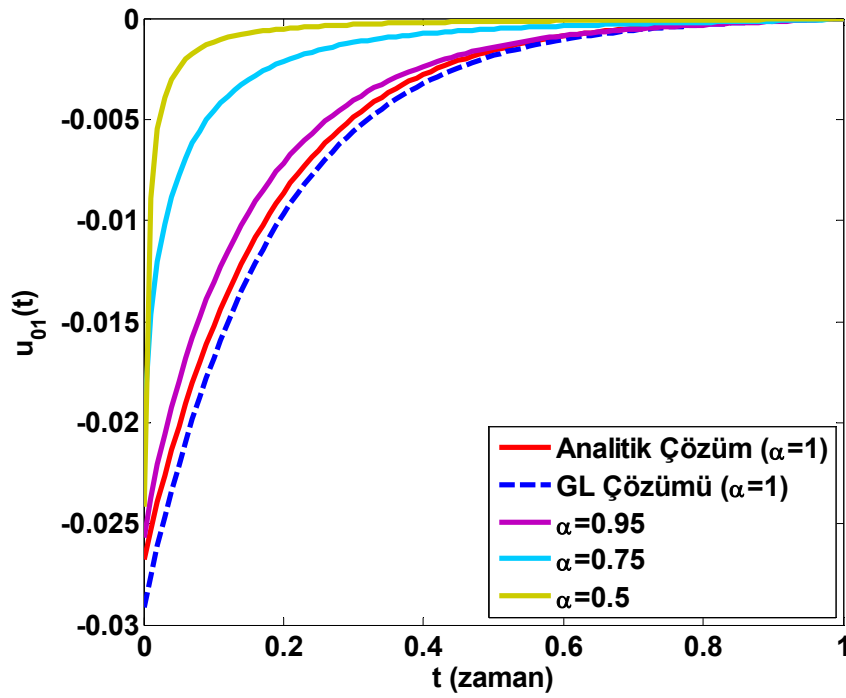
Şekil 6.5 ve Şekil 6.6'da GL yaklaşımındaki alt aralık sayısı N 'nin ve dolayısı ile alt aralık uzunluğu $h = \frac{1}{N}$ 'nin değişiminin $x_{01}(t)$ ve $u_{01}(t)$ üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Beklendiği üzere alt aralık sayısı arttıkça durum ve kontrol bileşenlerinin davranışlarındaki düzgünlük de artmaktadır. Bu şekiller $\alpha = 0.9$ ve $\beta = 1.75$ değerleri için elde edilmiştir ve $N = 40$ değerinden sonraki değerler için sonuçların birbiri ile örtüştüğü gözlenmiştir. Ancak dikkat edilirse farklı parametre değişimlerinin analizlerinde farklı N değerleri kullanılmıştır. Bunun nedeni farklı analizlerde durum ve kontrol bileşenlerinin düzgünlüğünü gözlemleyebilmek için farklı N değerlerinin yeterli oluşudur.

Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'de θ (açı) parametresi sabitlenerek sistemin durum ve kontrol yüzeyleri t (zaman) ve r (yarıçap) parametrelerinin değişimine göre elde edilmiştir. (6.21) ve (6.22)'deki durum ve kontrol serilerinin üst limit değerleri ya da diğer bir deyişle terim sayıları $n = m = 4$ alınarak ve $\theta = \frac{\pi}{3}$, $N = 100$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.75$ seçilerek yüzeyler çizilmiştir. Burada önemli olan az sayıda terim kullanarak sistemin beklenen cevabının gözlenmesidir öyle ki $n, m > 4$ olacak biçimdeki serilerin terimlerinin sistemin durum ve kontrol cevabına katkısı ihmal edilebilir.

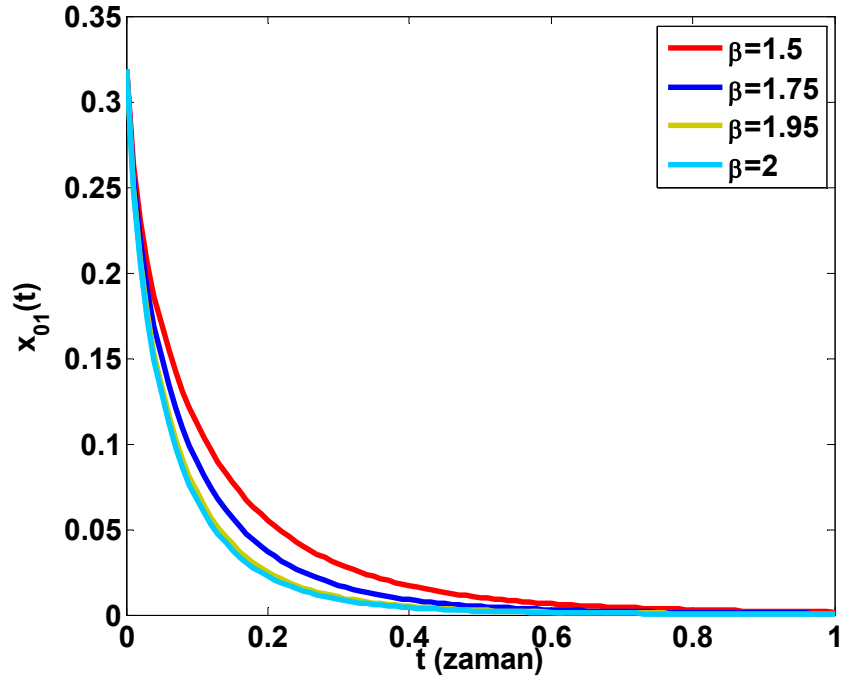
Benzer düşünceyle Şekil 6.9 ve Şekil 6.10'da r parametresi sabitlenerek t ve θ parametrelerinin değişimine göre durum ve kontrol yüzeyleri gösterilmiştir. Çizimlerde $r = 0.5$, $n = m = 4$, $N = 100$, $\alpha = 0.9$ ve $\beta = 1.75$ değerleri kullanılmıştır.



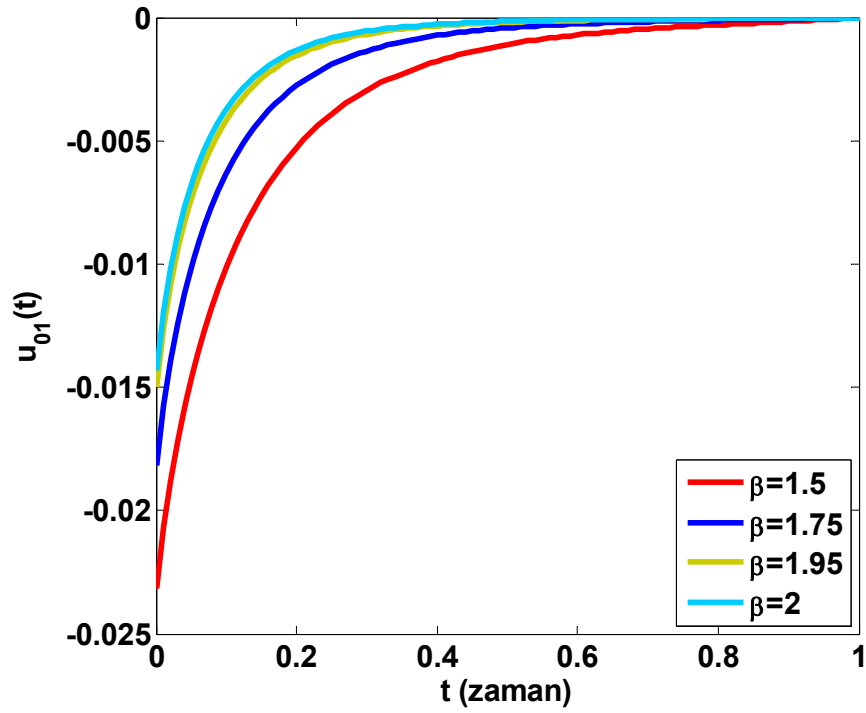
Şekil 6.1: $x_{01}(t)$ durum bileşen fonksiyonunun α parametresinin değişimine bağlı olarak çözümlerinin karşılaştırması: $\beta = 1.75$, $N = 100$.



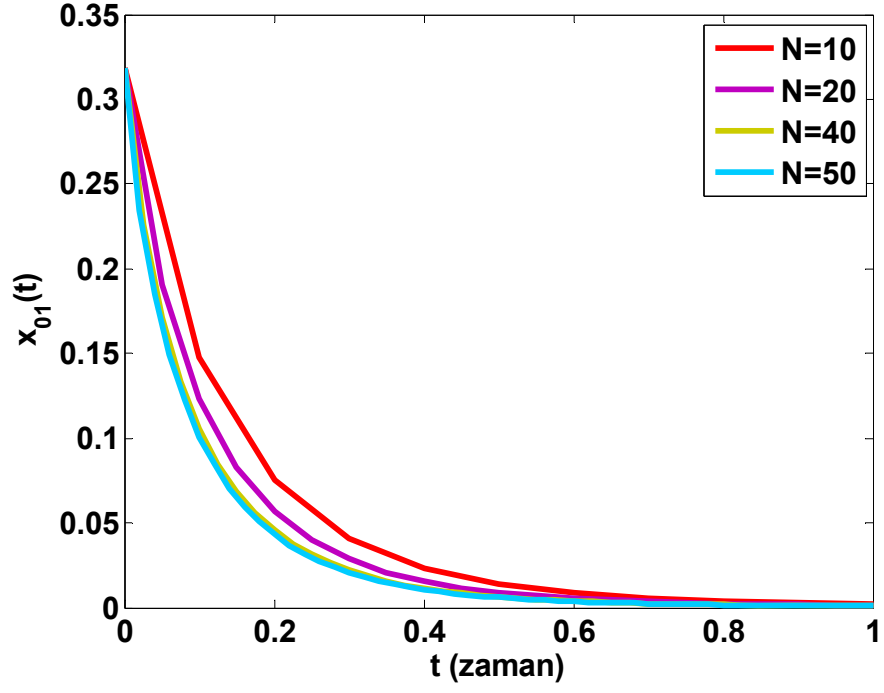
Şekil 6.2: $u_{01}(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun α parametresinin değişimine bağlı olarak çözümlerinin karşılaştırması: $\beta = 1.75$, $N = 100$.



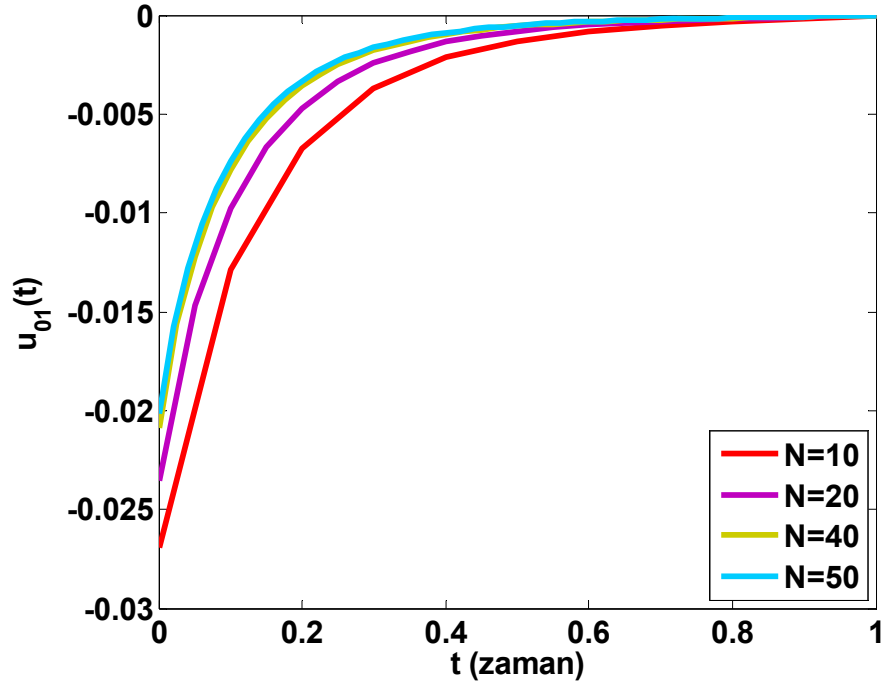
Şekil 6.3: $x_{01}(t)$ durum bileşen fonksiyonunun β parametresinin değişimine bağlı olarak çözümlerinin karşılaştırması: $\alpha = 0.9$, $N = 100$.



