

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

OPTİMAL KONTROL VE OPTİMİZASYON

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nilgün CAN

Balıkesir, Ocak - 2008

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

OPTİMAL KONTROL VE OPTİMİZASYON

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nilgün CAN

Balıkesir, Ocak – 2008

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK
ANABİLİM DALI

OPTİMAL KONTROL VE OPTİMİZASYON

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nilgün CAN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

Sınav Tarihi: 31.01.2008

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Ramazan YAMAN (BAÜ)

Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (Danışman-BAÜ)

Balıkesir, Ocak 2008

ÖZET

OPTİMAL KONTROL VE OPTİMİZASYON

Nilgün CAN

Bahkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR)

Bahkesir, 2008

Bu tezin amacı uygulamalı matematiğin ve mühendisliğin çeşitli dallarında kullanılan optimal kontrol ve optimizasyonu tanıtmaktır. Bu nedenle öncelikle optimal kontrol sistemleri ve optimizasyon ile ilgili temel bilgileri ortaya koymaktadır. Tezde optimal kontrol, optimizasyon, varyasyonlar ve lineer kuadratik optimal kontrol sistemleri ile ilgili bilgiler temel olarak kullanılmıştır.

Optimal kontrol için optimizasyon probleminin fiziksel süreç modeli, amaç fonksiyonu, durum ve kontrol değişkenlerinin sınırları açıklanmıştır. Fonksiyonun optimumu hesaplanırken Lagrange çarpanı metodu ve direkt metottan yararlanılmıştır. Fonksiyonelin optimizasyonu için Lagrange, Hamilton denklem formu ve Pontryagin prensibi kullanılmıştır. Lineer kuadratik optimal kontrol sistemleri sonlu zamanlı olarak incelenmiş ve optimal performans indeksi ile optimal kontrol belirtilmiştir. Lineer kuadratik Riccati sistemi, matris diferansiyel Riccati denklemi analitik çözümüyle açıklanmıştır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : Optimal kontrol / Optimal Durum / Optimizasyon / Performans İndeksi / Varyasyon

ABSTRACT

OPTIMAL CONTROL AND OPTIMIZATION

Nilgün CAN

Balikesir University, Institute of Science, Department of Mathematics

(M. Sc. Thesis / Supervisor : Assist. Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR)

Balikesir - Turkey, 2008

The aim of this thesis is to introduce optimal control and optimization which are used in various branches of applied mathematics and engineering. In accordance with this, first it also manifests all the basic informations about optimal control systems and optimization. In this thesis, information concerning optimal control, optimization, variations and linear quadratic optimal control systems is explained in basic terms.

Furthermore, for optimal control, constraints of coefficients of control and state, purpose function and physical process model of optimization matter are explained. While calculating the optimum of the function Langrange multiplier method and direct method were being utilized. For the optimization of the function the equation of Lagrange, Hamilton formalism and Pontryagin principle are used. Linear quadratic optimal control systems are examined in accordance with finite-time and remarked as optimal performance index and optimal control. Linear quadratic Riccati system is explained by means of the analytical solution of matrix differential Riccati equation.

KEY WORDS : Optimal control / Optimal state / Optimization / Performance Index / Variation.

İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER | ii |
| ABSTRACT, KEY WORDS | iii |
| İÇİNDEKİLER | iv |
| SEMBOL LİSTESİ | vii |
| ŞEKİL LİSTESİ | viii |
| TABLO LİSTESİ | ix |
| ÖNSÖZ | x |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1 Klasik ve Modern Kontrol | 1 |
| 1.2 Optimizasyon | 3 |
| 1.3 Optimal Kontrol | 4 |
| 1.3.1 Sistem | 5 |
| 1.3.2 Performans İndeksi | 6 |
| 1.3.2.1 Örnek Optimal-Zamanlı Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi | 6 |
| 1.3.2.2 Örnek Optimal-Yakıtlı Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi | 6 |
| 1.3.2.3 Örnek Minimum-Enerjili Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi | 7 |
| 1.3.2.4 Örnek Bitiş Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi | 7 |
| 1.3.2.5 Örnek Genel Optimal Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi | 8 |
| 1.3.3 Sınırlar | 9 |
| 1.3.4 Optimal Kontrol Sisteminin Biçimsel Durumu | 9 |
| 1.4 Tarihi Tur | 10 |
| 1.4.1 Varyasyon Hesabı | 10 |
| 1.4.2 Optimal Kontrol Teori | 12 |
| 2. OPTİMİZASYON | 14 |
| 2.1 Giriş | 14 |
| 2.2 Tarihi Gelişimi | 15 |
| 2.3 Optimizasyon Probleminin İfadesi | 15 |
| 2.4 Klasik Optimizasyon | 16 |
| 2.5 Tek Değişkenli Optimizasyon | 16 |
| 2.5.1 Teorem | 17 |
| 2.5.2 Teorem | 19 |
| 2.5.3 Örnek | 20 |
| 2.6 İki Değişkenli Optimizasyon | 21 |

| | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| 2.6.1 Örnek | 23 |
| 2.7 Kısıtsız Çok Değişkenli Optimizasyon | 23 |
| 2.7.1 Tanım | 24 |
| 2.7.2 Teorem | 24 |
| 2.7.3 Teorem | 25 |
| 2.7.4 Teorem | 27 |
| 2.7.5 Örnek | 28 |
| 2.8 Konveks ve Konkav Fonksiyonlar | 29 |
| 2.9 Eşitlik Kısıtlı Çok Değişkenli Optimizasyon | 30 |
| 2.9.1 Lagrange Çarpanları Yöntemi | 30 |
| 2.9.1.1 Örnek | 32 |
| 2.10 Eşitsizlik Kısıtlı Optimizasyon ve Kuhn Tucker Şartları | 35 |
| 2.10.1 Örnek | 37 |
| 2.11 Newton Yöntemi | 38 |
| 2.11.1 Örnek | 39 |
| 3. VARYASYON HESABI VE OPTİMAL KONTROL | 41 |
| 3.1 Ana Kavramlar | 41 |
| 3.1.1 Fonksiyon ve Fonksiyonel | 41 |
| 3.1.2 Artış | 41 |
| 3.1.2.1 Örnek | 42 |
| 3.1.2.2 Örnek | 43 |
| 3.1.3 Diferansiyel ve Varyasyon | 43 |
| 3.1.3.1 Örnek | 44 |
| 3.1.3.2 Örnek | 45 |
| 3.2 Bir Fonksiyon ve Fonksiyonelin Optimumu | 46 |
| 3.2.1 Tanım Bir Fonksiyonun Optimumu | 46 |
| 3.2.2 Tanım Bir Fonksiyonelin Optimumu | 47 |
| 3.2.3 Teorem | 47 |
| 3.3 Temel Varyasyon Problemi | 48 |
| 3.3.1 Sabit-Bitiş Zamanlı ve Sabit-Bitiş Durumlu Sistem | 48 |
| 3.3.2 Lemma | 52 |
| 3.3.3 Euler-Lagrange Denkleminin Yorumu | 53 |
| 3.3.4 Euler-Lagrange Denklemi İçin Farklı Durumlar | 55 |
| 3.3.5 Örnek | 56 |
| 3.3.6 Örnek | 58 |
| 3.4 İkinci Varyasyon | 59 |
| 3.4.1 Örnek | 61 |
| 3.5 Şartlarla Fonksiyonların Ekstremleri | 61 |
| 3.5.1 Örnek | 61 |
| 3.5.2 Direkt Metot | 64 |
| 3.5.3 Lagrange Çarpan Metodu | 66 |
| 3.5.4 Teorem | 69 |
| 3.6 Şartlarla Fonksiyonellerin Ekstremleri | 70 |
| 3.6.1 Örnek | 75 |
| 3.7 Optimal Kontrol Sistemlerine Varyasyonel Yaklaşım | 78 |
| 3.7.1 Aşama 1: Bir Fonksiyonelin Optimizasyonu | 78 |
| 3.7.2 Aşama 2: Bir Fonksiyonelin Optimizasyonu İle Şartı | 79 |

| | <u>Sayfa</u> |
|---|---------------------|
| 3.7.3 Aşama 3: Lagrange Denklem Formuyla Optimal Kontrol Sistem | 81 |
| 3.7.4 Aşama 4: Hamilton Denklem Formuyla Optimal Kontrol Sistem: (Pontryagin Prensibi) | 82 |
| 3.7.4.1 Bitiş Maliyet Fonksiyonlu Serbest-Bitiş Nokta Sistemi | 84 |
| 3.7.5 Örnek | 85 |
| 3.7.6 Örnek | 88 |
| 3.7.7 Önemli Özellikler | 90 |
| 4. LİNEER QUADRATİK OPTİMAL KONTROL SİSTEMLERİ | 94 |
| 4.1 Problem Formülleme | 94 |
| 4.2 Sonlu Zamanlı Lineer Quadratik Düzenleyici | 96 |
| 4.2.1 Önemli Özellikler | 98 |
| 4.2.2 Genel Performans İndeksli LQR Sistemi | 102 |
| 4.3 Matris Diferansiyel Riccati Denklemine Analitik Çözüm | 103 |
| 4.3.1 Örnek | 106 |
| 5. VARYASYON HESABI, OPTİMAL KONTROL VE OPTİMİZASYONUN KARŞILAŞTIRILMASI | 109 |
| 6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME | 110 |
| 7. KAYNAKLAR | 112 |

SEMBOL LİSTESİ

| <u>Simge</u> | <u>Tanımı</u> |
|-------------------------------|--|
| $u(t)$ | Kontrol değişkeni |
| $x(t)$, | Durum değişkeni |
| $e(t)$ | Hata değişkeni |
| $u^*(t)$ | Optimal kontrol değişkeni |
| $y(t)$ | Çıkış değişkeni |
| $x^t(t)$ | Durum matrisinin transpozese |
| CF | Maliyet fonksiyonu |
| PI | Performans indeksi |
| SISO | Tek giriş ve tek çıkışlı sistem |
| MIMO | Çok giriş ve çok çıkışlı sistem |
| $\Delta f(t, \Delta t)$ | Fonksiyonun t değişkenine bağlı artışı |
| $\Delta J(x(t), \delta x(t))$ | Fonksiyonelin $x(t)$ fonksiyonuna bağlı artışı |
| df | f nin diferansiyeli |
| \dot{f} | f nin türevi |
| $()_*$ | Optimallik şartı |
| L | Lagrange denklemi |
| $\lambda(t)$ | Lagrange çarpanı (costate fonksiyonu) |
| $\delta x(t)$ | Durum fonksiyonunun varyasyonu |
| $\delta u(t)$ | Kontrol fonksiyonunun varyasyonu |
| H | Hamilton denklemi (Pontryagin fonksiyonu) |
| OLOC | Açık-döngü optimal kontrolcü |
| CLOC | Kapalı-döngü optimal kontrolcü |
| LTV | Lineer zamanla değişen sistem |
| DRE | Diferansiyel Riccati denklemi |
| TPBVP | İki-nokta sınır değer problemi |
| LQR | Lineer kvadratik düzenleyici |
| LQG | Lineer kvadratik Gauss |
| max | Maksimum |
| min | Minimum |

ŞEKİL LİSTESİ

| Şekil | | |
|------------------------|--|---------------------|
| <u>Numarası</u> | <u>Adı</u> | <u>Sayfa</u> |
| Şekil 1.1 | Klasik kontrol konfigürasyonu | 2 |
| Şekil 1.2 | Modern kontrol konfigürasyonu | 3 |
| Şekil 1.3 | Modern kontrol sisteminin bileşenleri | 4 |
| Şekil 1.4 | Optimal kontrol problemi | 5 |
| Şekil 2.1 | $f(x)$ in minimum, $-f(x)$ in maksimumu ile aynı olması | 14 |
| Şekil 2.2 | Yerel ve bölgesel minimum (maksimum) noktalar | 17 |
| Şekil 2.3 | x_0 da $f(x)$ in türevinin olmaması durumu | 19 |
| Şekil 2.4 | Durağan (dönüm) nokta | 19 |
| Şekil 2.5 | Konveks fonksiyon | 30 |
| Şekil 2.6 | Konkav fonksiyon | 30 |
| Şekil 3.1 | Bir $f(t)$ fonksiyonunun Δf artışı, df diferansiyeli ve \dot{f} türevi | 42 |
| Şekil 3.2 | J fonksiyonelinin ΔJ artışı ve δJ ilk varyasyonu | 45 |
| Şekil 3.3 | Sabit-bitiş zamanlı ve sabit-bitiş durumlu sistem | 50 |
| Şekil 3.4 | Sıfırdan farklı $g(t)$ ve $\delta x(t)$ keyfisi | 53 |
| Şekil 3.5 | Yay uzunluğu | 57 |
| Şekil 3.6 | 3.7.5 Örneği için optimal kontrolör | 87 |
| Şekil 3.7 | Açık-döngü optimal kontrol | 93 |
| Şekil 3.8 | Kapalı-döngü optimal kontrol | 93 |
| Şekil 4.1 | Kapalı-döngü optimal kontrol uygulaması | 112 |

TABLO LİSTESİ

| Tablo | | |
|------------------------|---|---------------------|
| <u>Numarası</u> | <u>Adı</u> | <u>Sayfa</u> |
| Tablo 2.1 | Örnek 2.11.1 için Newton yöntemi | 40 |
| Tablo 5.1 | Varyasyon hesabı, optimal kontrol ve optimizasyon probleminin karşılaştırılması | 109 |

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince değerli vaktini ayırıp, bilgi ve tecrübeleri ile beni yönlendiren, her türlü kaynağını, ilgisini, desteğini ve yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Necati Özdemir'e;

Bu günlere gelmemi sağlayan, sevgisi ve ilgisi ile hep yanımda olan canım aileme teşekkür ederim...

Balıkesir, 2008

Nilgün CAN

1. GİRİŞ

Bu ilk bölümde, optimal kontrol ve optimizasyon ile ilgili kavramlar verilmiş ve varyasyon hesabı ve optimal kontrolün tarihine değinilmiştir.