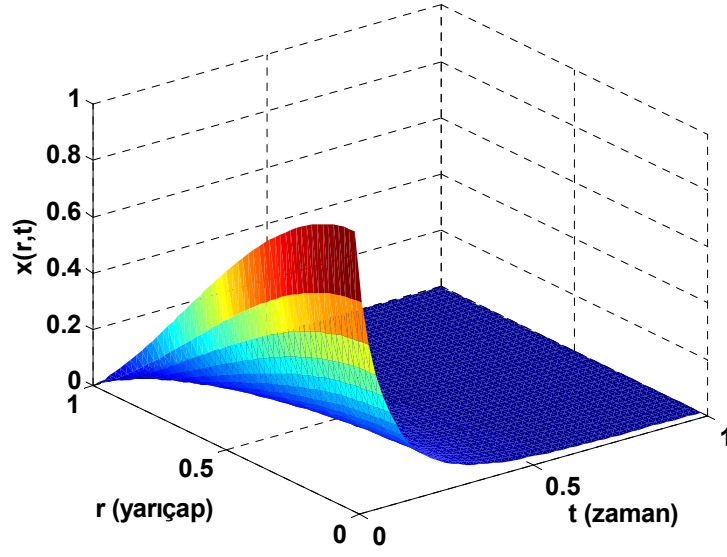
Şekil 6.4: $u_{01}(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun β parametresinin değişimine bağlı olarak çözümlerinin karşılaştırması: $\alpha = 0.9$, $N = 100$.



Şekil 6.5: GL yaklaşımındaki N adım sayısının değişimine göre $x_{01}(t)$ durum bileşen fonksiyonunun davranışı: $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.75$.

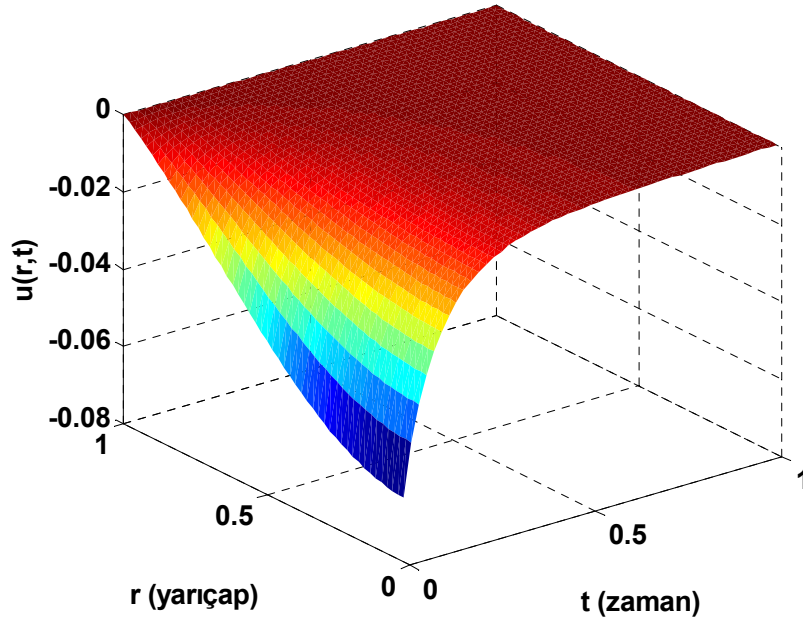


Şekil 6.6: GL yaklaşımındaki N adım sayısının değişimine göre $u_{01}(t)$ kontrol bileşen fonksiyonunun davranışı: $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.75$.



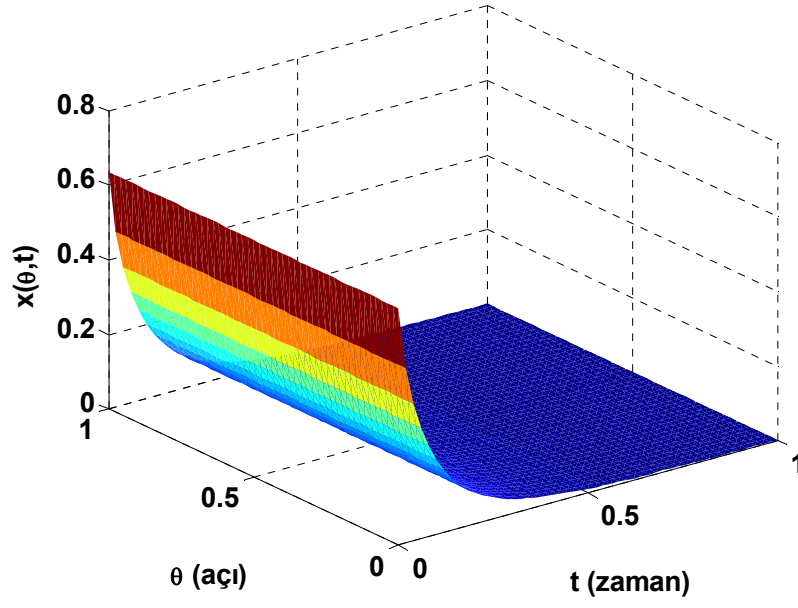
Şekil 6.7: Sistemin $x(r,t)$ durumunun yüzeyi:

$$\alpha = 0.9, \beta = 1.75, N = 100, \theta = \frac{\pi}{3}, n = m = 4.$$

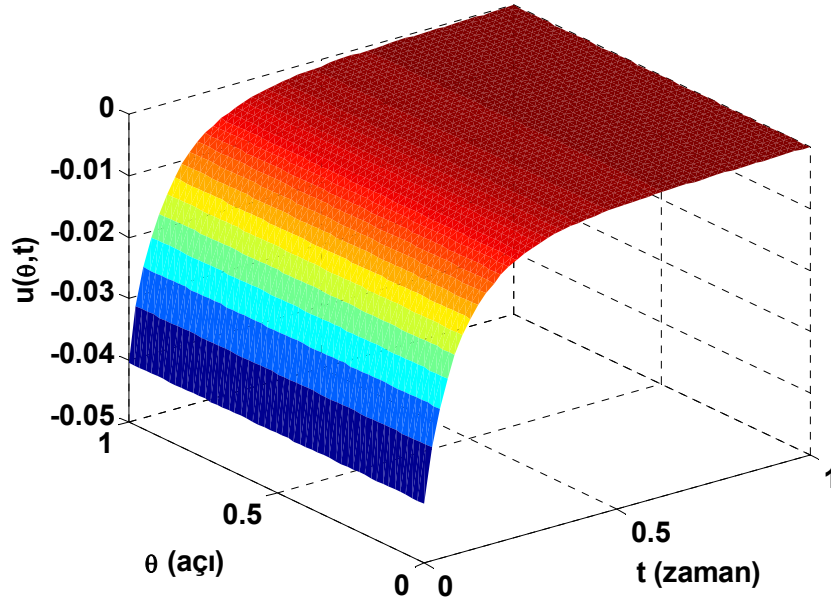


Şekil 6.8: Sistemin $u(r,t)$ kontrolünün yüzeyi:

$$\alpha = 0.9, \beta = 1.75, N = 100, \theta = \frac{\pi}{3}, n = m = 4.$$



Şekil 6.9: Sistemin $x(\theta, t)$ durumunun yüzeyi:
 $\alpha = 0.9, \beta = 1.75, N = 100, r = 0.5, n = m = 4.$



Şekil 6.10: Sistemin $u(\theta, t)$ kontrolünün yüzeyi:
 $\alpha = 0.9, \beta = 1.75, N = 100, r = 0.5, n = m = 4.$

6.2 Tam Radyal Simetrik Durum

Bu kısımda dinamik sistemin ve buna bağlı performans indeksin küresel koordinatların açı değişkenlerinin her ikisinden de (θ ve φ) bağımsız olması durumu ele alınmıştır. Böylelikle problem tam radyal simetri olarak adlandırılmıştır. O halde sistem dinamikleri

$${}^C D_t^\alpha x(r,t) = -\kappa_\beta (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} x(r,t) + u(r,t) \quad (6.42)$$

biçiminde tanımlanan, başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$x(r,0) = x_0(r), \quad (6.43)$$

$$x(a,t) = x(0,t) = 0, \quad (6.44)$$

olan

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^a [Ax^2(r,t) + Bu^2(r,t)] r^2 dr dt \quad (6.45)$$

performans indeksini minimize eden optimal kontrolün bulunması problemi incelenmektedir.

Öz fonksiyonların belirlenebilmesi için göz önüne alınan Helmholtz denklemi

$$-\Delta x(r) = \psi^2 x(r) \quad (0 < r < a) \quad (6.46)$$

dir. Burada

$$\Delta x(r) = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial x}{\partial r} \quad (6.47)$$

tam radyal simetrik formda tanımlanan Laplace operatörüdür. (6.46) denkleminin çözümü olan öz fonksiyonlar

$$R_n(r) = j_0(\psi_n r) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.48)$$

ve öz değerler

$$\psi_n = \frac{\mu_{\frac{1}{2},n}}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

biçimindedir öyle ki $\mu_{\frac{1}{2},n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 'ler $J_{\frac{1}{2}}$ Bessel fonksiyonunun pozitif sıfırlarıdır. Ayrıca j_0 küresel Bessel fonksiyonu ile $J_{\frac{1}{2}}$ Bessel fonksiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$j_0(r) = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(r). \quad (6.50)$$

Yine öz fonksiyonların ortogonal ve dolayısı ile ortonormalleştirilebilir bir aile olması söz konusudur. Ayrıca j_0 fonksiyonu için

$$\|j_0(\psi_n r)\|^2 = \int_0^a j_0^2(\psi_n r) r^2 dr = \frac{a^3}{2} j_1^2\left(\mu_{\frac{1}{2},n}\right) \quad (6.51)$$

özellği geçerlidir. Buna bağlı olarak elde edilen ortonormal öz fonksiyonlar ise

$$R_n(r) = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}j_1\left(\mu_{\frac{1}{2},n}\right)} j_0(\psi_n r) \quad (6.52)$$

şeklinindedir. Böylece $x(r, t)$ durum ve $u(r, t)$ kontrol fonksiyonlarının

$$x(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}j_1\left(\mu_{\frac{1}{2},n}\right)} j_0(\psi_n r), \quad (6.53)$$

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}j_1\left(\mu_{\frac{1}{2},n}\right)} j_0(\psi_n r), \quad (6.54)$$

biçiminde ortonormal öz fonksiyonların birer serisi oldukları varsayımı yapılabilir. (6.53) seri fonksiyonu (6.44)'te verilen sınır koşullarını da sağlamaktadır. Benzer biçimde kesirli Laplace operatörünün bu öz fonksiyonlar cinsinden ifadesi de

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} x(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) (\psi_n)^{\beta} R_n(r) \quad (6.55)$$

olarak hesaplanır.

Gerekli optimallik koşullarının hesaplanmasında kullanılan F fonksiyonu (6.53) ve (6.54) seri fonksiyonlarının (6.45)'te yazılması ve gerekli hesaplamaların yapılması ile

$$F_n(x, u, t) = \frac{1}{2} [Ax_n^2(t) + Bu_n^2(t)] \quad (6.56)$$

formunda ve G fonksiyonu (6.53)-(6.55) sonuçlarının (6.42) dinamik sisteminde yazılması sonucunda

$$G_n(x, u, t) = -\kappa_{\beta} (\psi_n)^{\beta} x_n(t) + u_n(t) \quad (6.57)$$

biçiminde elde edilir. Buradan da (3.45)-(3.47) gerekli optimallik koşulları aşağıdaki gibi bulunur:

$${}^c_0 D_t^{\alpha} x_n(t) = -\kappa_{\beta} (\psi_n)^{\beta} x_n(t) + u_n(t), \quad (6.58)$$

$${}^c_t D_1^{\alpha} \lambda_n(t) = Ax_n(t) - \kappa_{\beta} (\psi_n)^{\beta} \lambda_n(t), \quad (6.59)$$

$$Bu_n(t) + \lambda_n(t) = 0 \quad (6.60)$$

(6.59) ve (6.60) denklemlerinin düzenlenmesi ile de

$${}^c_t D_1^{\alpha} u_n(t) = -\frac{A}{B} x_n(t) - (\psi_n)^{\beta} \kappa_{\beta} u_n(t) \quad (6.61)$$

elde edilir. Böylece durum ve kontrol bileşen fonksiyonlarının kesirli denklem sistemi

$${}^c_0 D_t^{\alpha} x_n(t) = -\kappa_{\beta} (\psi_n)^{\beta} x_n(t) + u_n(t), \quad (6.62)$$

$${}^c_t D_1^{\alpha} u_n(t) = -\frac{A}{B} x_n(t) - (\psi_n)^{\beta} \kappa_{\beta} u_n(t) \quad (6.63)$$

olur. Daha önceki bölümlerde de vurgulandığı gibi (6.62)-(6.63) denklem sisteminin çözümünde durum bileşen fonksiyonu için başlangıç koşulu $x_n(0)$ gereklidir. Bunun hesaplanabilmesi için (6.53)'te verilen durum fonksiyon serisi ve (6.43)'te verilen sistemin ana başlangıç koşulu dikkate alınmalıdır. Bununla birlikte j_0 fonksiyonunun (6.51)'deki ortogonallik özelliği de kullanılırsa

$$x_n(0) = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a}j_1\left(\mu_{\frac{1}{2},n}\right)} \int_0^a x_0(r)j_0(\psi_n r)r^2 dr \quad (6.64)$$

başlangıç koşulu elde edilir. Burada $x_0(r)$ 'nin seçimine ve her bir n değerine bağlı olarak durum bileşen fonksiyonunun (6.64) başlangıç değerinin değişeceği görülmektedir.

Örneğin, sistemin ana başlangıç değer fonksiyonu

$$x(r, 0) = x_0(r) = 1$$

olarak seçilsin. O halde (6.64)'deki

$$\int_0^a j_0(\psi_n r)r^2 dr$$

integralinin değeri hesaplanmalıdır. Bunun için

$$\int x^{n+2} j_n(x) dx = x^{n+2} j_{n+1}(x) + c \quad (n = 0, 1, \dots)$$

özelliği dikkate alınırsa hesaplanmak istenen integralin $n=0$ durumuna karşılık geldiği görülür. Buradan elde edilecek olan durum fonksiyonunun başlangıç değeri

$$x_n(0) = \frac{\sqrt{2}}{\psi_n} \quad (6.65)$$

dir. Aynı zamanda bu değer nümerik hesaplamalar yapılırken kullanılan başlangıç değeridir. (6.65)'ten ve (6.62)-(6.63) denklem sisteminin katsayılarından anlaşılacağı gibi analitik ve nümerik çözüm algoritmalarının oluşturulmasında ψ_n değerlerinin bilinmesi gereklidir. Bunlar ise $J_{\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun sıfırları olan $\mu_{\frac{1}{2},n}$ ($n = 1, 2, \dots$)

değerlerine bağlı olarak (6.49)'da hesaplandığına göre öncelikle $\mu_{\frac{1}{2},n}$ değerleri bilinmelidir. Bunun için p . dereceden birinci tip Bessel fonksiyonlarının (6.12) ile verilen tanımında özel halde $p = \frac{1}{2}$ olması durumu

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \frac{1}{2}} \quad (6.66)$$

biçimindedir. Burada

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1} k!} \sqrt{\pi} \quad (6.67)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x)^{2k+1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \end{aligned} \quad (6.68)$$

sonucuna ulaşılır ki bu eşitlik ile $J_{1/2}$ fonksiyonunun sıfırları olan $\mu_{\frac{1}{2},n}$ ($n = 1, 2, \dots$) değerleri

$$\mu_{\frac{1}{2},n} = n\pi \quad (6.69)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak bulunması amaçlanan ψ_n 'ler aşağıdaki gibidir:

$$\psi_n = \frac{\mu_{\frac{1}{2},n}}{a} = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.70)$$

Analitik ve nümerik çözümlerde kullanılan bu önemli ön bilgilerden sonra sırası ile çözümler aşağıda belirtilmiştir.

6.2.1 Analitik Çözüm

(6.62)-(6.63) kesirli denklem sistemi $\alpha = 1$ olması durumunda

$$\frac{d}{dt}x_n(t) = -\kappa_\beta(\psi_n)^\beta x_n(t) + u_n(t), \quad (6.71)$$

$$\frac{d}{dt}u_n(t) = \frac{A}{B}x_n(t) + \kappa_\beta(\psi_n)^\beta u_n(t) \quad (6.72)$$

şekline dönüşür. Bu denklem sisteminin çözümü ise

$$x_n(t) = c_1 \exp(-p(n)t) + c_2 \exp(p(n)t), \quad (6.73)$$

$$u_n(t) = c_1(q(n) - p(n))\exp(-p(n)t) + c_2(q(n) + p(n))\exp(p(n)t) \quad (6.74)$$

olarak elde edilir. Burada kullanılan kısaltmalar ve hesaplanan katsayılar aşağıda verilmiştir:

$$q(n) = \kappa_\beta(\psi_n)^\beta, \quad (6.75)$$

$$p(n) = \sqrt{q(n)^2 + 1}, \quad (6.76)$$

$$c_1 = \frac{(p(n) - q(n))}{\{(p(n) - q(n)) + (q(n) + p(n))\exp(2p(n))\}} x_n(0), \quad (6.77)$$

$$c_2 = \frac{(p(n) + q(n))\exp(2p(n))}{\{(p(n) - q(n)) + (q(n) + p(n))\exp(2p(n))\}} x_n(0). \quad (6.78)$$

Bu kısımda elde edilen analitik çözümlerin 5.1 Kısım ile oldukça benzer olduğu görülmektedir. Ancak burada problemler açısından belirleyici olanın özdeğerler ve öz fonksiyonlar olduğu unutulmamalıdır. Farklı koordinat sistemlerinde problemi analiz etmek zaten bu açıdan önemlidir.

(6.73)-(6.74) çözüm takımı için kullanılan başlangıç koşulları (6.65)'te hesaplanan değerlerdir ve ayrıca $u_n(t)$ kontrol bileşen fonksiyonu için son değer $u_n(1) = 0$ 'dır.

6.2.2 Nümerik Çözüm

5.2 Kısımındaki gibi Caputo kesirli türevinin GL nümerik yaklaşımı ile elde edilen karşılığı kullanılarak nümerik çözüm takımı

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^M w_j^\alpha x_n(Mh - jh) - x_n(0) \frac{[Mh]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \kappa_\beta (\psi_n)^\beta x_n(Mh) = u_n(Mh) \quad (6.79)$$

$$(M = 1, 2, \dots, N, n = 1, 2, \dots, m),$$

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-M} w_j^\alpha u_n(Mh + jh) - u_n(Nh) \frac{[(N-M)h]^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \kappa_\beta (\psi_n)^\beta u_n(Mh) = -\frac{A}{B} x_n(Mh)$$

$$(M = N-1, N-2, \dots, 0, n = 1, 2, \dots, m)$$

(6.80)

olarak belirlenir. Buradaki N, h, M, m parametreleri ve w_j^α katsayıları 4.2 Kısımında ifade edilmiştir.

Tam radyal simetrik durum esasen yarı radyal simetrik durumun bir alt durumunu belirtir. Çünkü tam radyal simetrik durum sistemin θ açılı değişkeninden de bağımsız olduğu durumdur. Yani $\theta = 0$ durumu olarak da düşünülebilir. O halde yarı radyal simetri durumunda yapılan analizler $\theta = 0$ için tam radyal simetriye karşılık gelir. Bu yüzden benzer nümerik sonuçlar bu kısımda tekrarlanmamıştır.

7. GRÜNWARD-LETNİKOV NÜMERİK YAKLAŞIMININ İTERASYONEL BİR NÜMERİK YÖNTEMLE KARŞILAŞTIRMASI

Bu bölümde amaç, tez problemlerinin nümerik çözümlerinde kullanılan GL yaklaşımı ile Volterra integral denklemlerinin nümerik çözümlerinde kullanılan iterasyonel bir yaklaşım arasında karşılaştırma ve değerlendirme yapmaktır. Diğer bir deyişle direkt bir nümerik yöntemle iterasyonel bir yöntemin KOKP'nin çözümü üzerindeki etkilerinin araştırılması amaçlanmıştır.

Öncelikle 4. Bölümde (4.18)-(4.19), 5. Bölümde (5.25)-(5.26) ve 6. Bölümde (6.31)-(6.32) ile (6.62)-(6.63) kesirli denklem sistemlerinin genel yapısının

$${}_0^c D_t^\alpha x = -c_1 x + c_2 u, \quad (7.1)$$

$${}_t^c D_1^\alpha u = -c_3 x - c_4 u, \quad (7.2)$$

formunda olduğu dikkate alınmalıdır. Ayrıca başlangıç durum ve son kontrol değerleri

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

biçimindedir. Buradaki c_1, c_2, c_3, c_4 katsayıları temsili olmakla birlikte özel halde aldığı değerler 4., 5. ve 6. Bölümlerde belirtilmiştir. (7.1)-(7.2) kesirli denklem sisteminin çözümünde uygulanacak olan nümerik yöntemin seçiminde belirleyici olan denklem sisteminin hem sol hem de sağ yönlü kesirli türev operatörlerini içermesidir. İleri ve geri fark yaklaşımı temeline dayanan GL nümerik yönteminin seçiminde de bu etkili olmuştur. GL tanımının esasen bir kesirli türev operatörünü ifade ettiği göz önüne alındığında GL nümerik yöntemi direkt bir yöntem olarak değerlendirilmektedir. Diğer bir deyişle önceki bölümlerde de görüldüğü gibi herhangi bir iterasyona gerek olmaksızın sadece zaman ayrıklaştırması ile nümerik algoritma yazılıp istenen sonuçlara ulaşılmıştır. O halde (7.1)-(7.2) kesirli denklem sisteminin iterasyonel bir yaklaşım ile çözümü nasıl gerçekleştirilebilir?