1.1 Klasik ve Modern Kontrol

Klasik kontrol teori Laplace dönüşümlerine dayalı tek giriş ve tek çıkışlı sistemlerle ilgilidir. Sistemi blok diyagram formunda göstermede kullanılır.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1.1)$$

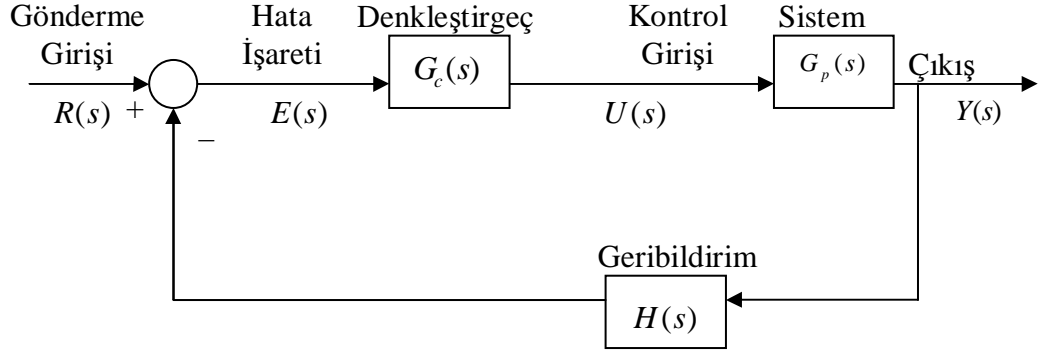
s burada Laplace değişkeni ve

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) \quad (1.2)$$

tir.

- i. $e(t)$ hatası ile sistemin girişi $u(t)$ belirlenir.
- ii. Tüm değişkenler geribildirim için uygun değildir, birçok durumda sadece tek bir çıkış değişkeni geribildirim için uygundur.

Modern kontrol teori birinci dereceli diferansiyel denklemlerin durum değişken gösterimini temel alan çok giriş ve çok çıkışlı sistemlerle ilgilidir. Burada sistem, durum değişkenleri ile karakterize edilir, yani, lineerdir, zaman sabiti formu ile aşağıdadır.



Şekil 1.1 Klasik kontrol konfigürasyonu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.4)$$

Burada nokta diferansiyel; t , $x(t)$, $u(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla n , r , m boyutlu durum, kontrol ve çıkış vektörleridir. A $n \times n$ durum, B $n \times r$ giriş, C $m \times n$ çıkış, D $m \times r$ dönüşüm matrisidir. Benzer olarak bir lineer olmayan sistem tanımı aşağıdadır.

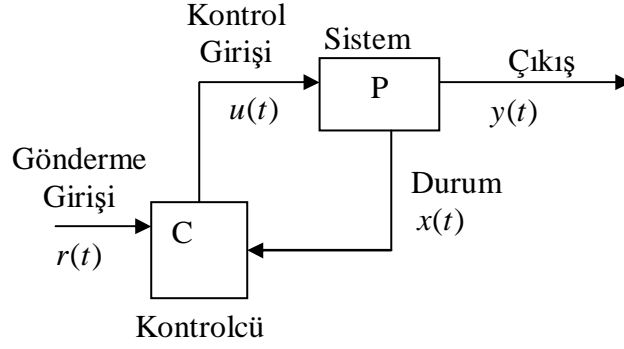
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.5)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (1.6)$$

Modern teori tüm durum değişkenlerinin uygun ağırlık sonrasında geribildirim olduğunu belirler.

- i.** $u(t)$ girişi, $x(t)$ sistem durumu ve $r(t)$ gönderme işareti ile yürütülen kontrolcüler belirlenir.
- ii.** Tüm veya birçok durum değişkeni kontrol için uygundur.
- iii.** Geniş çaplı bilgisayar simülasyonu için uyumlu olan matris teorisine bağlıdır.

Durum değişken gösterimi benzersiz olarak dönüşüm fonksiyonunu belirtir. Verilen bir dönüşüm fonksiyonu için birçok durum değişken gösterimi vardır.



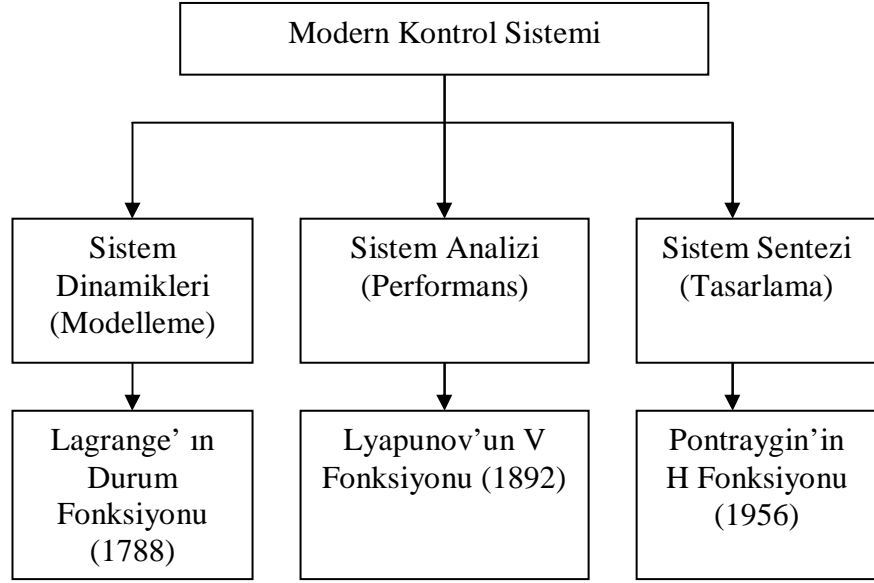
Şekil 1.2 Modern kontrol konfigürasyonu

Her kontrol sistem teorisinin ilk bölümünde dinamikler elde edilir veya formüle edilir ve diferansiyel denklem gibi dinamik denklem terimleri modellenir. Sistem dinamikleri Lagrange fonksiyonuna dayalıdır. Daha sonra sistem, kararlılığını tespit etmek için performansı analiz edilir. Kararlılık teorisinde Lyapunov'un katkıları büyüktür. Sonuç olarak, sistem performansı açıklamalara uygun değilse, tasarım yapılır. Optimal kontrol teorisinde, tasarım bir performans indeksidir. Lagrange fonksiyonu ve Lyapunov fonksiyonu V gibi kavramlar eski olmalarına rağmen, bu kavramların kullanıldığı teknikler moderndir. Optimal kontrol, lineer olmayan kontrol, uyarlamalı kontrol, sağlam kontrol terimleri bu duruma en uygun terimlerdir [1], [6], [16], [18].

1.2 Optimizasyon

Optimizasyonun günlük yaşamda önemli bir rolü vardır. Optimizasyon konusu farklı yollarla cebirsel veya geometrik yaklaşımlara, işaretlerin doğasına (gerekli veya tahmini) ve aşamaya (tekli veya çoklu) dayalı olabilir.

Varyasyon hesabı optimizasyonun küçük bir bölümüdür ve optimal kontrol sistemlerinin temelini oluşturur. Optimizasyon statik ve dinamik optimizasyon olmak üzere ikiye ayrılır:

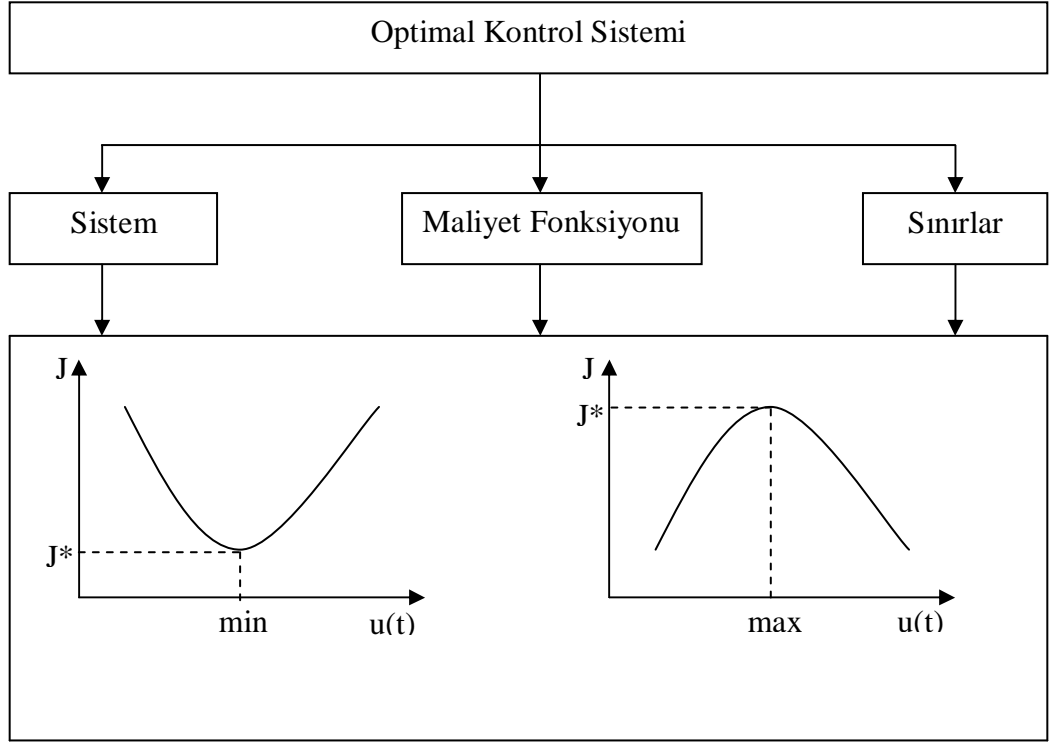


Şekil 1.3 Modern kontrol sisteminin bileşenleri

- i. *Statik Optimizasyon* sabit durum şartları altında sistem kontrolüdür. Sistem değişkenleri zamanla değişmez. Sistem cebirsel denklemlerle tanımlanır. Kullanılan teknikler adi hesaplama, Lagrange çarpanları, lineer ve lineer olmayan programlamadır.
- ii. *Dinamik Optimizasyon* dinamik şartlar altında sistem kontrolüdür. Sistem değişkenleri zamanla değişir. Sistem tanımı zamanı gerektirir. Sistem diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Kullanılan teknikler dinamik programlama, araştırılan teknikler, varyasyon hesabı ve Pontryagin prensibidir [1], [26].

1.3 Optimal Kontrol

Optimal kontrolün ana hedefi bazı fiziksel şartları sağlayan sistemin kontrol işaretlerini belirlemektir, P sistemini kontrol ve durumlardaki bazı sınırlarla başlangıç durumundan bitiş durumuna yürüten optimal kontrol $u^*(t)$ nin (* optimal şartı gösterir) bulunmasıdır. Aynı zamanda seçilen bir performans kriterini



Şekil 1.4 Optimal kontrol problemi

(performans indeksi veya maliyet fonksiyonu) ekstremize (minimize veya maksimize) etmektir.

Optimal kontrol problemini formüle etme şunları gerektirir:

1. Kontrol edilen (genellikle durum değişken formunda) amacın bir matematiksel tanımı (veya modeli),
2. Performans indeksinin ayrıntılı bir açıklaması,
3. Durum ve/veya kontrollerdeki fiziksel sınırlar ve sınır şartlarının bir ifadesi [1], [3], [4], [16].

1.3.1 Sistem

Optimizasyonda lineer veya lineer olmayan denklemler kümesi ile fiziksel bir sistem tanımlanır. Örneğin, lineer sabit-zamanlı sistem durum ve çıkış bağlantıları

(1.3) ve (1.4) ile tanımlanır. Lineer olmayan bir sistem ise (1.5) ve (1.6) ile tanımlanır [1], [8].

1.3.2 Performans İndeksi

Klasik kontrol tasarımı teknikleri lineer, sabit zamanlı, tek giriş ve tek çıkışlı (SISO) sistemlere başarıyla uygulanmıştır. Tipik performans kriteri zamanın artması, zamanın kararlaştırılması, uç noktayı kaçırma ve sabit durum doğruluğu gibi özellikleri bulunan, inen veya çıkan girişe sistemin zaman cevabıdır; kazanç ve evre karları ise sistemin frekans cevabıdır.

Modern kontrol teorisinde, optimal kontrol problemi, bir durum değişkenini izleyen veya hedefe ulaşan dinamik sistemin bir kontrolünü bulmaktır ve aynı zamanda birçok formda verilebilen performans indeksini ekstremlere getirmektir.

1.3.2.1 Örnek Optimal-Zamanlı Kontrol Sistemi için Performans İndeksi:

Minimum zamanda keyfi bir başlangıç durumu $x(t_0)$ den özel bir bitiş durumu $x(t_f)$ e karşılık gelen performans indeksi (PI) aşağıdadır.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 = t^* \quad (1.7)$$

1.3.2.2 Örnek Optimal-Yakıtlı Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi:

Bir uzay gemisi problemi için roket motoru itmesi $u(t)$ ve yakıt tüketim oranı ile orantılı itme büyüklüğü $|u(t)|$ olsun. Harcanan toplam yakıtı minimize etmek için performans indeksi

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad (1.8)$$

dir ve birkaç kontrol için R ağırlık faktörü ile aşağıdaki hali alır.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m R_i |u_i(t)| dt \quad (1.9)$$

1.3.2.3 Örnek Minimum-Enerjili Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi:

Bir elektrik ağının i . düğümündeki akım $u_i(t)$, i . düğümün direnci r_i olmak üzere, ağın toplam enerji harcama oranı veya toplam güç $\sum_{i=1}^m u_i^2(t)r_i$ dir. Toplam harcanan enerjiyi minimize eden performans indeksi

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2(t)r_i dt \quad (1.10)$$

dür veya genel olarak,

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^t(t)Ru(t)dt \quad (1.11)$$

dir ve burada R bir pozitif tanımlı matris, $(\cdot)^t$ transpozeyi göstermektedir. Benzer şekilde izlenen sistemin hata integrali minimize edilebilir.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x^t(t)Qx(t)dt \quad (1.12)$$

Burada $x_d(t)$ istenilen değer, $x_a(t)$ gerçek değer, $x(t) = x_a(t) - x_d(t)$ hatadır. Q pozitif yarı-tanımlı olabilen bir ağırlık matrisidir.

1.3.2.4 Örnek Bitiş Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi:

Bir bitiş hedef probleminde t_f bitiş zamanında veya hareket sonunda gerçek hedef durumu $x_a(t_f)$ ile istenilen hedef durumu $x_d(t_f)$ arasındaki hata minimize edilir. Bitiş hatası $x(t_f) = x_a(t_f) - x_d(t_f)$ dır. Hatanın ve ağırlık faktörlerinin pozitif ve negatif değerlerine dikkat edilir. Maliyet fonksiyonu

$$J = x^t(t_f)Fx(t_f) \quad (1.13)$$

şeklinde ve F bir pozitif yarı-tanımlı matristir.

1.3.2.5 Örnek Genel Optimal Kontrol Sistemi İçin Performans İndeksi:

Yukarıdaki formüllerle genel formdaki performans indeksi

$$J = x^t(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^t(t)Qx(t) + u^t(t)Ru(t)] dt \quad (1.14)$$

veya

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (1.15)$$

dir. Burada R bir pozitif tanımlı matris, Q ve F bir pozitif yarı-tanımlı matristir. Q ve R matrislerinde zaman değişebilir. Performans indeksinin bu formuna (durum ve kontrol terimleri ile) *kuadratik form* denir.

Optimal kontrolde problemlerin ortaya çıkışı J performans indeksinin yapısına bağlıdır. PI (1.15) sadece bitiş maliyet fonksiyonunu $S(x(t), u(t), t)$ içeriyorsa, *Mayer problemi* adını alır. Sadece integral maliyet terimini içeriyorsa, *Lagrange problemi* adını alır. (1.15)'deki gibi integral hem maliyet terimini hem de bitiş maliyet terimini içeriyorsa *Bolza problemidir*. Birçok farklı formda maliyet fonksiyonu mevcuttur. Kuadratik formdaki maliyet fonksiyonu optimal kontrol sistemleri için çok önemli sonuçlara öncülük etmiştir [1], [4], [17].

1.3.3 Sınırlar

$u(t)$ kontrol ve $x(t)$ durum vektörleri fiziksel duruma bağlı ya sınırlı ya da sınırsızdır. Elektrik düğmesindeki akım ve voltaj, motordaki hız, roketteki itme kuvveti gibi fiziksel sebeplerden genellikle kontrol ve durum şu sınırlar arasındadır:

$$U_+ \leq u(t) \leq U_- \text{ ve } X_- \leq x(t) \leq X_+ \quad (1.16)$$

Burada + ve – değişkenlerin aldığı maksimum ve minimum değerleri gösterir [1], [4], [16], [17].

1.3.4 Optimal Kontrol Sisteminin Biçimsel Durumu

Optimal kontrol problemi lineer sabit-zamanlı sistemde $u^*(t)$ (* optimal değeri gösterir) optimal kontrolünü bulmaktır.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.17)$$

$x^*(t)$ ekstremumu bulan bir performans indeksi verir.

$$J = x^t(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^t(t)Qx(t) + u^t(t)Ru(t)] dt \quad (1.18)$$

Lineer olmayan sistemlerde

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.19)$$

dir. $x^*(t)$ durumu ekstremumu bulan genel performans indeksi (1.16) ile verilen $x(t)$ durum değişkenleri veya $u(t)$ kontrol değişkenlerinde bazı sınırlar ile

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (1.20)$$

şeklinindedir. Bitiş zamanı t_f sabit veya bağımsız olabilir. Bitiş (hedef) durum tamamen veya kısmen sabit veya bağımsız olabilir. Problemin durumu aşağıda gösterilmiştir.

Temel olarak (1.18) veya (1.20) ile tanımlanan J^* optimal performans indeksi verilir, (1.17) veya (1.19) ile tanımlanan sisteme uygulanan $u^*(t)$ kontrolünün bulma ile ilgilenilir. Optimal kontrol sistemleri üç aşamada çalışılmıştır.

i. İlk aşamada, (1.20) formundaki performans indeksi ile ilgilenir, optimal fonksiyonları elde eden varyasyon hesabı teorisi kullanılır.

ii. İkinci aşamada, (1.17) sistemi elde edilir ve sistemi yürütecek $u^*(t)$ optimal kontrolü bulma denenir, (1.18) performans indeksi optimize edilir. Yukarıdaki maddeler ayrık-zaman düzlemindedir.

iii. Son olarak, (1.16) durum ve kontrollerdeki sınırlar optimal kontrolü elde eden performans indeksi ve sistemle düşünülür [1], [4], [11], [16], [17].

1.4 Tarihi Tur

Tur iki aşamada incelenirse ilk olarak varyasyon hesabının gelişimi ve ikinci olarak optimal kontrol teori bulunur.

1.4.1 Varyasyon Hesabı

Bir efsaneye göre, Tyrian prensesi Dido, Kartaca şehrinin bulunduğu alanı maksimize etmek için çember yayı formunda sığır derisinden bir ip kullanır. Kartaca'nın bulunma hikâyesi hayali olsa da, yeni bir matematik kuralına esin kaynağı olmuş, varyasyon hesabı ve uzantıları ile optimal kontrol teori oluşmuştur.

Matematiğin bir dalı olan varyasyon hesabı, bir fonksiyonun ekstremumu ile ilgilidir. Fonksiyonların maksimumunu veya minimumunu bulma teorisi oldukça eskidir. Yunan matematikçi Zenodorus (M.Ö. 495–435) ve Poppus (M.S. 300) isoperimetrik problemlere ulaşabilmiştir. 1699’da Johannes Bernoulli (1667–1748) aynı yatay veya düşey çizgide bulunmayan iki nokta arasındaki en kısa yolu bulma problemini ortaya atmıştır. Bu problemi 1638’de ilk Galileo (1564–1642) düşünmüş, John ve kardeşi Jacob (1654–1705), Gottfried Leibniz (1646–1716), Isaac Newton (1642–1727) tarafından çözülmüştür. Leonard Euler (1707–1783) ile Bernoulli, ilk varyasyon metodunu kullanarak bu tip problemlerin çözüm yolunu bulan Joseph-Louis Lagrange’ı (1736–1813) etkileyen olağanüstü sonuçlara ulaşmışlardır. Böylece Euler varyasyon hesabı cümlesini kullanmıştır. Daha sonra bir fonksiyonun ekstremumu için gerekli şarta Euler-Lagrange denklemi denilmiştir. Lagrange çarpan metodunu üreterek değişken son-nokta problemlerini ele almıştır. Daha sonra optimizasyonda Lagrange çarpan metodunun çok önemli bir yeri olmuştur.

Varyasyon hesabında fonksiyonun ekstremumunu bulma için yeterli şartı ikinci varyasyonu ekleyerek Andrien Marie Legendre (1752–1833) vermiştir. 1836’da Jacob Jacobi (1804–1851) yeterli şartı analiz etmiş ve sonradan bu şarta Legendre-Jacobi şartı denilmiştir. Aynı zamanda Sir William Rowan Hamilton (1788–1856) çeşitli dış güçler ile hareket eden uzaydaki bir parçanın hareketini göstererek mekanikler üzerinde durmuş, bunu iki tane birinci dereceli kısmi diferansiyel denklemi sağlayan tek bir fonksiyon ile gösterebilmiştir. 1838’de Jacobi bu konuda bazı itirazlarda bulunmuş ve sadece tek bir kısmi diferansiyel denklem gerektiğini göstermiştir. Bu denklem Jacobi-Hamilton denklemi adını almış, daha sonra varyasyon hesabında derin etkisi olmuş ve dinamik programlama, optimal kontrol gibi çalışmaların önünü açmıştır.

1898’de Adolf Kneser, Karl Gauss (1777–1855)’un jeodezideki sonuçlarını kullanarak varyasyon hesabına yeni bir yaklaşım getirmiştir. Değişken son-nokta problemleri için, özel bir durum olarak ortogonalliği içeren çapraz şartı açıklamıştır. Oskar Bolza (1857–1942) ile birlikte, bu problemlerde yeterli ispatı vermişlerdir. 1900’de David Hilbert (1862–1943) özdeğer ve özfonksiyonlarla quadratik bir fonksiyon gibi ikinci varyasyonu göstermiştir. 1908 ile 1910 arasında, Gilbert Bliss

(1876–1951) ve Max Mason, Kneser sonuçlarında derinleşmiş, 1913’de Bolza, Lagrange ve Mayer probleminin genel halini Bolza problemi olarak sunmuştur. Bliss bu üç problemin eşit olduğunu göstermiştir. Günümüzde varyasyon hesabı ile ilgili Pinch (1993), Wan (1994), Giaquinta ve Hildebrandt (1995), Troutman (1996), Milyutin ve Osmolovskii (1998) gibi matematikçilerin kitapları bulunmaktadır [1].

1.4.2 Optimal Kontrol Teori

Lineer kuadratik kontrol probleminin kaynağı 2. Dünya Savaşı (1940–1945) boyunca silah ateş kontrolü için N. Wiener’in meşhur filtreleme çalışmalarıdır. Wiener şu formdaki hata kriterini minimize eden filtreler tasarlama problemini çözmüştür.

$$J = E \{e^2(t)\} \quad (1.21)$$

Burada $e(t)$ hata, $E\{x\}$, x rasgele değişkeninin beklenen değerini gösterir. Yukarıdaki hata kriterinin, integral kuadratik terimli olarak genellemesi

$$J = \int_0^{\infty} e^t(t)Qe(t)dt \quad (1.22)$$

dir ve Q pozitif tanımlı matristir. R. Bellman 1957’de ayrık-zamanlı optimal kontrol sistemlerini çözmek için dinamik programlama tekniğini geliştirmiştir. Optimal kontrol sistemlerine en önemli katkı 1956’da L. S. Pontryagin ve ortaklarının maksimum prensibini üretmeleri ile olmuştur. 1960’da R. E. Kalman optimal geribildirim kontrollerini tasarlamak için lineer kuadratik regülâtör (LQR) ve lineer kuadratik Gauss (LQG) teorisini geliştirmiş ve Bucy ile kendisinin ünlü sürekli Kalman filtresi, ayrık Kalman filtresi için optimal filtreleme ve tahmin teorisini sunmaya çalışmıştır. Kalman optimal kontrol teoride derin bir etki bırakmış ve Kalman filtresi gerçek dünya problemleri için kontrol teori uygulamalarında en çok kullanılan teknik olmuştur.

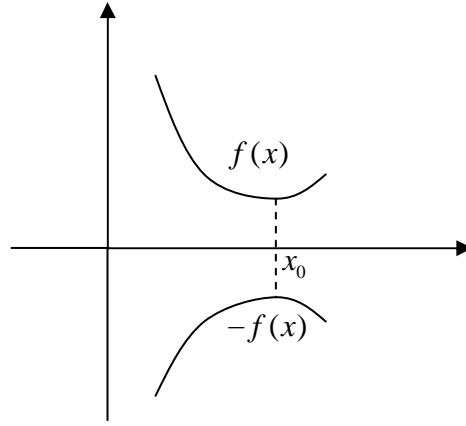
Tüm Kalman filtresi tekniklerinde ve diğer alanlarda matris Riccati denklemi görülür. C. J. Riccati 1724'de bazı tip lineer olmayan diferansiyel denklemler için, çözüm ve sonuçlar yayınlamıştır. İki yüzyıl sonra bu sonuç Riccati denklemi olarak meşhur olmuştur. Kısaca optimal kontrol, 16. ve 17. yüzyıl boyunca varyasyon hesabının kökleri ile gelişmiştir.

Tek giriş ve tek çıkışlı (SISO) sistemler için frekans düzlemi kullanılan klasik kontrol teori yerine, SISO ve çok giriş ve çok çıkışlı (MIMO) sistemler için zaman düzlemi ile çalışan modern kontrol teori gelmiştir. Modern kontrol ve optimal kontrolün sağlamlık özelliği olmadığından LQR teorisini tasarlayan kontrolcüler, modellenmeyen dinamikler, dış rahatsızlıklar ve ses ölçüm sağlamlığında başarısız olmuşlardır. Frekans düzlemi teknikleri doğal olarak sağlamlığı sunmuş ve bazı araştırmacılar MIMO sistemlerde frekans düzlem yaklaşımlarını geliştirmeye çalışmıştır.

Önemli bir nokta, 80'lerde geliştirilen H_∞ optimal kontrol teoridir. 60 ve 70'lerde H_2 optimal kontrol teori olarak geçmiştir. H_∞ optimal kontrol teorisinin köklerini G. Zames oluşturmuş ve SISO sistemlere tasarlanan optimal H_∞ hassaslık problemini formüle etmiş, optimal Nevanilina-Pick interpolasyon teorisini kullanarak çözmüştür. Doyle, Glover, Khargonekar ve Francis adlı dört araştırmacı 1991'de bu konuda yaptıkları araştırmalar ile G.Baker ödülünü almışlardır [1].

2. OPTİMİZASYON

2.1 Giriş



Şekil 2.1 $f(x)$ in minimum, $-f(x)$ in maksimumu ile aynı olması

Optimizasyon verilen şartlar altında en iyi sonucun elde edilmesi işidir. Herhangi bir mühendislik sisteminin planlanması, kuruluşu bakımında mühendisler birkaç aşamada birçok idari ve teknolojik kararlar almak zorundadırlar. Böyle kararların son hedefi ya arzulanan karı maksimize ya da gerekli çabayı minimize etmektir. Gerçek hayatta istenen kar ya da gerekli çaba belirli kar değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilebildiğinden, optimizasyon bir fonksiyonun maksimum ya da minimum değerini veren şartların bulunması sürecidir. Şekil 2.1'deki gibi x_0 noktası $f(x)$ fonksiyonunun minimum değeri ise aynı nokta $-f(x)$ fonksiyonunun maksimum değeri de olur. Bu yüzden bir fonksiyonun maksimumu, aynı fonksiyonun negatifinin minimumunu araştırarak bulunacağından optimizasyon minimizasyon anlamında kullanılabilir. Optimizasyon problemlerinin hepsini etkin olarak çözen tek bir yöntem mevcut değildir.

Optimumu araştıran yöntemler matematiksel programlama teknikleri olarak adlandırılır ve genellikle yöneylem araştırması içinde çalışılmıştır. Yöneylem araştırması, bilimsel yöntemlerin karar verme problemlerine uygulanması ve en iyi çözümlerin bulunması ile ilgilenen matematiğin bir branşı olarak tanımlanabilir [2], [9].

2.2 Tarihi Gelişimi

Optimizasyonun gelişimi 18. yüzyılda Newton, Leibnitz, Lagrange ve Cauchy'in genel matematik alanındaki çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. Bu alışmalar belirli iyi tanımlı fonksiyonlar için kullanılabilir. Gerçek hayattaki optimizasyon problemlerini ele almada genel matematik yeterince güçlü bir araç değildir.

İkinci dünya savaşından sonra yeni sayısal optimizasyon teknikleri geliştirilmiştir. Buna; hızlı bilgisayarların gelişmesi, maksimum veya minimumu elde etmede sayısal tekniklerin gelişimine matematiksel analizin uygulanması etken olmuştur. Bu sayısal teknikler (yöneylem araştırması teknikleri) genel matematiğin birçok zorluğunu ortadan kaldırmıştır [2].