Burada uygulanan iterasyonel yaklaşım Diethelm ve diğ. [91] tarafından kesirli diferansiyel denklemlere adapte edilen “*Predictor-Corrector*” yaklaşımına dayanır. Diethelm ve diğ. Caputo kesirli türevli

$$D_*^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \quad (7.4)$$

diferansiyel denkleminin $m = \lceil \alpha \rceil$ olmak üzere

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (7.5)$$

başlangıç değerleri altındaki çözümünü araştırmışlardır. Bu amaçla (7.4)-(7.5) başlangıç değer problemini

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} y_0^{(k)} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \quad (7.6)$$

biçiminde Volterra integral denklemine dönüştürerek “*one-step Adams Predictor-Corrector*” algoritması ile çözmüşlerdir. Bunun öncesinde ayrıntıları [91]’de verilen yöntemin birinci mertebeden denklemler için uygulaması aşağıda özetlenmiştir. Burada ele alınan başlangıç-değer problemi

$$Dy(x) = f(x, y(x)), \quad (7.7)$$

$$y(0) = y_0 \quad (7.8)$$

biçimindedir. Burada f , (7.7)-(7.8) probleminin $[0, T]$ aralığında bir tek çözümü olduğu varsayımına bağlı olarak belirlenen bir fonksiyondur. O halde algoritmanın basamakları şöyledir:

i. Problemin tanımlandığı T uzunluklu zaman aralığı $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$h = T/N$ uzunluklu alt aralıklara bölünmüştür öyle ki

$$\{t_n = nh : n = 0, 1, \dots, N\}$$

dir. Burada temel düşünce $y_h(t_j) \approx y(t_j)$ ($j=1,2,\dots,n$) yaklaşık değerlerini hesaplamaktır. O halde $y_h(t_{n+1})$ değerini hesaplamak amacıyla $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında (7.7) denkleminin

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(z, y(z)) dz \quad (7.9)$$

yaklaşık formu göz önüne alınmıştır.

ii. (7.9) eşitliğinin sağ tarafındaki integral

$$\int_a^b g(z) dz = \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b)) \quad (7.10)$$

biçimindeki iki noktalı trapezoidal quadrature formülü kullanılarak (7.9) eşitliği yeniden düzenlenmiştir:

$$y_h(t_{n+1}) = y_h(t_n) + \frac{h}{2} (f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))). \quad (7.11)$$

(7.11) eşitliğinde $y(t_n)$ ve $y(t_{n+1})$, yaklaşık değerleri olan $y_h(t_n)$ ve $y_h(t_{n+1})$ ile değiştirilirse

$$y_h(t_{n+1}) = y_h(t_n) + \frac{h}{2} (f(t_n, y_h(t_n)) + f(t_{n+1}, y_h(t_{n+1}))) \quad (7.12)$$

yazılır. Dikkat edilirse (7.12) eşitliğinin her iki yanında $y_h(t_{n+1})$ bilinmeyeni bulunduğu ve f nonlinear bir fonksiyon olduğundan direkt bir yöntem kullanılarak $y_h(t_{n+1})$ değeri hesaplanamaz. Bunun için gerekli olan ilk yaklaşım “*predictor*” olarak adlandırılan $y_h^p(t_{n+1})$ yaklaşık değerinin (7.10) eşitliğindeki benzer düşünceyle “trapezoidal quadrature” formülünün

$$\int_a^b g(z) dz \approx (b-a) g(a) \quad (7.13)$$

üçgen yöntemiyle yer değiştirerek hesaplanmasıdır. Bu yaklaşım literatürde “*forward Euler*” ya da “*one-step Adams-Bashforth*” metodu olarak bilinen

$$y_h^P(t_{n+1}) = y_h(t_n) + hf(t_n, y_h(t_n)) \quad (7.14)$$

sonucunu ortaya çıkarır. (7.14) sonucunun (7.12) eşitliğinde yerine yazılması ile

$$y_h(t_{n+1}) = y_h(t_n) + \frac{h}{2} [f(t_n, y_h(t_n)) + f(t_{n+1}, y_h^P(t_{n+1}))] \quad (7.15)$$

elde edilir. Bu sonuç literatürde “*one-step Adams-Basforth-Moulton*” tekniği olarak bilinir. Buradaki $f(t_{n+1}, y_h^P(t_{n+1}))$ değeri ise “*corrector*” olarak adlandırılır. Bu yöntem 2. dereceden yakınsaktır:

$$\max_{n=1,2,\dots,N} |y(t_n) - y_h(t_n)| = O(h^2). \quad (7.16)$$

Diethelm ve diğ. buraya kadar olan kısmı bir algoritma mantığı ile şöyle özetlemektedir:

- (7.9) integral denkleminin çözülmesinde ilk olarak (7.14) ile verilen $y_h^P(t_{n+1})$ hesaplanır;
- Bu değer kullanılarak $f(t_{n+1}, y_h^P(t_{n+1}))$ değeri elde edilir;
- Son olarak $f(t_{n+1}, y_h(t_{n+1}))$ değeri hesaplanır;
- Bu şekilde elde edilen sonuç bir sonraki iterasyonda kullanılmak üzere saklanır.

Sonuç olarak burada özetlenen klasik “*Adams Predictor-Corrector*” algoritması Diethelm ve diğ. tarafından modifiye edilerek (7.4)-(7.5) kesirli başlangıç-değer problemine uygulanmıştır. Ele aldıkları problemde integral aralığı, (7.9) denkleminde farklı olarak $[0, t_n]$ ’dir. Klasik durumdakine benzer biçimde

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - z)^{\alpha-1} \bar{g}_{n+1}(z) dz \quad (7.17)$$

yaklaşımını uygulamışlardır. Buradaki \bar{g}_{n+1} , t_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n+1$) düğüm noktalarında g için parçalı lineer interpolantdır. Böylece kuantatür teorisinin tekniklerini kullanarak (7.17)’deki integrali

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - z)^{\alpha-1} \bar{g}_{n+1}(z) dz = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j) \quad (7.18)$$

biçiminde elde etmişlerdir öyle ki

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1 & j=n+1 \end{cases} \quad (7.19)$$

dir. Sonuç olarak bu yaklaşım ile elde ettikleri (7.6)'daki integral denklemi aşağıdaki gibidir:

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)). \quad (7.20)$$

Diethelm ve diğerleri tarafından kesirli başlangıç-değer problemi için ortaya konan bu iterasyonel yaklaşım, Agrawal [51] tarafından KOKP'lerin nümerik çözümlerine adapte edilmiştir. Dikkat edilirse (7.20) iterasyonel yaklaşımı uygulanan (7.4) kesirli diferansiyel denklemi sol Caputo kesirli türev operatörü ile tanımlanmıştır. Agrawal ise bu iterasyonel yaklaşımı sağ kesirli türevli denkleme uyarlayarak (7.1)-(7.2) kesirli denklem sistemi için nümerik çözümler elde etmiştir. Buradaki yöntem şöyledir:

I. İlk olarak (7.1)-(7.2) kesirli denklem sistemi (7.6) denklemine benzer

olarak Volterra integral denklemleri formunda yeniden ifade edilir:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (c_2 u(\tau) - c_1 x(\tau)) d\tau, \quad (7.21)$$

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (\tau-t)^{\alpha-1} (c_4 u(\tau) + c_3 x(\tau)) d\tau. \quad (7.22)$$

II. $[0,1]$ zaman aralığı N tane $h = \frac{1}{N}$ uzunluklu alt aralığa ayrılır ve

$j = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere j . zaman düğümü $t_j = jh$ olarak ifade edilir. Böylece (7.21) denkleminin ayrıklaştırılmış formu:

$$x(t_i) = x_0 - c_1 \sum_{j=0}^i a_{ij} x(t_j) + c_2 \sum_{j=0}^i a_{ij} u(t_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.23)$$

biçimindedir. Burada a_{ij} katsayıları (7.19)'da da görüleceği gibi

$$a_{ij} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{cases} (i-1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1} + (\alpha+1)i^\alpha, & j = 0 \\ (i-j+1)^{\alpha+1} + (i-j-1)^{\alpha+1} - 2(i-j)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq i-1 \\ 1, & j = i \end{cases} \quad (7.24)$$

dir.

III. (7.23) eşitliği yeniden düzenlenirse:

$i = 1$ için

$$x(t_1) = \frac{1}{1 + a_{11}} \left(1 - c_1 \underbrace{a_{10} x(t_0)} + c_2 \left[\underbrace{a_{10} u(t_0) + a_{11} u(t_1)} \right] \right), \quad (7.25)$$

$i = 2$ için

$$x(t_2) = \frac{1}{1 + a_{22}} \left(1 - c_1 \left[\underbrace{a_{20} x(t_0) + a_{21} x(t_1)} \right] + c_2 \left[\underbrace{a_{20} u(t_0) + a_{21} u(t_1) + a_{22} u(t_2)} \right] \right), \quad (7.26)$$

ve genel halde

$$x(t_i) = \frac{1}{1 + a_{ii}} \left[1 - c_1 \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x(t_j) + c_2 \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} u(t_j) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.27)$$

elde edilir.

IV. (7.23) yaklaşımına benzer olarak $u(t)$ için yapılan ayrıklaştırma

aşağıdaki gibidir:

$$u(t_i) = -c_3 \sum_{j=i}^N b_{ij} x(t_j) - c_4 \sum_{j=i}^N b_{ij} u(t_j), \quad i = N-1, \dots, 0. \quad (7.28)$$

Burada (7.24) katsayılarına benzer düşünceyle b_{ij} katsayıları belirlenmektedir:

$$b_{ij} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{cases} 1, & j = i \\ (j-i+1)^{\alpha+1} + (j-i-1)^{\alpha+1} - 2(j-i)^{\alpha+1}, & i+1 \leq j \leq N-1 \\ (N-i-1)^{\alpha+1} - (N-i)^{\alpha+1} + (\alpha+1)(N-i)^\alpha, & j = N. \end{cases} \quad (7.29)$$

V. **III**'tekine benzer hesaplamalar yapılarak (7.28) eşitliğinin yeniden

düzenlenmiş hali aşağıdaki gibidir:

$$u(t_i) = -\frac{1}{1+b_{ii}} \left[c_3 \sum_{j=i}^N b_{ij} x(t_j) + c_4 \sum_{j=i+1}^N b_{ij} u(t_j) \right], \quad i = N-1, \dots, 0. \quad (7.30)$$

VI. Buraya kadarki adımlarda $x(t)$ ve $u(t)$ iterasyonel olarak hesaplanabilir

forma getirilmiş oldu. O halde iterasyonu çalıştıran algoritmanın aşamalarına geçilebilir.

VII. u_{hj} (ya da $u(t_j)$) ($j = 0, \dots, N-1$) değerleri için bir başlangıç değeri tahmini yapılır. Bu başlangıç değeri kontrolün son değeri olan $u_{hN} = 0$ değerine eşit olarak kabul edilir.

VIII. Bu değerler kullanılarak (7.27) eşitliği ile verilen x_{hj} (ya da $x(t_j)$)

($j = 1, 2, \dots, N$) değerleri algoritmanın ilk döngüsünde hesaplanır ve saklanır. Böylece ilk iterasyon için $x(t_j)$ değerleri (7.30) eşitliğinde kullanılmak üzere biliniyor olur.

IX. **VIII**'deki değerler (7.30) eşitliğinde kullanılarak $u_{h(N-j)}$ (ya da $u(t_{N-j})$).

($j = 1, 2, \dots, N$) değerleri hesaplanır ve böylelikle **VII**'deki tahmini değerlerin yerine gerçek değerler bulunmuş olur.

X. k iterasyon sayısını göstermek üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &= \max |x_{hj}^{k+1} - x_{hj}^k|, \\ \mathcal{E}_u &= \max |u_{hj}^{k+1} - u_{hj}^k|\end{aligned}\tag{7.31}$$

hataları hesaplanır ve eğer bu değerler algoritmanın başında belirlenmiş olan hata değerlerinden büyükse **VIII.** ve **IX.** adımlar tekrarlanır. Eğer tam tersi durum varsa iterasyondan çıkılır.

İşte bu iterasyonel yaklaşım ile GL yaklaşımını tez problemleri üzerinde karşılaştırmak amacıyla test problemi olarak tezin 4. Bölümündeki problem ele alınmıştır. İterasyonel yaklaşımın algoritması da GL yaklaşımındaki gibi MATLAB R2007b programı kullanılarak yazılmıştır. Bu algorithmada c_1, c_2, c_3, c_4 katsayıları (4.18)-(4.19) kesirli denklem sisteminin katsayılarıdır:

$$\begin{aligned}c_1 = c_4 &= \kappa_\beta \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{\beta}{2}}, \\ c_2 &= 1, \\ c_3 &= \frac{A}{B}.\end{aligned}\tag{7.32}$$

Nümerik karşılaştırmalarda ilk olarak analitik çözüm, GL çözümü ve iterasyonel çözümün karşılaştırması yapılmıştır. Bu amaçla Şekil 7.1 ve Şekil 7.2'de $x_1(t)$ ve $u_1(t)$ bileşen fonksiyonları üzerinde bir karşılaştırma yapılmıştır. Dikkat edilirse $x_1(t)$ fonksiyonu için GL ve iterasyonel çözüm yöntemleri arasında anlamlı bir fark gözlenmemiştir. İterasyonel yaklaşımda iterasyon sayısı değişmesine rağmen elde edilen sonuçlar aynıdır. Bu yaklaşımda iterasyon sayısındaki değişim aynı zamanda hata değerindeki değişimi de temsil etmektedir. 6 iterasyon için algorithmada tanımlanan hata değeri $\varepsilon = 0.01$ iken 14 iterasyonda hatanın değeri $\varepsilon = 0.001$ olarak alınmıştır. Ancak $u_1(t)$ için gözlenen sonuçlar daha farklıdır. Şekil 7.2'de görüleceği gibi GL ve iterasyonel yaklaşımları arasında analitik çözüme yaklaşıırken anlamlı fark bulunmaktadır. Bu fark ancak iterasyonel yöntemde iterasyon sayısının artması ile azalmıştır. Yine burada da iterasyon sayıları ve ε hata değerleri arasındaki ilişki $x_1(t)$ için olduğu gibidir. O halde iterasyonel yöntemde analitik çözüme yakınsamayı belirleyen parametre ε hata değeri ve dolayısı ile iterasyon sayısıdır. GL yaklaşımı ile aralarındaki en önemli fark budur. İterasyonel

yöntemde istenen sonuca yaklaşabilmek için algoritmanın çalışma süresi uzamaktadır. Bu ise daha yüksek boyutlu ve çok parametrelili problemler için bir dezavantaj olarak görülebilir.

Şekil 7.3 ve Şekil 7.4'te zaman ayırıştırmasındaki alt zaman aralık sayısını temsil eden N değerindeki değişimin GL ve iterasyonel yöntemler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Her iki şekilde de iterasyonel yaklaşımın zaman ayırıştırmasına karşı hassasiyet göstermezken GL yönteminin N değerine bağımlılığı görülmektedir. N değeri arttıkça sistemin durum ve kontrol cevabı düzleşmektedir. GL için elde edilen sonuçlar $N = 50$ değerinden sonra birbiri ile örtüşmektedir. Dolayısıyla bu değer optimum alt zaman aralık sayısı olarak alınabilir. Her iki şekilde de $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.75$ ve $\varepsilon = 0.001$ keyfi değerleri kullanılmıştır.

Şekil 7.5 ve Şekil 7.6'da $\alpha = 1$ sabit parametresine karşılık β parametre değişimin yöntemler üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu şekillerde $N = 50$ ve $\varepsilon = 0.001$ değerleri alınmıştır. Bu analizde her iki algoritmanın çalışma süresinde ve elde edilen sonuçların birbirine yakınlığında anlamlı bir fark gözlenmemiştir. İterasyonel yöntemde bu parametre değişimi iterasyon sayısında anlamlı bir değişiklik meydana getirmemiştir öyle ki algoritma $\beta = 1.5$ değerine karşılık 12 iterasyon, $\beta = 1.75$ değerine karşılık yine 12 iterasyon ve $\beta = 1.95$ değerine karşılık 10 iterasyon gerçekleştirmiştir. Dikkat edilirse β parametresinin değişimi ile iterasyon sayısı arasında doğrusal bir ilişki de mevcut değildir.

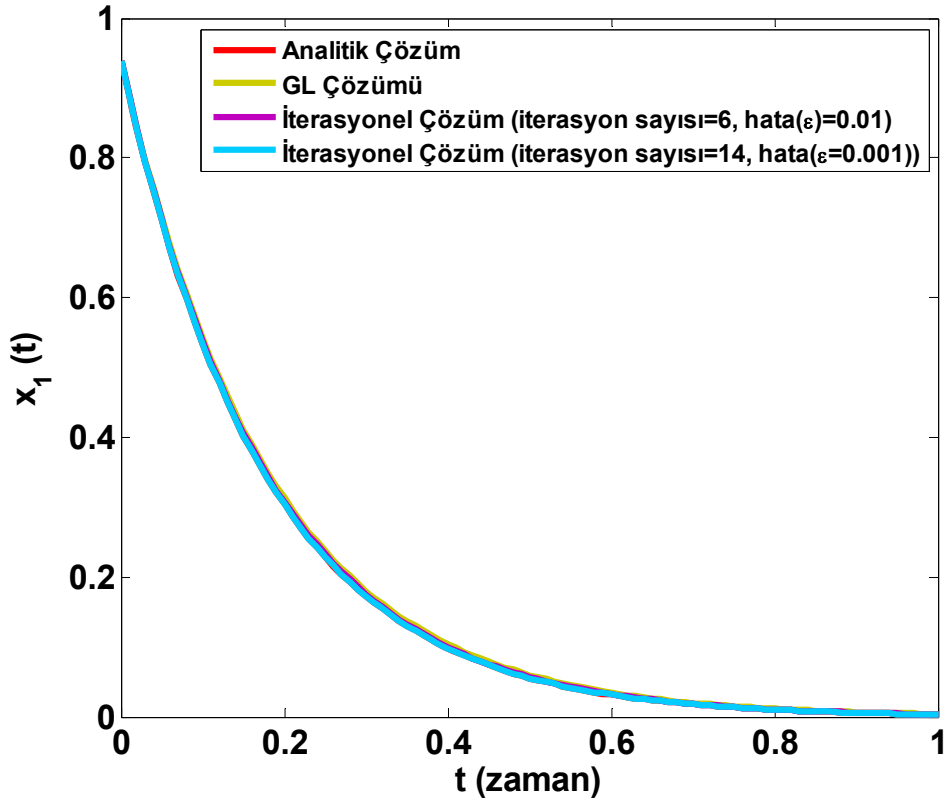
Benzer analiz $\beta = 1.5$ keyfi seçimi altında α parametre değişiminin yöntemler üzerindeki etkisi incelenmiştir. İterasyonel yaklaşımdaki hata değeri $\varepsilon = 0.001$ olarak alınmıştır. Şekil 7.7 ve Şekil 7.8'de gözlenen sonuçlardan ilki iterasyonel yöntemde α parametresinin değişimi ile iterasyon sayısı arasında doğrusal bir ilişki olmadığıdır. Bir diğer sonuç ise α parametre değişimi karşısında nümerik çözümler arasında anlamlı bir fark olmasıdır.

Sonuç olarak beklendiği üzere GL yaklaşımı sadece zaman ayırıştırması üzerine kurulan direkt bir yöntem olduğundan zamana bağlı parametre değişimlerine göre (alt zaman aralığı sayısı N) hassasiyet gösterir. Ancak bu algoritmanın çalışma

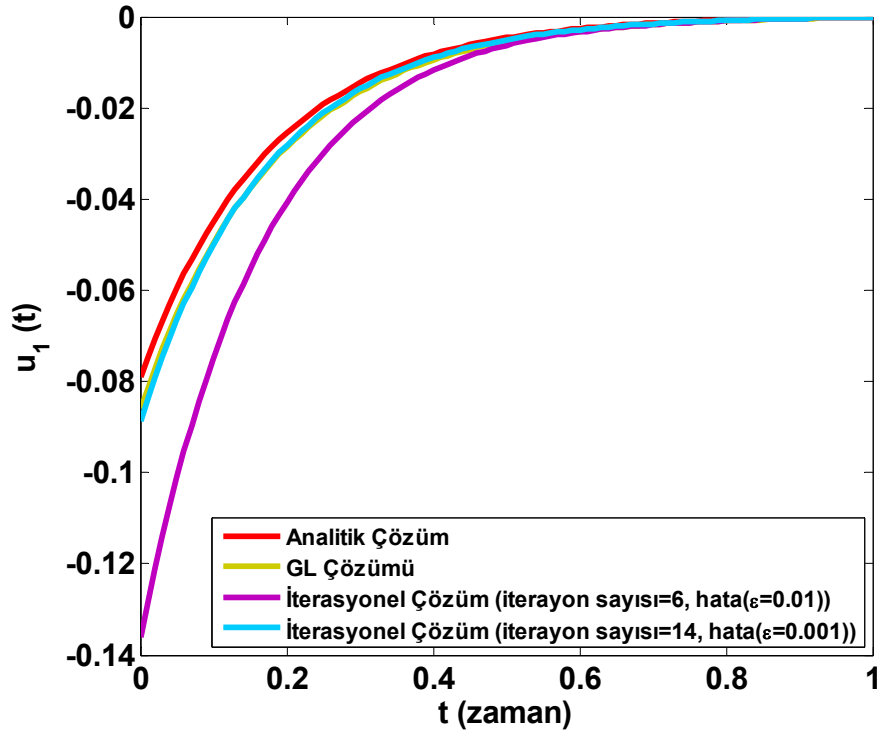
süresi üzerinde önemsenecek bir fark ortaya çıkarmamaktadır. Bu yüzden hem bu tezin uygulamalarında kullanılmıştır hem de literatürde sıkça kullanılmaktadır.

İterasyonel yöntem, hata değeri ε 'a ve iterasyon sayısına bağlıdır. Bunların yanı sıra zaman ayrıklaştırması da söz konusu olduğundan zaman parametrelerine göre de değişkendir. GL ile karşılaştırıldığında iterasyon sayısındaki artışa ve problem parametrelerinin sayısına bağlı olarak algoritmanın çalışma süresi uzamaktadır. Bu ise nümerik hesaplamalar açısından istenilen bir durum değildir. Ancak yine de sağ ve sol yönlü türevli kesirli denklem sistemlerinin çözümlerinde yaygın biçimde alternatif bir yöntem olarak kullanılmaktadır.

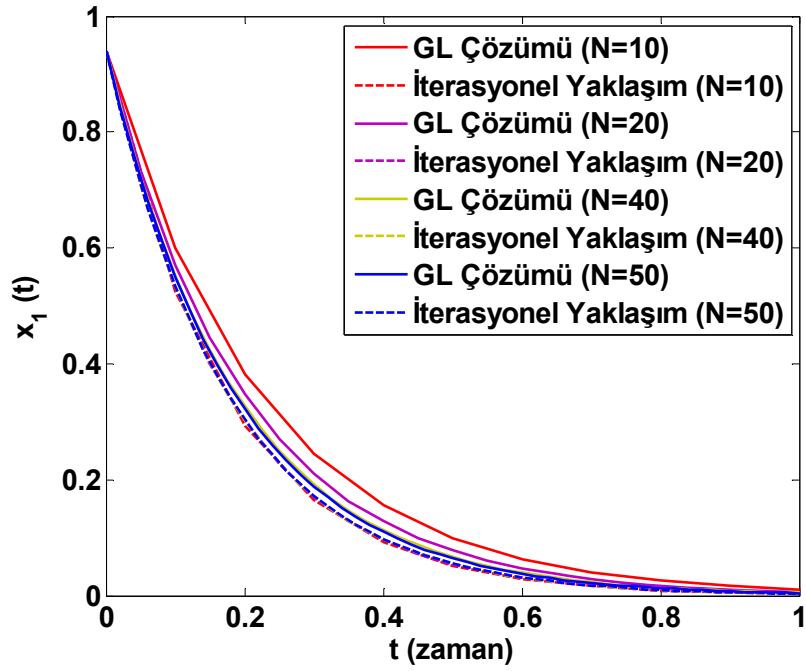
Bu iki nümerik yöntemin karşılaştırmasına Tablo 7.1'de yer verilmiştir.



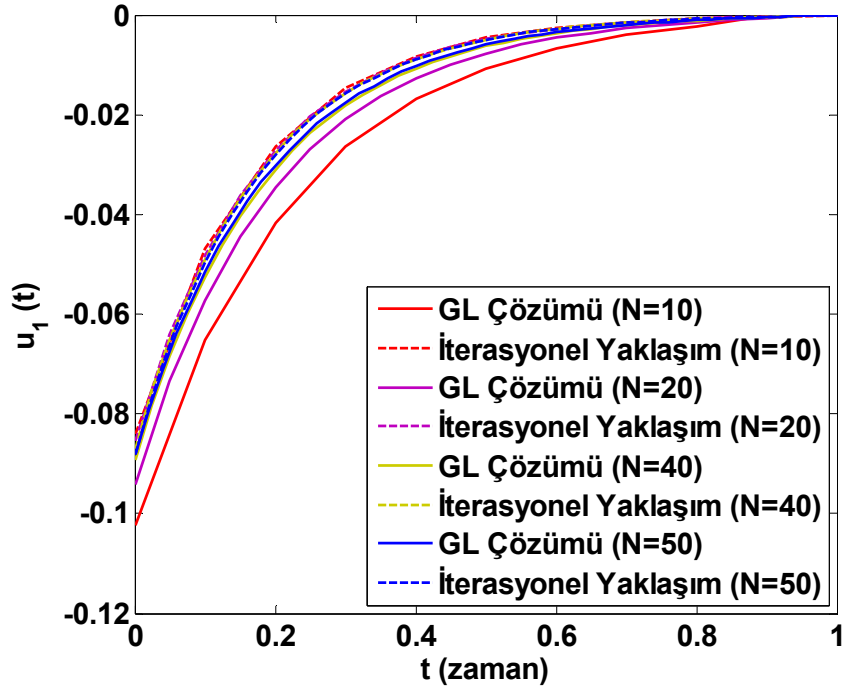
Şekil 7.1: Farklı Çözüm Yöntemlerinin sistemin $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonu üzerindeki etkisi: $\alpha = 1$, $\beta = 1.75$ ve $N = 100$.