2.3 Optimizasyon Probleminin İfadesi

Bir optimizasyon veya bir matematiksel programlama problemi

$$p_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

şartlarına göre $z = f(x)$ fonksiyonunu minimize eden $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ çözümünün

bulunması işleminden oluşur.

Matematiksel programlama verilen kısıtlar altında çok değişkenli fonksiyonların minimumunu bulmada kullanılan en yararlı teknikleridir [2],[4],[24].

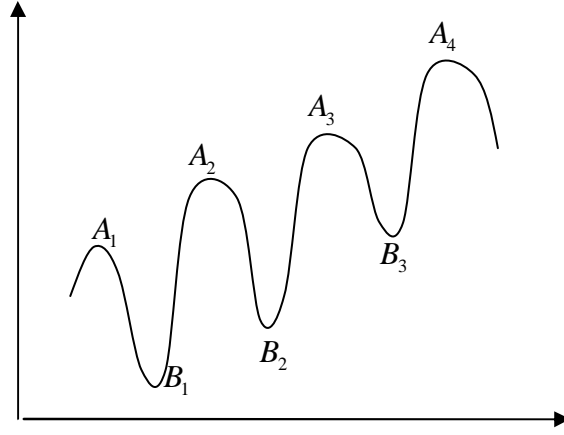
2.4 Klasik Optimizasyon

Klasik optimizasyon yöntemleri sürekli ve türevlenebilir fonksiyonların en iyilenmesinde kullanılır. Bu yöntemler analitiktir ve en iyi noktaların bulunmasında türev hesaplamalarına ilişkin teknikleri kullanır. Bazı pratik problemlerin amaç fonksiyonları sürekli veya türevlenebilir olamayacağından klasik optimizasyon teknikleri gerçek hayat uygulamalarında sınırlı şekilde kullanılabilir. Ama bu teknikler sayısal tekniklerin gelişmesinde bir temel teşkil ederler [2], [9].

2.5 Tek Değişkenli Optimizasyon

Yeterince küçük pozitif ve negatif bütün h değerleri için $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$ ise $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ da yerel minimuma sahiptir. Benzer olarak sıfıra yeterince yakın bütün h değerleri için $f(x_0) \geq f(x_0 + h)$ ise x_0 noktasına yerel maksimum nokta denir. $f(x)$ in tanımlı olduğu bölgedeki bütün x değerleri için, sadece x_0 a yakın bütün noktalar değil, $f(x_0) \leq f(x)$ ise $x = x_0$ da $f(x)$ mutlak veya bölgesel minimuma sahiptir. Benzer olarak tanım bölgesindeki bütün x ler için $f(x) \geq f(x_0)$ ise $x = x_0$ da $f(x)$ mutlak veya bölgesel maksimuma sahiptir.

Tek değişkenli optimizasyon problemi; $[a, b]$ aralığında $f(x)$ i minimize eden $x = x_0$ değerinin bulunmasıdır. Aşağıdaki iki teorem tek değişkenli bir fonksiyonun yerel minimumu için gerek ve yeter şartları verir. Şekil 2.2’de yerel ve bölgesel minimum (maksimum) noktalar gösterilmiştir [2], [9].



Şekil 2.2 A_1, A_2, A_3, A_4 yerel maksimum noktalar; A_4 bölgesel maksimum nokta; B_1, B_2, B_3 yerel minimum noktalar; B_1 bölgesel minimum nokta

2.5.1 Teorem $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu $a \leq x_0 \leq b$ olmak üzere $x = x_0$ da yerel minimuma sahipse $x = x_0$ da türevi $f'(x)$, var ve sonlu ise o zaman $f'(x_0) = 0$ dır [2].

İspat: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ tanımlı ve var olduğu verilmiş x_0 yerel minimum nokta olarak verildiğinden sıfıra yeterince yakın bütün h değerleri için

$$f(x_0) \leq f(x_0 + h) \quad (2.2)$$

olur. Bu yüzden

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \quad h > 0 \quad (2.3)$$

ve

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad h < 0 \quad (2.4)$$

yazılabilir. (2.3) ve (2.4) için $h \rightarrow 0$ olarak sağdan ve soldan limit alınırsa

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad (2.5)$$

ve

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad (2.6)$$

olur. (2.5) ve (2.6)'dan $f'(x_0) \geq 0$ $f'(x_0) \leq 0$ olur. Bu $f'(x_0) = 0$ olmasını gerektirir.

Genel olarak $f'(x_0) = 0$ yapan tüm noktalara durağan veya kritik nokta denir. Maksimum veya minimum noktalara ekstremum nokta denir.

Bu teorem için aşağıdaki noktalar mevcuttur.

- i.** Teorem x_0 yerel maksimum olduğunda da ispatlanabilir.
- ii.** Teorem bir x_0 noktasında türev yoksa bu noktanın bir minimum veya bir maksimum olup olmadığı hakkında bir şey söylenemez. (Şekil 2.3)

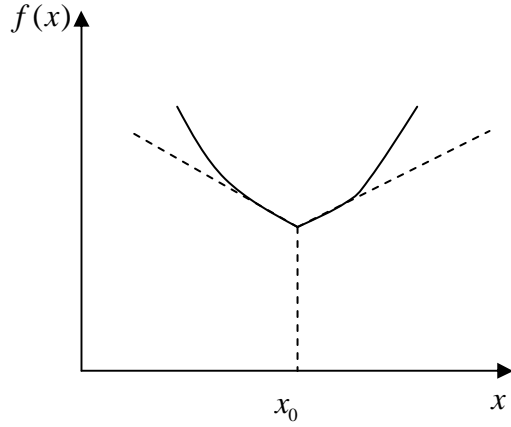
$$h \text{ a sağdan ve soldan yaklaştıkça sırayla, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m^+$$

(pozitif) veya m^- (negatif) olur. Burada m^+ ve m^- sayıları eşit olmadıkça $f'(x_0)$ türevi olmaz. Türev olmazsa teorem uygulanamaz. Dikkat edilirse x_0 bir minimum noktasıdır.

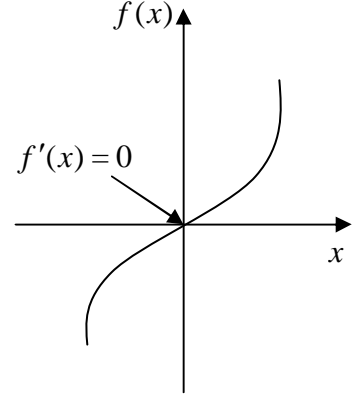
- iii.** Fonksiyon tanım aralığının uç noktalarında bir maksimum veya minimuma sahip olsa bile bu teorem uygulanmaz. Bu durumda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ türevi yalnızca } h \text{ in pozitif veya negatif değerleri için}$$

söz konusu olabilir, türev uç noktalarda tanımlı değildir.



Şekil 2.3 x_0 da $f(x)$ in türevinin olmaması durumu



Şekil 2.4 Durağan (dönüm) nokta

iv. Teorem türevin sıfır olduğu her noktada bir maksimum veya bir minimum olduğunu garanti etmez. Yani bir maksimum (minimum) varsa kesinlikle bu noktada türev sıfırdır. Ama bir noktada türev sıfırsa bu noktada bir maksimum veya bir minimum olduğu hakkında kesin bir şey söylenemez. (Şekil 2.4)

$f'(x_0) = 0$ şartını sağlayan noktanın maksimum veya minimum olması için yeterli şartlar aşağıdaki teoremle elde edilir [2].

2.5.2 Teorem $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ve $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ olsun.

- i.** n çift ve $f^{(n)}(x_0) > 0$ ise $x = x_0$ da $f(x)$ yerel minimum noktasına sahiptir.
- ii.** n çift ve $f^{(n)}(x_0) < 0$ ise $x = x_0$ da $f(x)$ yerel maksimum noktasına sahiptir.
- iii.** n tek ise $x = x_0$ ne bir maksimum ne de bir minimum noktası olur, yani dönüm noktası olur [2].

İspat: x_0 civarında $f(x)$ in Taylor açılımı yazılırsa,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + h\theta), \quad 0 < \theta \leq 1 \quad (2.7)$$

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ olduğundan (2.7) eşitliği

$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + h\theta)$ olur. $f^n(x_0) \neq 0$ olduğunda x_0 civarında öyle

bir aralık bulunabilir ki buradaki her x için n . türev $f^n(x)$, $f^n(x_0)$ ile aynı işaretlidir. Bu yüzden bu aralığın her $x_0 + h$ noktasında $f^n(x_0 + h\theta)$, $f^n(x_0)$ ile aynı işaretli olur.

n çift olduğunda $\frac{h^n}{n!}$ her zaman pozitif olur. Öyleyse $f(x_0 + h) - f(x_0)$, $f^n(x_0)$ ın işareti ile aynı olur. Bu nedenle x_0 ; $f^n(x_0) > 0$ ise yerel minimum, $f^n(x_0) < 0$ ise yerel maksimum olur.

n tekse $\frac{h^n}{n!}$ h ın işaretine bağlı olarak bazen pozitif, bazen negatif olur. Öyleyse x_0 noktasında bu durumda ne bir maksimum ne bir minimum söz konusu olur. x_0 noktası dönüm noktası olur.

2.5.3 Örnek $f(x) = 1,2x^5 - 4,5x^4 + 4x^3 + 10$ fonksiyonunun maksimum veya minimum değerlerini belirleyiniz [2].

Çözüm: $f'(x) = 6(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 6x^2(x^2 - 3x + 2) = 6x^2(x-1)(x-2) = 0$

$f'(x_0) = 0$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ ve $x_0 = 2$ dir.

İzleyen türev $f''(x) = 6(4x^3 - 9x^2 + 4x)$ olur.

$x_0 = 1$ de $f''(x_0 = 1) = -6$ olduğundan yerel maksimum vardır. ($n = 2$)
 $f(x_0 = 1) = 10,7$ olur.

$x_0 = 2$ de $f''(x_0 = 2) = 24$ olduğundan yerel minimum vardır. ($n = 2$)
 $f(x_0 = 2) = -1,6 + 10 = 8,4$ tür.

$x_0 = 0$ da $f''(x_0 = 0) = 0$ olduğundan izleyen türeve geçilir.
 $f'''(x) = 6(12x^2 - 18x + 4)$ olur.

$f'''(x_0 = 0) = 4$ ve n tek olduğundan ($n=3$) $f'''(x_0 = 0) \neq 0$ ve $x_0 = 0$ bir dönüm noktası olur.

2.6 İki Değişkenli Optimizasyon

$f(x_1, x_2)$ fonksiyonunun minimum (maksimum) noktası için gerek şartlar $\frac{\delta f}{\delta x_1} = 0$ ve $\frac{\delta f}{\delta x_2} = 0$ dır. Yeterli şartları elde etmek için $h = x - x_0$ olmak üzere $f(x_1, x_2)$ in (x_{10}, x_{20}) civarındaki Taylor açılımını göz önüne alınır.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^2 h_i \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_i h_j \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \Big|_{x=x_0+h\theta}$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2!} \left[h_1^2 \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} + 2h_1 h_2 \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} + h_2^2 \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} \right] \quad (2.8)$$

$u = \frac{h_2}{h_1}$ olsun.

$$A = \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} \Big|_{x=x_0+h\theta}, \quad B = \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} \Big|_{x=x_0+h\theta}, \quad C = \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} \Big|_{x=x_0+h\theta} \quad (2.9)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h_1^2}{2!} [A + 2Bu + Cu^2] = \frac{h_1^2}{2!} Q(u)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h_1^2}{2!} Q(u) \quad (2.10)$$

$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$ in yerel maksimum olması için her u için $Q(u) < 0$ olması gerekir.

x_0 in yerel minimum olması için her u için $Q(u) > 0$ olması gerekir. $Q(u)$ fonksiyonunun gerçek kökleri varsa Q , u nun seçilen değerlerine bağlı olarak ya pozitif ya negatif ya da sıfır olur. $Q(u)$ nun gerçek kökleri yoksa Q , u nun her değeri için her zaman ya pozitif ya da negatif olur.

$Q(u)$ nun gerçek köklerinin olmadığı şartlar aşağıdadır.

$$Q(u)=0=A+2Bu+Cu^2 \text{ olsun. } Q(u) \text{ nun kökleri } u = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{C} \text{ olur.}$$

$B^2 - AC < 0$ ise $Q(u)$ eşlenik kompleks olur, bu durumda her u için $Q(u)$ her zaman pozitif ya da her zaman negatif olur. Bu durum bir ekstremumu gösterir. Eğer $B^2 - AC > 0$ ise u nun değerlerine bağlı olarak bazen pozitif bazen negatif olabilir. Bu da eyer noktasını gösterir, $B^2 - AC = 0$ belirsizlik durumunu gösterir.

$B^2 - AC < 0$ olsun. A ve C aynı işaretli olur (değilse AC negatif olacak) ve $B^2 - AC$ pozitif olur, bu da $B^2 - AC < 0$ ile çelişir.

Eğer A negatif ve $u = 0$ ise o zaman $Q(0) = A < 0$ dır ve buradan $Q(u) < 0$ (her u için) olur. Bu da yerel maksimum demektir.

$$A < 0, A + C < 0 \text{ olur.}$$

Diğer taraftan $A > 0$ ise $A + C > 0$ ve her u için $Q(u) > 0$ olur. Bu da x_0 noktasında yerel minimum olduğunu gösterir. f sürekli ve x_0 ile $x_0 + h\theta$ noktasında tüm türevler sürekli olduğundan bu noktalardaki türevler aynı işaretli olurlar. Öyleyse

$$A_0 = \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} \Big|_{x_0}, \quad B_0 = \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} \Big|_{x_0}, \quad C_0 = \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} \Big|_{x_0} \quad (2.11)$$

olurlar. Sonuçlar özetlenirse

1. $B_0^2 - A_0 C_0 < 0$ ve $A_0 + C_0 < 0$ ise x_0 da yerel maksimum vardır.
2. $B_0^2 - A_0 C_0 < 0$ ve $A_0 + C_0 > 0$ ise x_0 da yerel minimum vardır.
3. $B_0^2 - A_0 C_0 > 0$, x_0 da eyer noktası vardır.
4. $B_0^2 - A_0 C_0 = 0$, x_0 da belirsizlik söz konusudur [2], [4], [9], [24].

2.6.1 Örnek $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + x_2$ fonksiyonunun durağan noktalarını bulunuz [2].

Çözüm: $\frac{\delta f}{\delta x_1} = 2x_1 + 2x_2 + 2 = 0$ ve $\frac{\delta f}{\delta x_2} = 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0$ olur. Bunların

çözümüyle $(x_{10}, x_{20}) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2} \right)$ elde edilir.

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} = 2 = A_0, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} = 4 = C_0, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} = 2 = B_0 \quad (2.12)$$

$B_0^2 - A_0 C_0 = -4$ ve $A_0 + C_0 = 6$ olduğundan $\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2} \right)$ noktasında yerel minimum vardır. $f\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2} \right) = -\frac{5}{4}$ olur.

2.7 Kısıtsız Çok Değişkenli Optimizasyon

Kısıtsız çok değişkenli bir fonksiyonun maksimum veya minimumu için gerek ve yeter şartlar aşağıdadır.

2.7.1 Tanım f in r . diferansiyeli: f fonksiyonunun x_0 noktasında $r > 1$ dereceli bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise

$$d^r f(x_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dots \sum_{k=1}^n h_i h_j \dots h_k \frac{\delta^r f(x_0)}{\delta x_i \delta x_j \dots \delta x_k} \quad (2.13)$$

ifadesine x_0 da f in r . diferansiyeli denir. $r = 2$ ve $n = 3$ durumunda

$$\begin{aligned} d^r f(x_0) &= d^2 f(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dots \sum_{k=1}^n h_i h_j \frac{\delta^2 f(x_0)}{\delta x_i \delta x_j} \\ &= h_1^2 \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2}(x_0) + h_2^2 \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2}(x_0) + h_3^2 \frac{\delta^2 f}{\delta x_3^2}(x_0) + \\ &+ 2h_1 h_2 \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2}(x_0) + 2h_2 h_3 \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_3}(x_0) + 2h_1 h_3 \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_3}(x_0) \end{aligned} \quad (2.14)$$

x_0 noktası civarında bir $f(x)$ in Taylor açılımı

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \\ &+ \frac{1}{3!} d^3 f(x_0) + \dots + \frac{1}{N!} d^N f(x_0) + R_N(x_0, h) \end{aligned} \quad (2.15)$$

olur. Son terim

$$R_N(x_0, h) = \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(x_0 + h\theta) \quad (2.16)$$

ve burada $h = x - x_0$, $0 < \theta < 1$ dir [2], [4], [9], [24].

2.7.2 Teorem $x = x_0$ da $f(x)$ bir ekstremuma sahip ve x_0 da $f(x)$ in birinci kısmi türevleri var ise

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0) = \dots = \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) = 0 \quad (2.17)$$

eşitliği mevcuttur [2].

İspat: Birinci kısmi türevlerden biri, yani k . si, x_0 da sıfır olmasın, veya

$\frac{\delta f}{\delta x_k}(x_0) \neq 0$ olsun. Taylor açılımı ile

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) + R_i(x_0, h) \quad (2.18)$$

veya

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h_k \frac{\delta f}{\delta x_k}(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0 + h\theta), \quad 0 < \theta < 1 \quad (2.19)$$

yazılabilir. $d^2 f(x_0 + h\theta)$ de h_i^2 çarpanı yer alacağından küçük h ler için h dereceden terimler h in daha yüksek dereceden terimlerinden büyük olur. Bu nedenle $f(x_0 + h) - f(x_0)$ in işareti $h_k \frac{\delta f}{\delta x_k}(x_0)$ nın işaretine bağlı olur.

$\frac{\delta f}{\delta x_k}(x_0) > 0$ olduğunu var sayalım. O zaman $f(x_0 + h) - f(x_0)$; $h_k > 0$ için pozitif,

$h_k < 0$ için de negatif olur. Bu x_0 in ekstremum olamayacağını gösterir. Oysa x_0

ekstremum nokta olarak alınmıştı. Aynı sonuç $\frac{\delta f}{\delta x_k}(x_0) < 0$ olarak kabul edildiğinde

de x_0 in ekstremum olması ile çeliştiği görülür. Öyleyse x_0 bir ekstremumdur ve

$x = x_0$ da $\frac{\delta f}{\delta x_k} = 0$ olur. Bu x_0 noktasında bütün kısmi türevlerin sıfır olması

demektir.

2.7.3 Teorem x_0 durağan noktasının $f(x)$ in bir ekstremum noktası olması için yeterli şart $f(x)$ in x_0 da hesaplanan ikinci kısmi türevlerin matrisinden oluşan Hessian Matrisi;

- i. Pozitif tanımlı olduğunda x_0 yerel minimum noktası olur.
- ii. Negatif tanımlı olduğunda x_0 yerel maksimum olur [2].

İspat: Taylor teoreminden yararlanarak $0 < \theta < 1$ olmak üzere,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \Big|_{x=x_0+h\theta} \quad (2.20)$$

yazılır. x_0 durağan nokta olduğundan $\frac{\delta f}{\delta x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ olacağından

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n h_i h_j \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \Big|_{x=x_0+h\theta} \quad (2.21)$$

olur. $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ile $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \Big|_{x=x_0+h\theta}$ aynı işaretli olurlar. $\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_i \delta x_j}$

ikinci kısmi türevi x_0 komşuluğunda sürekli olacağından $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \Big|_{x_0+h\theta}$ ile $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \Big|_{x_0}$

yeterince küçük bütün h ler için aynı işaretli olur. O zaman

$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \Big|_{x=x_0}$ pozitif ise $f(x_0 + h) - f(x_0)$ pozitif olacak ve buradan da

x_0 yerel bir minimum nokta olur. Bu Q ifadesi kareli bir formdur ve matris olarak

$Q = h^T C h$ yazılabilir. Burada $C \Big|_{x=x_0} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \Big|_{x=x_0}$ ikinci kısmi türevlerin matrisidir

ve $f(x)$ in Hessian matrisi olarak adlandırılır.

Matris cebirinden $h^T C h$ kareli formunun pozitif olması x_0 da C nin pozitif tanımlı olmasına bağlıdır. Bu da x_0 durağan noktasının yerel minimum olması için yeterli şart aynı noktada hesaplanan Hessian matrisinin pozitif tanımlı olması

anlamına gelir. Benzer şekilde x_0 durağan noktasının yerel maksimum olması için yeterli şartın C nin negatif tanımlı olmasına bağlı olduğu gösterilebilir.

Bir C matrisi bütün aygen değerleri pozitif ise pozitif tanımlıdır, yani $|C - \lambda I| = 0$ sağlayan her $\lambda > 0$ ise C pozitif tanımlıdır. Bir matrisin (C) pozitif tanımlılığını bulmak için kullanılan bir diğer yöntem aşağıdaki teoremle elde edilir.

2.7.4 Teorem $f(x) = xCx$ kareli formu esas minörlerin hepsi pozitif ise pozitif tanımlıdır. $n = 4$ için bu esas minörler

$$C_1 = |C_1| > 0, C_2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ C_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} > 0, C_4 = |C| > 0 \quad (2.22)$$

olduğunda C pozitif tanımlı olur. Benzer olarak C matrisi C_i nin işareti $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $(-1)^i$ oluyorsa pozitif tanımlı olur. C_i lerin bazıları pozitif değerleri sıfır oluyorsa C pozitif yarı tanımlı olarak adlandırılır.

n değişkenli bir fonksiyonun ekstremum noktası için yeterli şartlar, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$|C_i| = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_i} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_i} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2} \end{vmatrix}_{(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})} \quad (2.23)$$

$$\nabla f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n} \right) \Big|_{(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})=0} \quad (2.24)$$

olsun.

1. $i = 1, 2, \dots, n$ için $|C_i| > 0$ ise $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ yerel minimum nokta olur.
2. $i = 1, 3, 5, \dots$ için $|C_i| < 0$ ve $i = 2, 4, 6, \dots$ için $|C_i| > 0$ ise $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ yerel maksimum nokta olur.
3. Bu şartların sağlanmadığı durumda $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ eyer noktası olur [2].

2.7.5 Örnek $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 - 2x_1x_3 + 4x_1 + 10$

fonksiyonunun ekstremum noktalarını araştırınız [2].

Çözüm: Birinci türevler alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x_1} &= 2x_1 - 2x_3 + 4 = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta x_2} &= -2x_2 - x_3 = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta x_3} &= -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

olur. Bunların çözümü $x_{10} = -10$, $x_{20} = 4$, $x_{30} = -8$ bulunur. İkinci türevlerden oluşan Hessian matrisi;

$$H_f = C = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_3} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_3} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_3 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_3 \delta x_2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

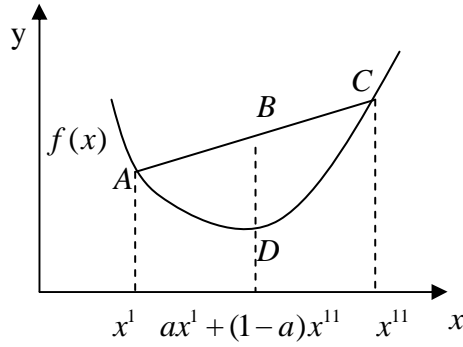
olur. Buradan esas minörler;

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} = 2 \\
 C_2 &= \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \\
 C_3 &= |C| = -2
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

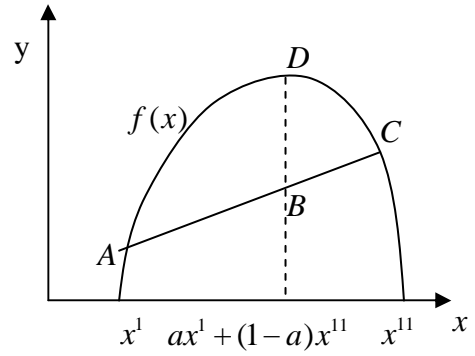
bulunur. (-10, 4, -8) noktasının eyer noktası olduğu anlaşılır.

2.8 Konveks ve Konkav Fonksiyonlar

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ konveks bir s kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu herhangi bir $x^1 \in s$ ve $x^{11} \in s$ $f(ax^1 + (1-a)x^{11}) \leq af(x^1) + (1-a)f(x^{11})$, $0 \leq a \leq 1$ eşitsizliğini sağlarsa konveks fonksiyon olarak tanımlanır. Bu eşitsizliğin tersi sağlandığında konkav fonksiyon olarak tanımlanır. Şekil 2.5'de görüldüğü gibi D noktası $(ax^1 + (1-a)x^{11}, f(ax^1 + (1-a)x^{11}))$ ve B noktası $(ax^1 + (1-a)x^{11}, af(x^1) + (1-a)f(x^{11}))$ olarak düşünülürse $f(ax^1 + (1-a)x^{11}) \leq af(x^1) + (1-a)f(x^{11})$ olduğu görülür. Aynı şekilde şekil 2.6'da D noktası $(ax^1 + (1-a)x^{11}, f(ax^1 + (1-a)x^{11}))$ ve B noktası da $(ax^1 + (1-a)x^{11}, af(x^1) + (1-a)f(x^{11}))$ olduğundan $f(ax^1 + (1-a)x^{11}) \geq af(x^1) + (1-a)f(x^{11})$ olduğu görülür.



Şekil 2.5 Konveks fonksiyon



Şekil 2.6 Konkav fonksiyon

Bir $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun ikinci kısmi türevlerinden oluşan C matrisinden hareketle de fonksiyonun konveks veya konkav olduğu söylenebilir. C matrisi pozitif tanımlı ise f konveks, negatif tanımlı ise f konkav olur [2], [9],[24].

2.9 Eşitlik Kısıtlı Çok Değişkenli Optimizasyon

Eşitlik kısıtlı sürekli fonksiyonların optimizasyonu

$$\begin{aligned} \min f &= f(x) \\ p_i(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.28)$$

olarak tanımlanır. Burada $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ve $m \leq n$ dir. $m > n$ durumunda problemin çözümü yoktur. Yukarıdaki problemin çözümü için çeşitli optimizasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Lagrange çarpanları yöntemi bunlardan en kullanışlı olanıdır [2], [9].

2.9.1 Lagrange Çarpanları Yöntemi

(2.28) eşitlik kısıtlı bir optimizasyon probleminde her kısıt için bir λ_i Lagrange çarpanı kullanılarak bu problem için

$$L(x, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [p_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (2.29)$$

fonksiyonu oluşturulur. Bu fonksiyona Lagrange fonksiyonu denilir. Bu fonksiyon yardımıyla kısıtlı problem kısıtsız bir probleme dönüştürülür. Burada $f(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonlarının sürekli ve türevlenebilir olduğu varsayılır. $L(x, \lambda)$ fonksiyonu için kısmi türevler alınır, sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta x_j} &= \frac{\delta f}{\delta x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\delta p_i}{\delta x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_i} &= p(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

denklemleri elde edilir. Bunların çözümü ile aranılan optimum nokta bulunur. $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, \lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{m0})$ optimum noktasının yerel minimum yada yerel maksimum olduğu şöyle anlaşılır.

$$H_B = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^T & Q \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

tanımlansın. Burada

$$P = \begin{bmatrix} \nabla p_1(x) \\ \vdots \\ \nabla p_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta p_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta p_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta p_m}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta p_m}{\delta x_n} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$Q = \frac{\delta^2 L(x, \lambda)}{\delta x_i \delta x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ ve } j = 1, 2, \dots, n \quad (2.33)$$

olarak tanımlanır. H^B matrisine sınırlı Hessian matrisi denilir. $L(x, \lambda)$ fonksiyonu için (x_0, λ_0) durağan noktası ve bu noktadaki H^B matrisi verilsin.

1. H^B sınırlı Hessian matrisinin $(2m+1)$. esas minörü ile başlayarak $(n-m)$ son esas minörünün işaretleri sırayla $(-1)^{m+1}$ olarak değişiyorsa $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ a yerel maksimum nokta adı verilir.

2. H^B matrisinin $(2m+1)$. esas minöründen başlayarak $(n-m)$ son esas minörünün işaretleri $(-1)^m$ ile aynıysa $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ noktasına yerel minimum nokta adı verilir.

Yukarıdaki şartları sağlayan noktalar kesinlikle bir ekstremum olur. Bu şartları sağlamayan gerçekte bir ekstremum olan durağan bir nokta olabilir. Bu yüzden ekstremum için gerek ve yeter şartlar aşağıdadır.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^T & Q - \mu I \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

(x_0, λ_0) noktasında Δ matrisi oluşturulur. Burada μ bilinmeyen parametredir.

$|\Delta| = 0$ polinomunun $(n-m)$ tane kökünün hepsi

i. pozitifse $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ yerel minimum nokta olur.

ii. negatifse $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ yerel maksimum nokta olur [2], [9].