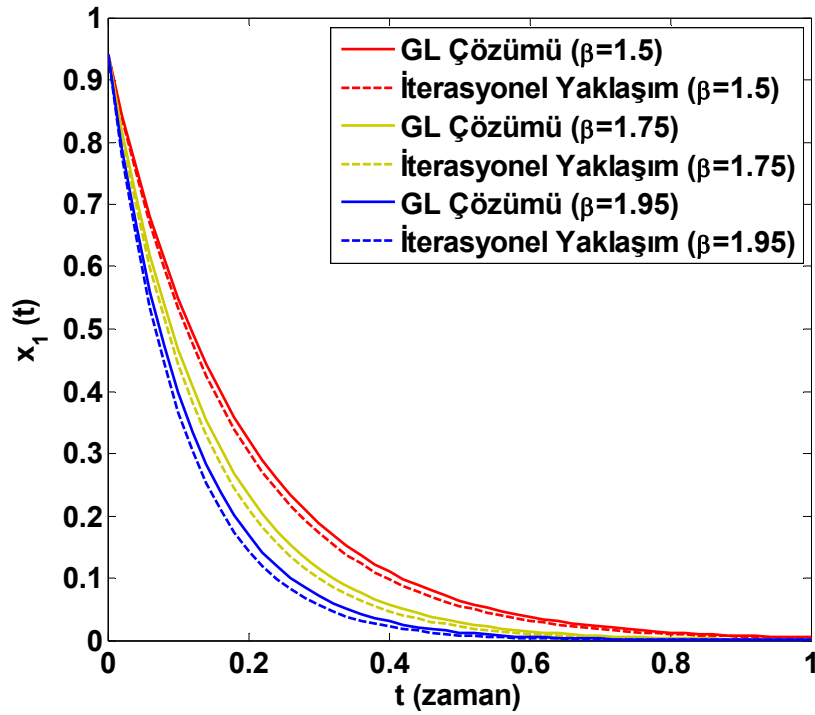
Şekil 7.2: Farklı Çözüm Yöntemlerinin sistemin $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonu üzerindeki etkisi: $\alpha = 1$, $\beta = 1.75$ ve $N = 100$.



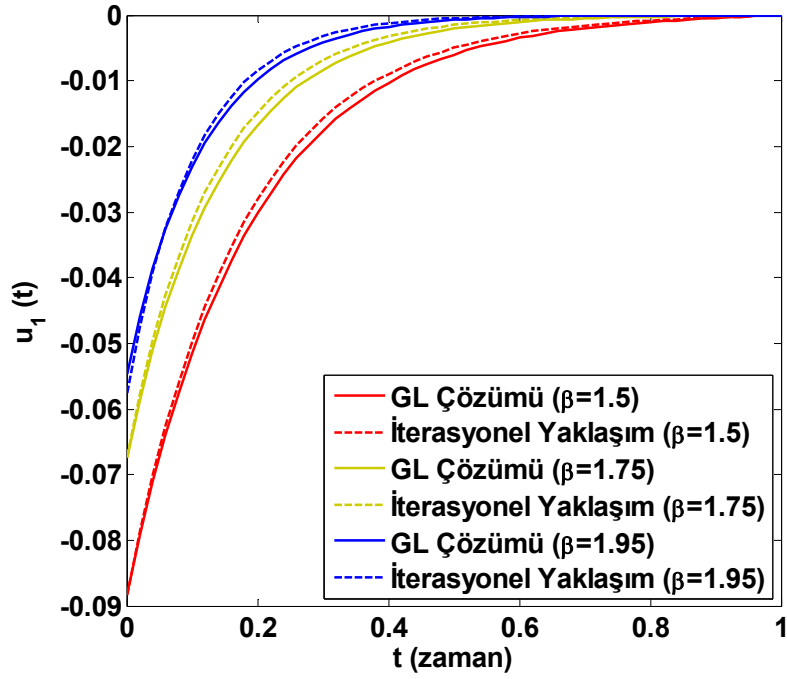
Şekil 7.3: $x_1(t)$ durum bileşen fonksiyonu için alt zaman aralık uzunluklarındaki değişimin çözüm yöntemleri üzerindeki etkisi: $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.75$.



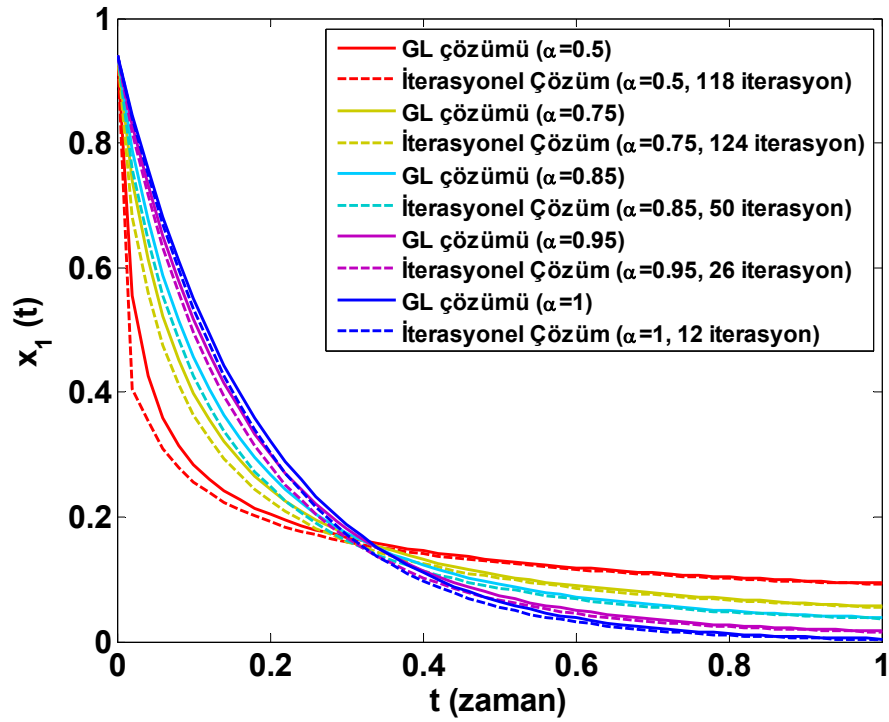
Şekil 7.4: $u_1(t)$ kontrol bileşen fonksiyonu için alt zaman aralık uzunluklarındaki değişimin çözüm yöntemleri üzerindeki etkisi: $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.75$.



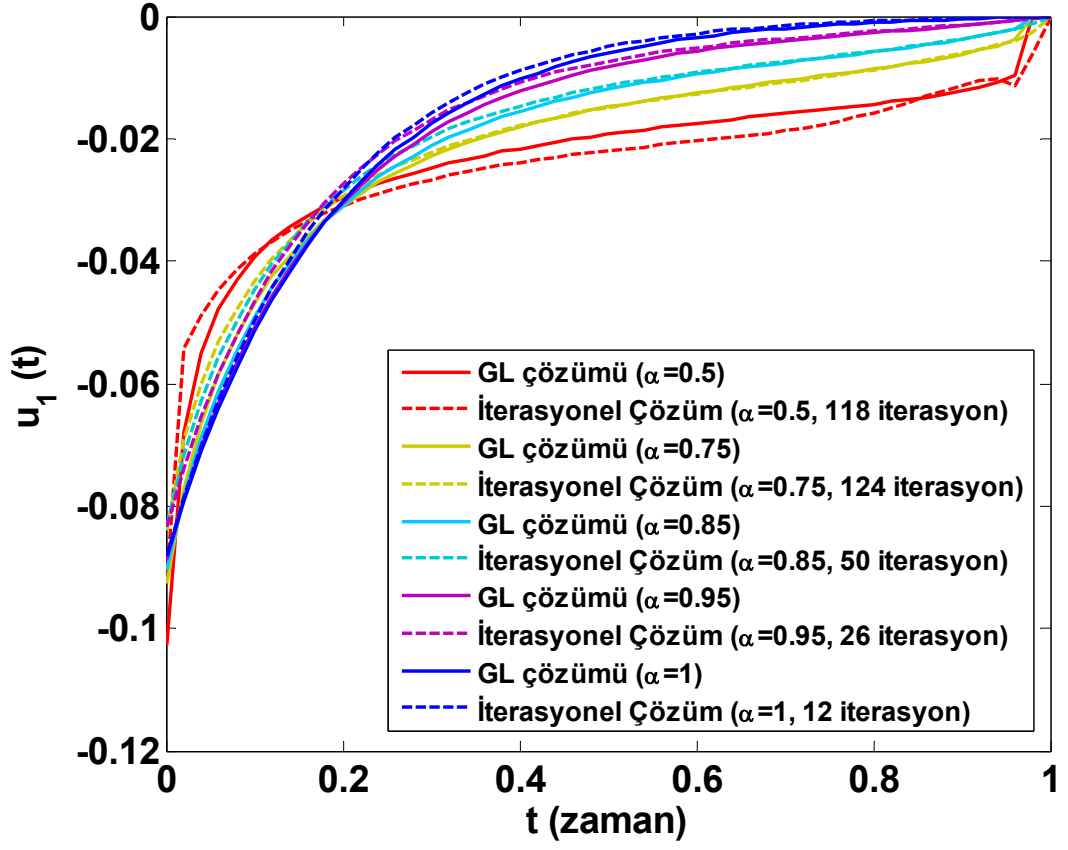
Şekil 7.5: β parametre değişiminin çözüm yöntemlerine göre $x_1(t)$ üzerindeki etkisi: $\alpha = 1$, $N = 50$.



Şekil 7.6: β parametre değişiminin çözüm yöntemlerine göre $u_1(t)$ üzerindeki etkisi: $\alpha = 1$, $N = 50$.



Şekil 7.7: α parametre değişiminin çözüm yöntemlerine göre $x_1(t)$ üzerindeki etkisi: $\beta = 1.5$, $N = 50$.



Şekil 7.8: α parametre değişiminin çözüm yöntemlerine göre $u_1(t)$ üzerindeki etkisi: $\beta = 1.5$, $N = 50$.