2.9.1.1 Örnek

$$\begin{aligned} \min f &= f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Lagrange çarpan yöntemiyle problemi çözüünüz [2].

Çözüm: Lagrange fonksiyonu oluşturulur.

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) \quad (2.36)$$

Bu fonksiyon için gerek şartlar:

$$\frac{\delta L}{\delta x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_1} = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_2} = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0 \quad (2.37)$$

olur. Bunların çözümü:

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \lambda_{10}, \lambda_{20}) = (0,81; 0,35; 0,28; 0,0867; 0,3067) \quad (2.38)$$

olur. Bu noktanın nasıl bir nokta olduğunu görmek için

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

hesaplanır. $n = 3$, $m = 2$ ve $n - m = 1$ olduğundan yalnızca H^B nin determinant işaretine bakmak yeterlidir. $|H^B| = 460 > 0$ $(-1)^2$ ile aynı işaretlidir. Öyleyse x_0 minimum nokta olur.

Lagrange çarpanlarının yorumu:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ p(x) = b - p(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Tek kısıtlı problemi için b bir sabittir. Bu problem için gerek şartlar yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x_i} + \lambda \frac{\delta p}{\delta x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ p = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Bu denklemlerin çözümü (x_0, λ_0) ve $f^0 = f(x_0)$ olsun. Amaç fonksiyonun optimum değeri üzerinde kısıttaki küçük bir değişimin etkisi için $b - p(x) = 0$ kısıtının diferansiyeli

$$\begin{aligned} db - dp = 0 \\ db = dp = \sum_{i=1}^n \frac{\delta p}{\delta x_i} dx_i = \nabla p' h \\ h = \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = dx \end{aligned} \quad (2.42)$$

dir. Yukarıdaki gerek şartlarla

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x_i} + \lambda \frac{\delta p}{\delta x_i} = \frac{\delta f}{\delta x_i} - \frac{\delta p}{\delta x_i} = 0 \\ \frac{\delta p}{\delta x_i} = \frac{\delta f}{\delta x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.43)$$

yazılabilir. Bu eşitlik (2.41) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$db = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} \frac{\delta f}{\delta x_i} dx_i = \frac{1}{\lambda} \nabla f^t h = \frac{df}{\lambda} \quad (2.44)$$

yazılır, çünkü

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i} dx_i = \nabla f^t h \quad (2.45)$$

dır. Bu yüzden

$$\lambda = \frac{df}{db} \text{ veya } \lambda_0 = \frac{df^0}{db} \text{ ve } df^0 = \lambda_0 (db) \quad (2.46)$$

elde edilir. Bu λ^0 in b e göre f^0 deki marjinal değişmeyi gösterdiğini ifade eder.

2.10 Eşitsizlik Kısıtlı Optimizasyon ve Kuhn Tucker Şartları

$$\begin{aligned} \max f(x) \\ p_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.47)$$

probleminin çözümünde Kuhn Tucker şartlarından yararlanır. Bunun için bütün eşitsizlik kısıtları uygun değişkenlerin kullanılması ile eşitlik durumuna getirilip genel Lagrange fonksiyonu oluşturulur. Kuhn Tucker şartları bu fonksiyonun gerek şartlarından elde edilir. (2.47) problemi $S_i^2 \geq 0$ boş değişkenleri kullanılarak kısıtlar eşitlik durumuna getirilir.

$$G(x) = p_i(x) - b_i + S_i^2 = 0 \quad (2.48)$$

elde edilir. Lagrange fonksiyonu

$$L(x, S, \lambda) = f(x) - \lambda G(x)$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i + S_i^2) \quad (2.49)$$

olacaktır. L fonksiyonu için gerek şartlar:

1. $\frac{\delta L}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta x_j} - \lambda \frac{\delta G}{\delta x_j} = \frac{\delta f}{\delta x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\delta p_i}{\delta x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$
2. $\frac{\delta L}{\delta S_i} = 2\lambda_i S_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$
3. $\frac{\delta L}{\delta \lambda} = G(x) = p_i(x) + S_i^2 = 0$

2'deki denklem için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

a. $\lambda_i > 0$ ise $S_i^2 = 0$ dır. Bu 1'deki kısıtın eşitlik hali ile gerçekleştiğini gösterir. $\lambda_i (p_i(x) - b_i) = 0$ yazılabilir.

b. $S_i^2 > 0$ ise $\lambda_i = 0$ olur ki 1'deki kaynağın f i etkilemediği söylenebilir.

$\lambda_i (p_i(x) - b_i) = 0$ yazılır. Bu yeni şartlar yukarıdaki şartlarla birleştirilirse;

i. $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

ii. $\frac{\delta f}{\delta x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\delta p_i}{\delta x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$

iii. $\lambda_i (p_i(x) - b_i) = 0$

iv. $p_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

elde edilir, bu şartlara Kuhn-Tucker gerek şartları denir. Bu maksimum problemi için yeterli şartlarsa; $f(x)$ in konkav ve $p_i(x)$ in konveks olmasıdır. Bir minimum problemi için yeterli şartlarsa $f(x)$ ve $p_i(x)$ in konveks olmasıdır. (2.47) problemi minimum olarak verilirse i şartı dışında diğer şartlar aynı kalır, kısaca $\lambda_i \leq 0$ alınması yeterlidir [2], [9], [24].

2.10.1 Örnek

$$\begin{aligned}\max f(x_1, x_2, x_3) &= x_1(30 - x_1) + x_2(50 - x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3 \\ x_3 &\leq 17,25 \\ x_1 + x_2 &\leq x_3\end{aligned}\tag{2.50}$$

probleminde Kuhn-Tucker gerek şartlarını uygulayarak optimum çözümü bulunuz[2].

Çözüm: Lagrange fonksiyonu

$$\begin{aligned}L(x, \lambda) &= x_1(30 - x_1) + x_2(50 - x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3 \\ &+ \lambda_1(17,25 - x_3) + \lambda_2(x_3 - x_1 - x_2)\end{aligned}\tag{2.51}$$

L için Kuhn-Tucker gerek şartları

i. $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

ii. $\frac{\delta L}{\delta x_1} = 30 - 2x_1 - 3 - \lambda_2 = 0$

$$\frac{\delta L}{\delta x_2} = 50 - 4x_2 - 5 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_3} = -10 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0\tag{2.52}$$

iii. $\lambda_1(17,25 - x_3) = 0$

$$\lambda_2(x_3 - x_1 - x_2) = 0\tag{2.53}$$

iv. $x_3 \leq 17,25$

$$x_1 + x_2 \leq x_3\tag{2.54}$$

Bu şartları sağlayan noktaları araştırmak için, basit olarak $\lambda_i = 0$ veya $\lambda_i \neq 0$ değerleri için çözümler aranır. Önce $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ olsun. ii nin son denkleminde $\lambda_1 = -10$ olur, bu i yi sağlamaz. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ olsun, ii nin son denklemini sağlamaz. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ olsun, ii nin son denkleminde $\lambda_2 = 10$ bulunur, ilk denkleminde $x_1 = 8,5$, ikinci denkleminde de $x_2 = 8,75$ bulunur. iii nin son denkleminde $x_3 = x_1 + x_2 = 17,25$ bulunur. Böylece $x^0 = (8,5; 8,75; 17,25; 0; 10)$ noktası Kuhn-Tucker şartlarını sağlayan nokta olarak bulunur. $f(x)$ fonksiyonu konkav olduğundan ve kısıtlar doğrusal verildiğinden konveks olduğu anlaşılır. Öyleyse x^0 noktası bölgesel maksimum nokta olur. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ için yukarıdaki şartların sağlanmadığı görülür.

2.11 Newton Yöntemi

Çok değişkenli kısıtsız optimizasyon problemlerinde x^1 başlangıç noktasında verilen fonksiyonun kareli yaklaşımı kullanılır. Kareli yaklaşımı optimum yapan $\hat{x} = x^2$ noktasında yeni yaklaşım fonksiyonu kurulur, bunun optimum noktası x^3 olarak alınıp yeni yaklaşım fonksiyonları oluşturulur, bu şekilde devam edilir. İstenilen duyarlık sağlandığında durulur, o adımdaki x^k en iyi çözüm olur.

k-ıncı adımda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ın x^k çözümündeki Taylor açılımı yardımıyla kareli yaklaşımı

$$F(x) = f(x^k) + \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^k) \frac{\delta f}{\delta x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_j - x_j^k)(x_i - x_i^k) \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i} \quad (2.55)$$

olur. Optimum için gerekli şartlar

$$\frac{\delta F}{\delta x_j} = \frac{\delta f}{\delta x_j} + \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i^k) \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.56)$$

elde edilir. Bunlara Newton ardıştırma denklemleri denir. Burada $\frac{\delta f}{\delta x_j}$ ve $\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}$,

x^k noktasındaki değeri ile kullanılır [2], [24].

2.11.1 Örnek $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 4x_1 - 2x_2^2 + 2x_2 - (x_1 x_2)^{3/2}$ fonksiyonu için $x^1 = (2, 0.5)$ başlangıç noktası olarak maksimum noktayı Newton metoduyla bulunuz[2].

Çözüm: Birinci ve ikinci türevler;

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = -2x_1 + 4 - \frac{3}{2} x_1^{1/2} x_2^{3/2},$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_2} = -4x_2 + 2 - \frac{3}{2} x_1^{3/2} x_2^{1/2},$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_1^2} = -2 - \frac{3}{4} x_1^{-1/2} x_2^{3/2},$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_2^2} = -4 - \frac{3}{4} x_1^{3/2} x_2^{-1/2},$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_1 \delta x_2} = -\frac{9}{4} x_1^{1/2} x_2^{1/2} \quad (2.57)$$

olacaktır. $x^1 = (2, 0.5)$ noktasında bu denklemler değerlendirilirse

$$F(x) = 3.75 + (x_1 - 2)(-0.75) + (x_2 - 0.5)(-3) + \frac{1}{2} \left[(x_1 - 2)^2 (-2.1875) + 2(x_1 - 2)(x_2 - 0.5)(-2.25) + (x_2 - 0.5)^2 (-7) \right] \quad (2.58)$$

elde edilir. Bazı kısaltmalar yapılırsa

$$F(x) = -0.75 + 4.75x_1 + 5x_2 - 10.0938x_1^2 - 3.5x_2^2 - 2.25x_1x_2 \quad (2.59)$$

olur. Newton iterasyon denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta x_1} &= 4.75 - 2.1875x_1 - 2.25x_2 = 0 \\ \frac{\delta F}{\delta x_2} &= 5 - 2.25x_1 - 7x_2 = 0\end{aligned}\quad (2.60)$$

bulunur. Bunların ortak çözümü ile $x_1 = 2.1463$, $x_2 = 0.0244$ elde edilir. $x^2 = (2.1463, 0.0244)$ bulunur. Aynı işlemler bu kez x^2 başlangıç noktası olarak verilmiş gibi tekrarlanır. $\varepsilon = 0.01$ alıp V_j için $|x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon$ olduğunda x^{k+1} en iyi çözüm olarak alınır. Bu yöntem 4 ardıştırmada sonunda durdurulur. Aşağıdaki tablodan $x^5 = (1.9505, 0.1307)$ de birinci türevlerin çok küçük olması bu çözümün optimuma yakın olduğunu gösterir.

| k | x^k | $f(x^k)$ | $\frac{\delta f}{\delta x_j}$ | $\frac{\delta^2 f}{\delta x_j^2}$ | $\frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2}$ | x^{k+1} |
|---|------------------|----------|-------------------------------|-----------------------------------|--|------------------|
| 1 | 2 0.5 | 3.75 | -0.75 -3 | -2.1875 -7 | -2.25 | 2.1463 0.0244 |
| 2 | 2.1463 0.0244 | 4.0142 | -0.3011 1.2017 | -2.002 | -0.5148 | 1.9786 0.1985 |
| 3 | 1.9786 0.1985 | 4.0716 | -0.1438 -0.6538 | -2.0471 -8.6854 | -1.41 | 1.9579 0.1266 |
| 4 | 1.9579 0.1266 | 4.096 | -0.0103 -0.0318 | -2.0241 -9.7756 | -1.12 | 1.9505 0.1307 |

Tablo 2.1 Örnek 2.11.1 için Newton yöntemi

3. VARYASYON HESABI VE OPTİMAL KONTROL

3.1 Ana Kavramlar

Varyasyon hesabı bir fonksiyonun optimumunu (maksimum veya minimum) bulmayla ilgilidir.

3.1.1 Fonksiyon ve Fonksiyonel

i. Fonksiyon: Bir x değişkeni t değişkeninin bir fonksiyonudur, ($x(t) = f(t)$ olarak yazılır). Her t değerine bir x değeri karşılık gelirse bir t sayısına karşılık bir x sayısı vardır. Buradaki t daima zaman olmaz, bağımsız bir değişkendir.

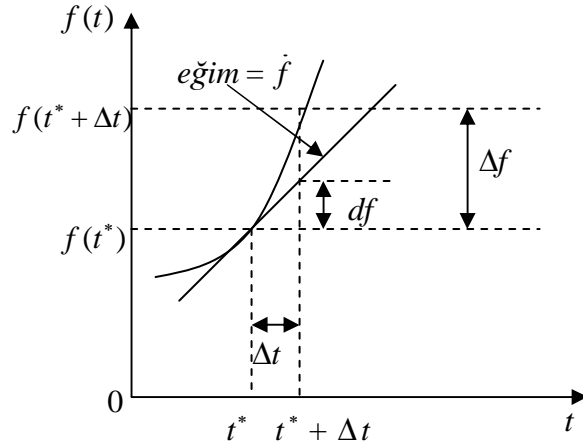
ii. Fonksiyonel: Bir J değişken miktarı $J = J(f(x))$ şeklinde $f(x)$ fonksiyonuna bağlı bir fonksiyoneldir. Her $f(x)$ fonksiyonuna bir J değeri karşılıksa, $f(x)$ fonksiyonuna bir J sayısı karşılıktır. Fonksiyonel birkaç fonksiyona bağlıdır [1].

3.1.2 Artış

i. Bir Fonksiyonun Artışı: f fonksiyonunun artışı Δf ile gösterilir ve şöyle tanımlanır:

$$\Delta f \triangleq f(t + \Delta t) - f(t) \quad (3.1)$$

Tanımdan Δf in t bağımsız değişkenine ve Δt bağımsız değişken artışına bağlı olduğu görülür. $\Delta f(t, \Delta t)$ bir fonksiyonun artışı olarak yazılabilir [1].