Tablo 7.1: GL ve İterasyonel yaklaşımlarının karşılaştırması

GL Yaklaşımı	Volterra İntegral Denklemlerine İterasyonel Yaklaşım
<ul style="list-style-type: none">➤ Sol veya sağ kesirli türevli diferansiyel denklemlere uygulanır. (bkz. (7.1)-(7.2) denklemleri)	<ul style="list-style-type: none">➤ Kesirli diferansiyel denklemlerin Volterra integral denklemlerine dönüştürülmesini gerektirir. (bkz. (7.21)-(7.22) denklemleri)
<ul style="list-style-type: none">➤ GL türev tanımının direkt olarak kullanıldığı bir yaklaşımdır. Bu amaçla GL tanımının RL ve Caputo ile olan ilişkileri göz önüne alınır.	<ul style="list-style-type: none">➤ İntegrallerin hesaplanmasında kullanılan iterasyonel bir yaklaşımdır.
<ul style="list-style-type: none">➤ Algoritmanın yazılmasında zaman ayrıklaştırması yapılır.	<ul style="list-style-type: none">➤ Algoritmanın yazılmasında zaman ayrıklaştırması yapılır.
<ul style="list-style-type: none">➤ KOKP'lerin çözümünde sistemin durum başlangıç ve kontrol son değerlerinin bilinmesi gerekir.	<ul style="list-style-type: none">➤ Sistemin hem durum hem de kontrol başlangıç değeri bilinmelidir. KOKP'lerde sistemin durum başlangıç ve kontrol son değerleri zaten bilinir. Ancak kontrolün başlangıç değeri bilinmediğinden tahmin yapılır.
<ul style="list-style-type: none">➤ Sadece zaman ayrıklaştırması gerektirdiğinden belli bir hata parametresi tanımlamak ve her defasında bunu test etmek yerine zaman alt aralık uzunlukları (h) küçültülerek çözümün geçerliliği test edilir.	<ul style="list-style-type: none">➤ İterasyonel yaklaşım kullanıldığından algoritmada durum ve kontrol için belli bir hata parametresi (ε) tanımlanır. Hatanın optimum değeri analitik çözüme yaklaşıncaya kadar test edilerek bulunur.
<ul style="list-style-type: none">➤ Belli bir h değerinden sonra çözümler örtüştüğünden, sonsuz küçük bir h değerine gerek yoktur. Bu da algoritmanın çalışma süresinden tasarruf sağlar. (bkz. Şekil 7.3-Şekil 7.4)	<ul style="list-style-type: none">➤ Hatanın değeri küçüldükçe hassasiyet artar. Ancak iterasyon sayısı da arttığından algoritmanın çalışma süresi uzar. (bkz. Şekil 7.3-Şekil 7.4)
<ul style="list-style-type: none">➤ α ve β parametre değişimlerinde iterasyonel yaklaşımla aralarındaki fark anlamlı değildir. (bkz. Şekil 7.5-Şekil 7.8)	<ul style="list-style-type: none">➤ α ve β parametre değişimlerinde GL yaklaşımıyla aralarındaki fark anlamlı değildir. (bkz. Şekil 7.5-Şekil 7.8)

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde sistem dinamikleri bir uzay-zaman kesirli difüzyon denklemi ile ifade edilen kesirli optimal kontrol probleminin sırasıyla kartezyen, kutupsal ve küresel koordinat sistemlerindeki çözümleri araştırılmıştır. Kesirli optimal kontrol problemleri ile ilgili literatür çalışmalarına bakıldığında sistem dinamiklerinin sadece zaman kesirli türevlerle tanımlandığı görülmektedir. Ancak doğada anormal difüzyon davranışı gösteren pek çok sistemin varlığı bilinmektedir ve bu sistemler hem zaman hem de uzay kesirli türev operatörleri ile tanımlıdır. Bu tezde ele alınan sistem yapıları bu türdendir. O halde uzay-zaman kesirli difüzyon denklemleri ile tanımlanan bu sistemlerin optimal kontrol problemlerinin ilk olarak bu tezde ele alınmış olması da tezin literatüre katkısı açısından önemlidir.

Tezde ele alınan dinamik sistem Caputo uzay kesirli türevi ve kesirli Laplace operatörü ile tanımlanmıştır. İlk olarak uzay-zaman kesirli türevli bu denklem yapısının zaman kesirli türevli denkleme indirgenmesi hedeflenmiştir. Bu amaçla problemlerin her birindeki sınır koşulları homojen olarak seçilerek kesirli Laplace operatörü için spektral bir gösterim yönteminin kullanılmasına zemin hazırlanmış ve böylece operatör, öz fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilmiştir. Buradaki öz fonksiyon aileleri koordinat sistemlerine göre değişmekle birlikte ortogonal ve dolayısıyla ortonormalleştirilebilir olmaları açısından önemlidir. Ancak bu şekilde spektral gösterimden faydalanılabilir. Ayrıca öz fonksiyonlardaki farklılık sistemin durum ve kontrol fonksiyonlarının davranışlarını da belirlemektedir öyle ki durum ve kontrol fonksiyonları öz fonksiyonların birer seri toplamı biçiminde tanımlanmıştır.

Optimallik koşullarını ifade eden Euler-Lagrange denklemlerinin belirlenmesinde Lagrange çarpanı tekniği kullanılmıştır. Böylece durum ve kontrol bileşen fonksiyonlarına bağlı sol ve sağ kesirli türevli denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sisteminin analitik ve nümerik çözümlerinin bulunması amaçlanmıştır. Nümerik çözüm yöntemi olarak Grünwald-Letnikov yaklaşımı kullanılmıştır. Bu yaklaşım, ileri-geri fark yöntemleri temeline dayanır ve zaman ayrıklaştırması ile algoritması oluşturulur. Algoritmaların oluşturulmasında MATLAB R2007b programı kullanılmıştır. Nümerik yöntemin geçerliliğini test

etmek için analitik çözümle yapılan karşılaştırmalar şekillerle desteklenmiştir. Nümerik yaklaşımın farklı problem parametrelerinin değişimi karşısındaki davranışı analiz edilmiş ve yine elde edilen sonuçlar şekilsel olarak değerlendirilmiştir.

Grünwald-Letnikov yaklaşımının tez probleminde tercih edilme nedenlerini vurgulamak için Volterra integral denklemlerinin nümerik çözümlerinde kullanılan iterasyonel bir yöntemle de nümerik çözümler elde edilmiştir. Burada test problemi olarak tezin 4. Bölüm problemi seçilmiştir. Ancak çalışmalar esnasında diğer bölüm problemleri için de benzer sonuçlar gözlenmiştir. İterasyonel yaklaşımda belirleyici olan iki unsur vardır: zaman ayırıklaştırması, hata değeri ve dolayısıyla iterasyon sayısı. Zaman ayırıklaştırması göz önüne alındığında her iki nümerik yaklaşım arasındaki fark anlamlı değildir. Ancak iterasyonel yöntemle elde edilen çözümlerin Grünwald-Letnikov çözümlerine yaklaşması ve dolayısıyla analitik çözüme yaklaşması için iterasyon sayısının artırılması gerekmektedir. Böylelikle hata değeri de küçültülerek hassasiyet artırılmıştır. Ancak burada algoritmanın çalışma süresi önemli bir ölçüttür. Bu anlamda iterasyonel yaklaşım daha hassas davranmıştır. Bu hassasiyet algoritma çalışma süresini uzattığından istendik bir durum değildir. Diğer bir deyişle farklı parametre değişimlerinde iterasyonel yaklaşım algoritmasının çalışma süresinin uzamış olması bir dezavantajdır. Ayrıca hatanın optimum değerini belirlemek için farklı hata değerleri test edilmiştir. Burada ise optimum değer belirlenmesi her zaman kolay olmayabilir. Bu türlü problemler Grünwald-Letnikov yaklaşımında ortaya çıkmamaktadır. Çünkü yaklaşımda direkt olarak türev tanımları kullanılır. Sonuç olarak İterasyonel yöntem alternatif bir çözüm yöntemi olarak değerlendirilmiştir. Ancak her iki yöntemin avantaj ve dezavantajları karşılaştırıldığında Grünwald-Letnikov direkt yaklaşımının hem tanımlanması hem de algoritması açısından tercih edilebilirliği daha yüksektir.

9. KAYNAKLAR

- [1] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I., *Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications*, Longhorne Pennsylvania: Gordon and Breach, (1993).
- [2] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press, (1999).
- [3] Miller, K.S. and Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York: Wiley, (1993).
- [4] Oldham, K.B. and Spanier, J., *The Fractional Calculus*, New York: Academic Pres, (1974).
- [5] Hilfer, R. (Ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, New Jersey, London, Hong Kong: Word Scientific Publishing Co., (2000).
- [6] Magin, R.L., *Fractional calculus in bioengineering*, Connecticut: Begell House Publishers, (2004).
- [7] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, The Netherlands: Elsevier, (2006).
- [8] Lakshmikantham, V., Leela, S. and Devi, J.V., *Theory of Fractional Dynamic System*, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, (2009).
- [9] Tarasov, V.E., *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer, (2010).
- [10] Turski, A.J., Atamaniuk, B. and Turska, E. "Application of Fractional Derivative Operators to Anomalous Diffusion and Propagation Problems", ArXiv: Math-ph/0701068, (2007).
- [11] Naidu, D.S., *Optimal Control Systems*, New York: CRC Press, (2003).
- [12] Agrawal, O.P., "A General Formulation and Solution Scheme For Fractional Optimal Control Problems", *Nonlinear Dynam.*, 38, 323-337, (2004).

- [13] Klages R., Radons G. and Sokolov M. (Eds.), *Anomalous Transport*, Weinheim: Wiley-VCH, (2007).
- [14] Feller, W., “On a generalization of Marcel Riesz’ potentials and the semi-groups generated by them”, *Meddelanden Lunds Universitets Matematiska Seminarium (Comm. S’em. Math’em. Universit’e de Lund)* Tome suppl. d’edi’e a M. Riesz, Lund, 73-81, (1952).
- [15] Gorenflo, R. and Mainardi, F., “Random walk models for space- fractional diffusion processes”, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 1, 167-1991, (1998).
- [16] Gorenflo, R. and Mainardi, F., “Feller fractional diffusion and Lévy stable motions”, (eds: O.E. Barndorff-Nielsen, S.E. Graversen and T. Mikosch), *Conference on Levy Processes: Theory and Applications*, Denmark, (1999).
- [17] Gorenflo, R. Fabritiis, G. De and Mainardi, F., “Discrete random walk models for symmetric Levy-Feller diffusion processes”, *Physica A*, 269, 79–89, (1999).
- [18] Gorenflo, R. and Mainardi, F., “Approximation of Levy–Feller diffusion by random walk”, *J. Anal. Appl.*, 18 (2), 231–246, (1999).
- [19] Mainardi, F., Luchko, Yu. and Pagnini, G., “The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation”, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 4 (2), 153-192, (2001).
- [20] Gorenflo, R., Mainardi, F., Moretti, D., Pagnini, G. and Paradisi, P., “Fractional diffusion: probability distributions and random walk models”, *Physica A*, 305, 106-112, (2002).
- [21] Gorenflo, R., Mainardi, F., Moretti, D., Pagnini, G. and Paradisi, P., “Discrete random walk models for space–time-fractional diffusion”, *Chem. Phys.*, 284 (1/2), 521-541, (2002).
- [22] Riesz, M., “L’integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy”, *Acta Mathematica*, 81 (1-2) 1-223, (1949).
- [23] Mainardi, F., Paradisi, P. And Gorenflo, R. “Probability distributions generated by fractional diffusion equations”, (eds: J. Kertesz and I. Kondor), *Workshop on Econophysics*, Budapest, (1998).

- [24] Saichev, A.I. and Zaslavsky, G.M., “Fractional kinetic equations: solutions and applications”, *Chaos*, 7, 753-764, (1997).
- [25] Yang, Q., Liu, F. and Turner, I., “Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives”, *Applied Mathematical Modelling*, 34 (1), 200–218, (2010).
- [26] Ilic, M., Liu, F., Turner, I. and Anh, V., “Numerical approximation of a fractional-in space diffusion equation (II)-with nonhomogeneous boundary conditions”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 9 (4), 333–349, (2006).
- [27] Huang, F. and Liu, F., “The fundamental solution of the space-time fractional advection dispersion equation”, *J. Appl. Math. & Computing*, 18(1-2), 339–350, (2005).
- [28] Ilic, M., Liu, F., Turner, I. and Anh, V., “Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation, I”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 8 (3), 323–341, (2005).
- [29] Liu, Q., Liu, F., Turner, I. and Anh, V., “Approximation of the L’evy-Feller advection dispersion process by random walk and finite difference method”, *Journal of Computational Physics*, 222 (1), 57–70, (2007).
- [30] Zhang, H., Liu, F. and Anh, V., “Numerical approximation of L’evy-Feller diffusion equation and its probability interpretation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206 (2), 1098–1115, (2007).
- [31] Ciesielski, M. and Leszczynski, J., “Numerical solutions to boundary value problem for anomalous diffusion equation with Riesz-Feller fractional operator”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 44 (2), 393-403, (2006).
- [32] Zhuang, P. and Liu, F., “Space-Time Riesz Fractional Partial Differential Equations with Periodic Conditions”, *Numer. Math. J. Chinese (English Ser.)*, 16, 181-192, (2007).
- [33] Özdemir, N., Avcı, D. ve İskender, B.B., “The numerical solutions of a two-dimensional space-time Riesz-Caputo fractional diffusion equation”, *An*

International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA), 1, 17–26, (2011).

[34] Özdemir, N. ve Avci, D., “Numerical Solution of a Two-Dimensional Anomalous Diffusion Problem”, (eds: D. Baleanu, J.A.T. Machado and A.C.J. Luo), *Fractional Dynamics and Control*, New York: Springer, 249-261, (2012).

[35] Chen, J., Liu, F., Turner, I. and Anh, V., “The Fundamental and Numerical Solutions of The Riesz Space-Fractional Reaction-Dispersion Equation”, *ANZIAM J.*, 50, 45-57, (2008).

[36] Shen, S., Liu, F., Anh, V. and Turner, I., “The fundamental solution and numerical solution of the Riesz fractional advection-dispersion equation”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 73 (6), 850–872, (2008).

[37] Shen, S., Liu, F. and Anh, V., “Fundamental solution and discrete random walk model for a time-space fractional diffusion equation of distributed order”, *J Appl. Math. Comput.*, 28, 147-164, (2008).

[38] Q. Yang, I. Turner, and F. Liu. Analytical and numerical solutions for the time and space-symmetric fractional diffusion equation. *ANZIAM J.*, 50:C800–C814, (2009).

[39] Zaslavsky, G.M., “Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 76, 110-122, (1994).

[40] Yang, Q., Turner, I., Liu, F. and Ilić, M., “Novel numerical methods for solving the time space fractional diffusion equation in 2D”, *SIAM J. Sci. Comput.*, 33 (3), 1159–1180, (2011).

[41] Povstenko, Y.Z., “Fractional heat conduction equation and associated thermal stresses”, *J. Thermal Stresses*, 28 (1), 83-102, (2005).

[42] Povstenko, Y.Z., “Thermoelasticity based on fractional heat conduction equation”, (eds: F. Ziegler, R. Heuer and C. Adam), *6th Int. Congr. Thermal Stresses*, 2, Vienna, 501-504, (2005).

[43] Povstenko, Y.Z., “Thermoelasticity that uses fractional heat conduction equation”, *Journal of Mathematical Sciences*, 162 (2), 296-305, (2009).

- [44] Povstenko, Y.Z., “Theory of thermoelasticity based on the space-time fractional heat conduction equation”, *Phys. Scr. T136*, 014014 (6pp), doi:10.1088/0031-8949/2009/T136/014017, (2009).
- [45] Lin, R., Liu, F., Anh, V. and Turner, I., “Stability and convergence of a new explicit finitedifference approximation for the variable-order nonlinear fractional diffusion equation”, *Applied and Computational Mathematics*, 212 (2), 435–445, (2009).
- [46] Zhuang, P., Liu, F., Anh, V. and Turner, I., “Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion with a nonlinear source term”, *SIAM J. on Numerical Analysis*, 47 (3), 1760–1781, (2009).
- [47] Metzler, R. and Klafter., J., “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach”, *Physics Reports*, 339 (1), 1–77, (2000).
- [48] Benson, D.A., Wheatcraft, S.W. and Meerschaert, M.M., “Application of a fractional advection-dispersion equation”, *Water Resources Research*, 36 (6), 1403–1412, (2000).
- [49] Benson, D.A., Wheatcraft, S.W. and Meerschaert, M.M., “The fractional-order governing equation of L’evy motion”, *Water Resources Research*, 36 (6), 1413–1423, (2000).
- [50] Yang, Q., Liu, F. and Turner, I., “Computationally efficient numerical methods for time and space fractional Fokker-Planck equations”. *Physica Scripta T136*, 014026 (7 pp), doi:10.1088/0031-8949/2009/T136/014026, (2009).
- [51] Agrawal, O.P., “A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems”, *J. Vib. Control*, 14, 1291-1299, (2008).
- [52] Agrawal, O.P., “A Quadratic Numerical Scheme For Fractional Optimal Control Problems”, *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 130 (1), 011010 (6 pp), (2008).
- [53] Agrawal, O.P. and Baleanu, D., “A Hamiltonian Formulation and A Direct Numerical Scheme For Fractional Optimal Control Problems”, *J. Vib. Control*, 13, 1269-1281, (2007).

- [54] Baleanu, D., Defterli, Ö. and Agrawal, O.P., “A Central Difference Numerical Scheme For Fractional Optimal Control Problems”, *J. Vib. Control*, 15, 583-597, (2009).
- [55] Tangpong, X.W. and Agrawal, O.P., “Fractional Optimal Control of Continuum Systems”, *J. Vib. Acoust.*, 131 (2), 021012 (6 pp), doi:10.1115/1.3025833, (2009).
- [56] Agrawal, O.P., “Fractional Optimal Control of A Distributed System Using Eigenfunctions”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3 (2), 021204.1-021204.6, doi:10.1115/1.2833873, (2008).
- [57] Özdemir, N., Agrawal, O.P., İskender, B.B. and Karadeniz, D., “Fractional Optimal Control of A 2-Dimensional Distributed System Using Eigenfunctions”, *Nonlinear Dynam.*, 55 (3), 251-260, (2009).
- [58] Özdemir, N., Agrawal, O.P., Karadeniz, D. and İskender, B.B., “Fractional Optimal Control of An Axis-Symmetric Diffusion-Wave Propagation”, *Phys. Scr. T134*, (2009), 014024 (5 pp), doi:10.1088/0031-8949/2009/T136/014024, (2009).
- [59] Özdemir, N., Karadeniz, D. and İskender, B.B., “Fractional Optimal Control Problem of A Distributed System in Cylindrical Coordinates”. *Phys. Lett. A*, 373, 221-226, (2009).
- [60] Hasan, M.M., Tangpong, X.W. and Agrawal, O.P., “Fractional Optimal Control of Distributed Systems in Spherical and Cylindrical Coordinates”. *J. Vib. Control*, 18 (10), 1506-1525, (2012).
- [61] Biswas, R. K. and Sen., S., “Numerical Method For Solving Fractional Optimal Control Problems”, *Proc. of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2009)* 4, San Diego, California, USA, 1205-1208, (2009).
- [62] Agrawal, O.P., “A Numerical Scheme and an Error Analysis for a Class of Fractional Optimal Control Problems”, *Proc. of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2009)* 4, San Diego, California, USA, 1253-1260, (2009).

- [63] Agrawal, O.P., Defterli, Ö. and Baleanu D., “Fractional Optimal Control Problems with Several State and Control Variables” *J. Vib. Control*, 16 (2), 1967-1976, (2010).
- [64] Defterli, Ö., “A Numerical Scheme for Two-Dimensional Optimal Control Problems with Memory Effect”, *Comput.Math. Appl.*, (59), 1630-1636, (2010).
- [65] Alipour, M., Rostamy, D. and Baleanu, D., “Solving multi-dimensional fractional optimal control problems with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices”. *J. Vib. Control*, doi: 10.1177/1077546312458308, (2012).
- [66] Biswas, R.K. and Sen, S., “Fractional Optimal Control Problems: A Pseudo-State-Space Approach”, *J. Vib. Control*, 17 (7), 1034-1041, (2011).
- [67] Biswas, R.K. and Sen, S., “Fractional Optimal Control Problems With Specified Final Time”, *J. Vib. Control*, 6 (2), 021009 (6 pp), doi:10.1115/1.4002508, (2011).
- [68] Baleanu, D., Maraaba, T. and Jarad, F., “Fractional Variational Principles With Delay”. *J. Phys. A Math. Theor.*, 41 (31), 315403, doi:10.1088/1751-8113/41/31/315403, (2008).
- [69] Jarad, F., Abdeljawad, T. and Baleanu, D., “Fractional Variational Optimal Control Problems With Delayed Arguments”, *Nonlinear Dynam.*, 62 (3), 609-614, (2010).
- [70] Tricaud, C. and Chen, Y.Q., “Solution of Fractional Order Optimal Control Problems Using SDV-based Rational Approximations”, *ACC'09 Proceedings of the 2009 conference on American Control Conference*, Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA, 1430–1435, (2009).
- [71] Tricaud, C. and Chen, Y.Q., “An Approximate Method for Numerically Solving Fractional Order Optimal Control Problems of General Form”, *Comput. Math. Appl.*, 59 (5), 1644-1655, (2010).
- [72] Tricaud, C. and Chen, Y.Q., “Time-Optimal Control Systems with Fractional Dynamics”, *International Journal of Differential Equations*, 2010, 461048 (16 pp), doi:10.1155/2010/461048, (2010).

- [73] Frederico, G. and Torres, D., “Noether’s Theorem For Fractional Optimal Control Problems”, *Proc. of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications 2*, Porto, Portugal, 142-147, (2006).
- [74] Frederico, G. and Torres, D., “Fractional Optimal Control in The Sense of Caputo and The Fractional Noethers Theorem”, *Int. Math. Forum*, 3 (10), 479-493, (2008).
- [75] Frederico, G. and Torres, D., “Fractional Conservation Laws in Optimal Control Theory”, *Nonlinear Dynam.*, 53, 215-222, (2008).
- [76] Frederico, G. and Torres, D., “Noether’s Symmetry Theorem For Variational and Optimal Control Problems with Time Delay”, *Numerical Algebra, Control and Optimization (NACO)*, (in press) (2012).
- [77] Jelicic, Z.D. and Petrovacki, N., “Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 38 (6), 571-581, (2009).
- [78] Rapaic, M.R. and Jelicic, Z.D., “Optimal Control of a Class of Fractional Heat Diffusion Systems”, 62 (1-2), 39-51, (2010).
- [79] Wang, J.R. and Zhou, Y., “A Class of Fractional Evolution Equations and Optimal Controls”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 12 (1), 262-272, (2011).
- [80] Wang, J.R. and Zhou, Y., “Time Optimal Control Problem of a Class of Fractional Distributed Systems”, *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.*, 3 (3), 363-382, (2011).
- [81] Wang, J.R. and Zhou, Y., “Study of An Approximation, Process of Time Optimal Control for Fractional Evolution Systems in Banach Spaces”, *Adv. Difference Equ.*, 385324 (16 pp), doi:10.1155/2011/385324, (2011).
- [82] Wang, J.R., Zhou, Y. and Wei, W., “A Class of Fractional Delay Nonlinear Integrodifferential Controlled Systems in Banach Spaces”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 16 (10), 4049-4059, (2011).
- [83] Mophou, G.M., “Optimal control of fractional diffusion Equation”, *Comput. Math. Appl.*, 61 (1), 68-78, (2011).

- [84] Matignon, D., “Optimal Control of Fractional Systems: A Diffusive Formulation”, *19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems - MTNS 2010*, Budapest, Hungary, (2010).
- [85] Ding, Y., Wang, Z. and Ye, H., “Optimal Control of a Fractional-Order HIV-Immune System With Memory”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20 (3), 763-769, (2012).
- [86] Özdemir, N. ve Avcı, D., “Optimal control of a linear time-invariant space-time fractional diffusion process”, *J. Vib. Control*, doi:10.1177/1077546312464678, (2012).
- [87] Özdemir, N. ve Avcı, D., “Fractional Optimal Control Problem of An Anomalous Diffusion Process in Polar Coordinates”, *Fifth German Polish Conference on Optimization Methods and Applications (GPCO5)*, Dobczyce-Poland, (2011).
- [88] Asmar, N.H., *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Upper Saddle River, New Jersey, USA: Pearson Prentice Hall, (2005).
- [89] Abramowitz, M. and Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, USA: Dover Publications, (1965).
- [90] Kreyzig, E., *Introduction to Functional Analysis with Applications*, New York: John Wiley and Sons, (1978).
- [91] Diethelm, K., Ford, N.J. and Freed, A.D., “A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations ”, *Nonlinear Dynamics*, 29 (1-4), 3-22, (2002).