Şekil 3.1 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Δf artışı, df diferansiyeli ve \dot{f} türevi

3.1.2.1 Örnek

$$f(t) = (t_1 + t_2)^2 \quad (3.2)$$

fonksiyonunun artışını bulunuz [1].

Çözüm: Δf artışı aşağıdadır.

$$\begin{aligned} \Delta f &\triangleq f(t + \Delta t) - f(t) \\ &= (t_1 + \Delta t_1 + t_2 + \Delta t_2)^2 - (t_1 + t_2)^2 \\ &= (t_1 + \Delta t_1)^2 + (t_2 + \Delta t_2)^2 + 2(t_1 + \Delta t_1)(t_2 + \Delta t_2) - (t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2) \\ &= 2 = 2(t_1 + t_2)\Delta t_1 + 2(t_1 + t_2)\Delta t_2 + (\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2 + 2\Delta t_1\Delta t_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

ii. Bir Fonksiyonelin Artışı: J fonksiyonelinin artışı ΔJ ile gösterilir ve şöyle tanımlanır:

$$\Delta J \triangleq J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (3.4)$$

Burada $\delta x(t)$, $x(t)$ fonksiyonunun bir varyasyonudur. Bir fonksiyonel artışı $x(t)$ fonksiyonuna ve $\delta x(t)$ varyasyonuna bağlı olduğu için artış olarak $\Delta J(x(t), \delta x(t))$ yazılabilir [1].

3.1.2.2 Örnek

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [2x^2(t) + 1] dt \quad (3.5)$$

fonksiyonelinin artışını bulunuz [1].

Çözüm: J nin artışı aşağıdadır.

$$\begin{aligned} \Delta J &\triangleq J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)), \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [2(x(t) + \delta x(t))^2 + 1] dt - \int_{t_0}^{t_f} [2x^2(t) + 1] dt, \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [4x(t)\delta x(t) + 2(\delta x(t))^2] dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.3 Diferansiyel ve Varyasyon

i. Bir Fonksiyonun Diferansiyeli: f fonksiyonunun artışını bir t^* noktasında şöyle tanımlanır.

$$\Delta f \triangleq f(t^* + \Delta t) - f(t^*) \quad (3.7)$$

t^* in Taylor serisi $f(t^* + \Delta t)$ genişletilir.

$$\Delta f = f(t^*) + \left(\frac{df}{dt}\right)_* \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_* (\Delta t)^2 + \dots - f(t^*) \quad (3.8)$$

Δt de yüksek dereceli terimler ihmal edilerek

$$\Delta f = \left(\frac{df}{dt} \right)_* \Delta t = \dot{f}(t^*) \Delta t = df \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada df , t^* noktasında f nin *diferansiyeli* adını alır. $\dot{f}(t^*)$, t^* da f nin eğimi veya türevidir. df diferansiyeli Δt artışının birinci dereceden tahminidir [1].

3.1.3.1 Örnek $f(t) = t^2 + 2t$ fonksiyonunun türevini ve artışını bulunuz [1].

Çözüm: Tanım gereği, Δf artışı

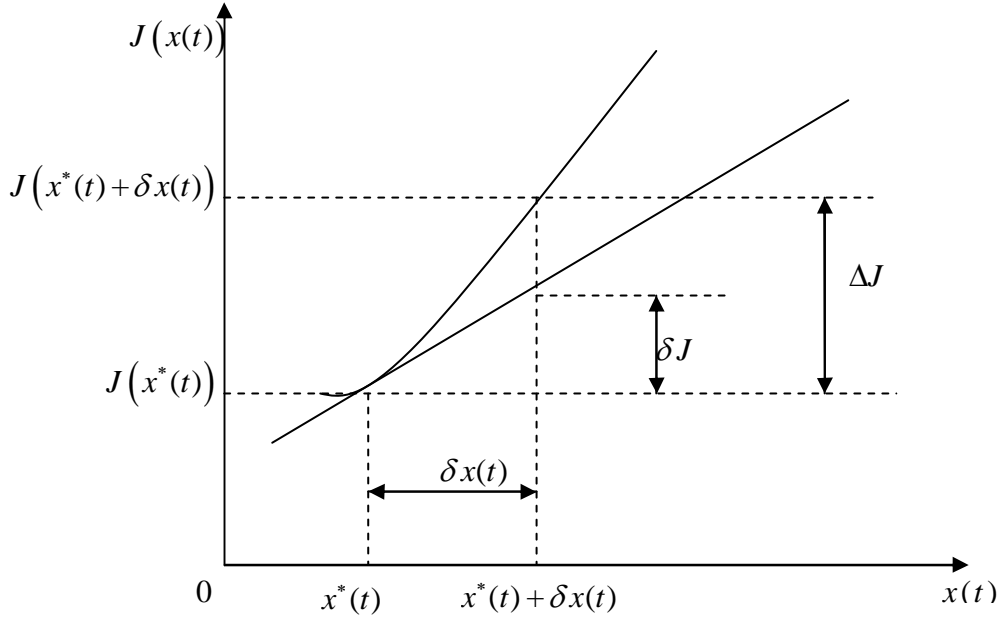
$$\begin{aligned} \Delta f &\triangleq f(t + \Delta t) - f(t), \\ &= (t + \Delta t)^2 + 2(t + \Delta t) - (t^2 + 2t), \\ &= 2t\Delta t + 2\Delta t + \dots + \text{yüksek dereceli terimler}, \\ &= 2(t + 1)\Delta t, \\ &= \dot{f}(t)\Delta t. \end{aligned} \quad (3.10)$$

dir, burada $\dot{f}(t) = 2(t + 1)$ dir.

ii. Bir Fonksiyonelin Varyasyonu: Bir fonksiyonelin artışı Taylor serisinde $J(x(t) + \delta x(t))$ genişletilerek

$$\Delta J \triangleq J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(x(t)) + \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \dots - J(x(t)) \\ &= \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \dots \end{aligned}$$



Şekil 3.2 J fonksiyonelinin ΔJ artışı ve δJ ilk varyasyonu

$$= \delta J + \delta^2 J + \dots, \quad (3.12)$$

elde edilir.

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) \text{ ve } \delta^2 J = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 \quad (3.13)$$

Bu eşitliklere J fonksiyonelinin sırayla *ilk varyasyonu* ve *ikinci varyasyonu* denir. J fonksiyonelinin δJ varyasyonu ΔJ artışının lineer kısmıdır. Şekil 3.2’de bir fonksiyonelin ilk varyasyonu ve artışı arasındaki bağlantı gösterilmiştir [1].

3.1.3.2 Örnek

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [2x^2(t) + 3x(t) + 4] dt \quad (3.14)$$

fonksiyonelinin varyasyonunu değerlendiriniz [1].

Çözüm: Önce artışı biçimlendirip sonra birinci dereceli tahmin olarak varyasyonu şu şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
\Delta J &\triangleq J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)), \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[2(x(t) + \delta x(t))^2 + 3(x(t) + \delta x(t)) + 4 - (2x^2(t) + 3x(t) + 4) \right] dt, \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[4x(t)\delta x(t) + 2(\delta x(t))^2 + 3\delta x(t) \right] dt
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Sadece birinci dereceli terimler incelenirse ilk varyasyon şu şekildedir:

$$\delta J(x(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (4x(t) + 3)\delta x(t) dt. \tag{3.16}$$

3.2 Bir Fonksiyon ve Fonksiyonelin Optimumu

Bir fonksiyon ve fonksiyonelin ekstremumu (maksimum veya minimum) veya optimumu için bazı tanımlar aşağıda verilmiştir. Varyasyon bir fonksiyonelin optimal değeri belirlemede aynı rolü oynar, bir fonksiyonun optimal değeri veya ekstremumunu bulmada diferansiyel olarak çalışır.

3.2.1 Tanım Bir Fonksiyonun Optimumu: Eğer bir D düzleminde tüm noktalar için $|t - t^*| < \varepsilon$ sağlayan bir ε pozitif parametresi varsa bir $f(t)$ fonksiyonun t^* noktasında bir göreceli optimumu vardır, $f(t)$ artışı aynı işaretlidir (pozitif veya negatif).

$$\Delta f = f(t) - f(t^*) \geq 0, \tag{3.17}$$

ise $f(t^*)$ göreceli lokal *minimum*dur.

$$\Delta f = f(t) - f(t^*) \leq 0, \tag{3.18}$$

ise $f(t^*)$ göreceli lokal *maksimum*dur. Önceki bağlantılar ε keyfi büyüklüğü için sağlanıyorsa, $f(t^*)$ bir *global* tam optimumuma sahiptir

Bir fonksiyonun optimumu için *gerek* şart (ilk) diferansiyelin sifıra eşit olmasıdır, $df = 0$. Yeter şart

i. minimum için ikinci diferansiyel pozitiftir, $d^2f > 0$ dır,ve

ii. maksimum için ikinci diferansiyel negatiftir, $d^2f < 0$ dır.

$d^2f = 0$ ise, bir sabit noktaya karşılık gelir [1].

3.2.2 Tanım Bir Fonksiyonelin Optimumu: Bir J fonksiyonelinin $|x - x^*| < \varepsilon$ sağlayan bir Ω düzlemi içinde tüm x fonksiyonları için pozitif bir ε varsa x^* da bir göreceli optimumu vardır, J artışı aynı işaretlidir.

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0, \quad (3.19)$$

ise $J(x^*)$ bir göreceli *minimum*dur.

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0, \quad (3.20)$$

ise $J(x^*)$ bir göreceli *maksimum*dur. Yukarıdaki bağlantılar keyfi bir ε için sağlanırsa $J(x^*)$ bir *global* tam optimumdur [1].

Fonksiyonların optimal veya ekstremum değerlerini bulmaya benzer olarak, *fonksiyonellerle* ilgili varyasyon problemlerinde, varyasyon optimal bir kavis üzerinde sıfır olmalıdır. *Varyasyon hesabı temel teoremi* aşağıdadır.

3.2.3 Teorem $x^*(t)$ için optimum aday olarak, J nin (ilk) varyasyonu $x^*(t)$ de sıfır olmalıdır, $\delta x(t)$ nin tüm kabul edilebilir değerleri için $\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$

dır. Gerek şart budur. Minimum için yeter şart $\delta^2 J > 0$, ikinci varyasyon ve maksimum için $\delta^2 J < 0$ dır [1].

3.3 Temel Varyasyon Problemi

3.3.1 Sabit-Bitiş Zamanlı ve Sabit-Bitiş Durumlu Sistem

Hem başlangıç zamanı ve durumu hem de bitiş zamanı ve durumu sabit olan veya önceden verilen bir sabit-bitiş zamanlı ve sabit-bitiş durumlu problemi açıklayalım. $x(t)$ sürekli birinci türevli bir skaler fonksiyon olsun. Vektör durumu benzer şekilde olabilir. Problem, ilgili fonksiyonel için $x^*(t)$ optimal fonksiyonunu bulmaktır.

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (3.21)$$

bir bağıl optimuma sahiptir. V integralleneni sürekli birinci ve ikinci kısmi türevleri vardır. t_0 ve t_f sabittir (veya önceden verilmiştir). Bitiş noktaları sabittir.

$$x(t = t_0) = x_0; \quad x(t = t_f) = x_f. \quad (3.22)$$

Optimum için gerek şart 3.2.3 teoreminden bir fonksiyoneli sifıra eşitleyenlerin varyasyonudur. $x(t)$ optimumunu bulma girişiminde, ilk olarak J için artış tanımlanır, varyasyon elde edilir ve son olarak varyasyon hesabı temel teoremini uygulanır..

Sabit-bitiş zamanlı ve sabit-bitiş durumlu sisteme optimal çözüm bulma farklı adımlar içerir.

- Adım 1: Bir Optimumun Varsayımı
- Adım 2: Varyasyonlar ve Artış
- Adım 3: İlk Varyasyon

- Adım 4:* Temel Teorem
Adım 5: Temel Lemma
Adım 6: Euler-Lagrange Denklemi

Adım 1 Bir Optimumun Varsayımı: $x(t)$ fonksiyonu için ulaşılan optimum $x^*(t)$ olsun. $x^*(t)$ e yakın $x_a(t) = x^*(t) + \delta x(t)$ kabul edilebilir fonksiyonunu alalım, $\delta x(t)$, $x^*(t)$ nin varyasyonudur. $x_a(t)$ fonksiyonu (3.22) sınır şartlarını sağlamalıdır ve gerek şart aşağıdadır.

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0 \quad (3.23)$$

Adım 2 Varyasyon ve Artış: Artış tanımı ile integraller birleştirilir.

$$\begin{aligned} \Delta J(x^*(t), \delta x(t)) &\triangleq J(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - J(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} V(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

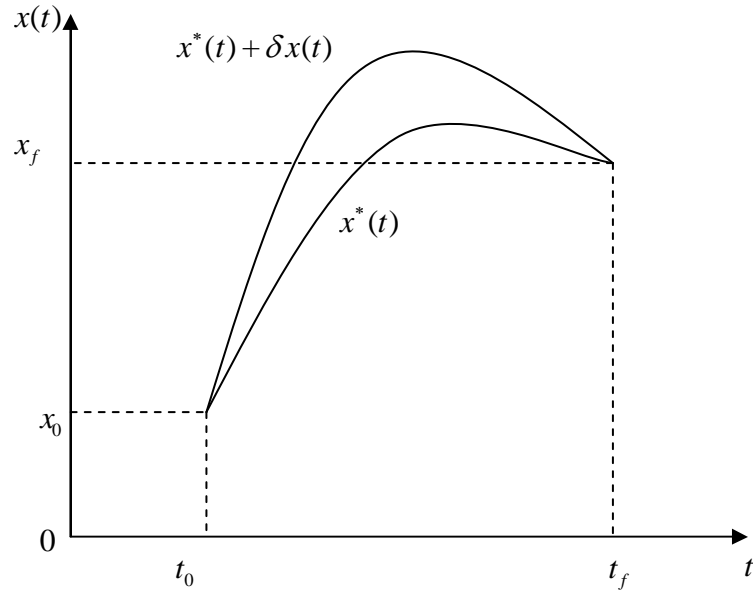
$$\begin{aligned} \Delta J(x^*(t), \delta x(t)) &= \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [V(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)] dt \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir ve burada

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ ve } \delta \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \{\delta x(t)\} \quad (3.26)$$

$x^*(t)$ ve $\dot{x}^*(t)$ noktasının Taylor serisi (3.25) artışı içinde V genişletilerek, ΔJ artışı

$$\begin{aligned} \Delta J &= \Delta J(x^*(t), \delta x(t)) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) + \right] \end{aligned}$$



Şekil 3.3 Sabit-bitiş zamanlı ve sabit-bitiş durumlu sistem

$$+ \left[\frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 V(\dots)}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \frac{\partial^2 V(\dots)}{\partial \dot{x}^2} (\delta \dot{x}(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 V(\dots)}{\partial x \partial \dot{x}} \delta x(t) \delta \dot{x}(t) \right\} + \dots \right] dt \quad (3.27)$$

halini alır, burada kısmi türevler $x(t)$ ve $\dot{x}(t)$, (*) ve * optimallik şartında kolaylık amaçlı ihmal edilir.

Adım 3 İlk Varyasyon: $\delta x(t)$ ve $\delta \dot{x}(t)$ de lineer olan terimler korunarak varyasyon elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta J(x^*(t), \delta x(t)) &= \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right] dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\delta x(t)$ içeren terimlerde (3.28) ilk varyasyonu için bağıntıyı göstermek, $\delta \dot{x}(t)$ içeren terimlerin integrasyonu ile olur ($\delta \dot{x}(t)$, $\delta x(t)$ e bağlı olduğu için).

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \frac{d}{dt} (\delta x(t)) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* d(\delta x(t)), \\
&= \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* dt
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Yukarıda iyi bilinen $\int u dv = uv - \int v du$ formülü kullanılmıştır, burada $u = \partial V / \partial \dot{x}$ ve $v = \delta x(t)$ dir. (3.29) kullanılarak ilk varyasyon için (3.28) bağlantısı aşağıdadır.

$$\begin{aligned}
\delta J(x^*(t), \delta x(t)) &= \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* \delta x(t) dt + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) dt, \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \right] \delta x(t) dt + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

(3.23) bağlantısı kullanılarak (3.30)'da sınır değişkenleri için

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \right] \delta x(t) dt \tag{3.31}$$

elde edilir.

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \right] \delta x(t) dt = 0 \tag{3.32}$$

Adım 4 Temel Teorem: Varyasyon hesabının temel teoremi uygulanır. J varyasyonu bir optimum için yok olmalıdır. $x^*(t)$ optimumu için $\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$ dir. (3.31) bağlantısı haline gelir. $\delta x(t)$ fonksiyonu t_f ve t_0 da sıfır olmalıdır, bunun için keyfidir.

Adım 5 Temel Lemma: (3.32) denkleminde bulunan şartı basitleştirmek için varyasyon hesabı temel lemması adı verilen aşağıdaki avantaj kullanılır.

3.3.2 Lemma Sürekli her $g(t)$ fonksiyonu için,

$$\int_{t_0}^{t_f} g(t) \delta x(t) dt = 0 \quad (3.33)$$

tir ve burada $\delta x(t)$ fonksiyonu $[t_0, t_f]$ aralığında sürekli, $g(t)$ fonksiyonu $[t_0, t_f]$ aralığı boyunca her yerde sıfır olmalıdır [1].

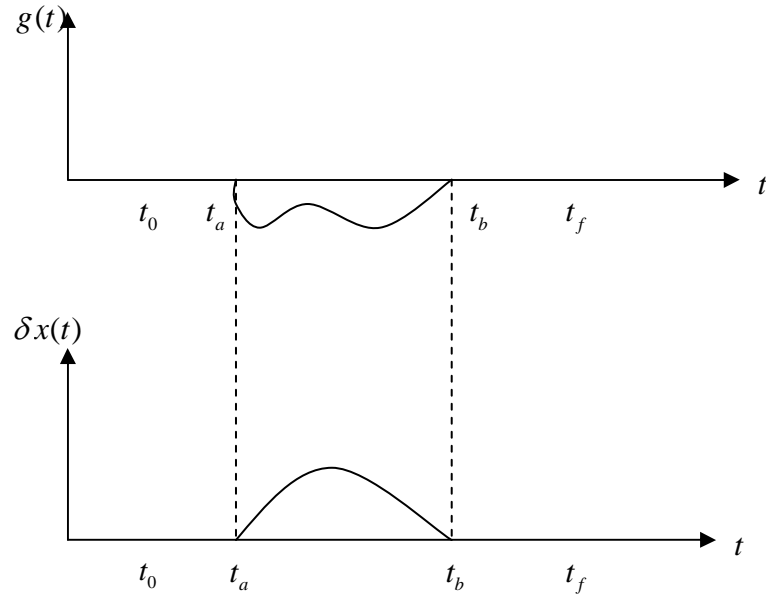
İspat: Çelişki ile ispatlayalım. Farz edelim ki $g(t)$ $[t_a, t_b]$ kısa aralığında sıfırdan farklı (pozitif veya negatif) olsun. $\delta x(t)$ i $g(t)$ nin sıfırdan farklı değerler aldığı aralık boyunca pozitif (veya negatif) olacak şekilde keyfi seçelim. $\delta x(t)$ nin bu seçimi ile (3.33)'de integral değeri sıfırdan farklı olacaktır. Bu aralık boyunca sıfırdan farklı olan farz ettiğimiz $g(t)$ ile çelişir. $g(t)$ (3.33)'de tüm $[t_0, t_f]$ aralığı boyunca her yerde sıfır olmalıdır.

Adım 6 Euler-Lagrange Denklemi: (3.32)'ye yukarıdaki lemma uygulandığında $x^*(t)$ için gerek şart (3.21) ile verilen J fonksiyonelinin bir optimalı olur.

$$\left(\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \quad (3.34)$$

tür veya notasyon basitleşsin diye V deki idealar ihmal edilerek tüm $t \in [t_0, t_f]$ için

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \quad (3.35)$$



Şekil 3.4 Sıfırdan farklı $g(t)$ ve $\delta x(t)$ keyfisi

elde edilir. Bu denkleme Euler-Lagrange denklemi denir [1], [10], [15], [22].

3.3.3 Euler-Lagrange Denkleminin Yorumu

Euler-Lagrange denklemindeki bazı yorumlar aşağıdadır.

1. (3.34)'deki Euler-Lagrange denklemi birçok farklı formda yazılabilir.

$$V_x - \frac{d}{dt}(V_{\dot{x}}) = 0 \quad (3.36)$$

halini alabilir ve burada

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = V_x(x^*(t), \dot{x}^*(t), t); \quad V_{\dot{x}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = V_{\dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \quad (3.37)$$

V $x^*(t)$, $\dot{x}^*(t)$ ve t nin bir fonksiyonu ve $x^*(t)$, $\dot{x}^*(t)$ de t nin dönüşmüş fonksiyonları olduğu için

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right)_*, \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} d\dot{x} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{x}} dt \right)_*, \\
&= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_* \left(\frac{dx}{dt} \right)_* + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \right)_* \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)_* + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{x}} \right)_* \\
&= V_{x\dot{x}} \dot{x}^*(t) + V_{\dot{x}\dot{x}} \ddot{x}^*(t) + V_{t\dot{x}}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

haline gelir. (3.36) ve (3.38) birleştirilerek, Euler-Lagrange denkleminin alternatif formu elde edilir.

$$\boxed{V_x - V_{t\dot{x}} - V_{x\dot{x}} \dot{x}^*(t) - V_{\dot{x}\dot{x}} \ddot{x}^*(t) = 0} \tag{3.39}$$

2. (3.34)'de $\dot{x}^*(t)$ ve/veya $\frac{d}{dt}$ nin varlığı diferansiyel bir denklem olduğu anlamına gelir.

3. (3.34) Euler-Lagrange denkleminde $\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}}$ terimi $x^*(t)$, $\dot{x}^*(t)$ ve t nin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon diferansiyellendiğinde, $\ddot{x}^*(t)$ mevcut olabilir. Yani (3.34) diferansiyel denklemi ikinci derecedir. Euler-Lagrange denkleminin için (3.39) alternatif formundan bu bellidir.

4. $\ddot{x}^*(t)$, $\dot{x}^*(t)$ ve $x^*(t)$ güçleri veya ürünlerini içeren terimler olabilir, bu durumda diferansiyel denklem *lineer değildir*.

5. t nin varlığı katsayıların *zamanla değişebildiğini* gösterir.

6. Başlangıç noktasındaki $t = t_0$ ve bitiş noktasındaki $t = t_f$ şartları bir *sınır değer* problemini oluşturur.

7. (3.34) Euler-Lagrange denkleminin bir lineer olmayan, zamanla değişen, iki nokta sınır değeri, ikinci dereceli, adi diferansiyel denklemdir. Yani bir lineer olmayan iki nokta sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü oldukça zordur ve sayısal teknikler kullanılır. Bu optimal performansın kötü bir yanıdır.

8. Euler-Lagrange denklemi ile uygun sadece bir optimum gerek şart vardır. Optimal bazen bir maksimum veya minimumda bulunmayabilir; diferansiyel hesaplamada türevin bulunduğu değişen noktalar yok olur. Euler-Lagrange denklemi her fonksiyonu sağlamazsa bu, fonksiyonel için optimumun olmadığını gösterir [1].

3.3.4 Euler-Lagrange Denklemi İçin Farklı Durumlar

Durum 1 $V = V(\dot{x}(t), t)$ ve t e bağlıdır. Yani; $V = V(\dot{x}(t), t)$ dir. $V_x = 0$ ile (3.36) Euler-Lagrange denklemi şu hale gelir:

$$\frac{d}{dt}(V_{\dot{x}}) = 0 \quad (3.40)$$

Buradan,

$$V_x = \frac{\partial V(\dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} = C \quad (3.41)$$

bulunur, burada C bir integrasyon sabitidir.

Durum 2: V sadece $\dot{x}(t)$ e bağlıdır. Yani; $V = V(\dot{x}(t))$ dir. $V_x = 0$ ile (3.36) Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt}(V_{\dot{x}}) = 0 \rightarrow V_{\dot{x}} = C \quad (3.42)$$

halini alır, (3.41) veya (3.42)'nin çözümü aşağıdadır ve bu basit bir doğru denklemdir.

$$\dot{x}^*(t) = C_1 \rightarrow x^*(t) = C_1 t + C_2 \quad (3.43)$$

Durum 3: V $\dot{x}(t)$ ve $x(t)$ e bağlıdır. Yani; $V = V(x(t), \dot{x}(t))$ dir. $V_{\dot{x}} = 0$ ile (3.39) Euler-Lagrange denkleminin diğer formu kullanılarak

$$V_x - V_{\dot{x}}\dot{x}^*(t) - V_{\ddot{x}}\ddot{x}^*(t) = 0 \quad (3.44)$$

elde edilir ve $\dot{x}^*(t)$ ile önceki denklem çarpılır,

$$\dot{x}^*(t) [V_x - V_{\dot{x}}\dot{x}^*(t) - V_{\ddot{x}}\ddot{x}^*(t)] = 0 \quad (3.45)$$

şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{d}{dt} (V - \dot{x}^*(t)V_{\dot{x}}) = 0 \rightarrow V - \dot{x}^*(t)V_{\dot{x}} = C \quad (3.46)$$

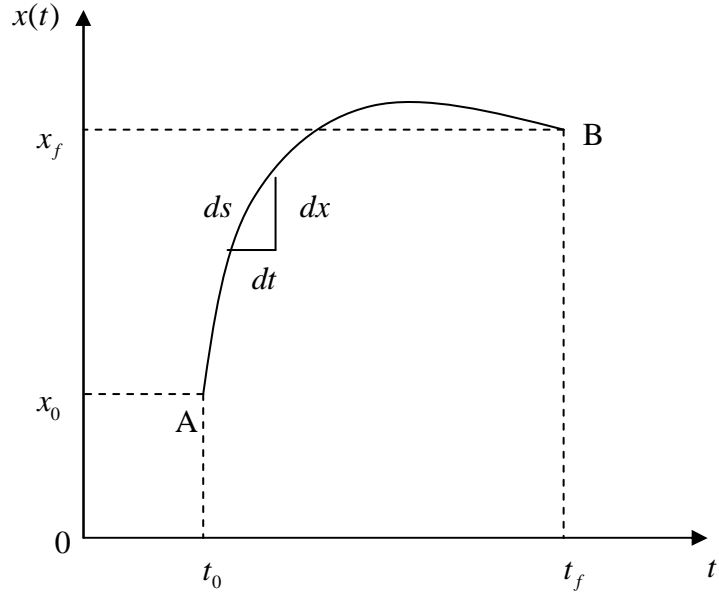
Durum 4: V $x(t)$ ve t e bağlıdır. $V = V(x(t), t)$ dir. $V_{\dot{x}} = 0$ ile (3.36) Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial V(x^*(t), t)}{\partial x} = 0 \quad (3.47)$$

halini alır. Bu denklem çözümü hiç keyfi sabit içermez. Bu yüzden $x(t_0)$ ve $x(t_f)$ sınır şartlarını sağlamaz. Bu varyasyonel problemin çözümü yoktur. $x(t)$ fonksiyonu verilen sınır şartları $x(t_0)$ ve $x(t_f)$ i sağlarsa, bir optimal fonksiyon halini alır [1].

3.3.5 Örnek İki nokta arasındaki minimum uzunluğu bulunuz [1].

Çözüm: Bu problemin çözümü bir doğrudur. Şekil 3.5’de gösterilen A ve B noktaları arasındaki yay uzunluğu ds olsun. Dikdörtgen koordinat değerleri dx ve dt olsun. t uzaklığa bağlı değişkendir, zaman değildir.



Şekil 3.5 Yay uzunluğu

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dt)^2 \quad (3.48)$$

denkleminde

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \text{ ve } ds = \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \quad (3.49)$$

dur. $x(t = t_0)$ ve $x(t = t_f)$ noktaları arasındaki toplam yay uzunluğu S , minimize edilen J performans indeksidir.

$$S = J = \int ds = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt = \int_{t_0}^{t_f} V(\dot{x}(t)) dt \quad (3.50)$$

Burada $V(\dot{x}(t)) = \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}$ dir. V sadece $\dot{x}(t)$ e bağlı bir fonksiyondur.

(3.50) performans indeksine uygulanan (3.42) Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\dot{x}^*(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}^{*2}(t)}} = C \quad (3.51)$$

bulunur, bu denklem çözülerek optimal çözüm

$$x^*(t) = C_1 t + C_2 \quad (3.52)$$

bulunur ve bu bir doğru denklemdir. Verilen sınır şartlarından C_1 ve C_2 sabitleri değerlendirilir. Örnek olarak $x(0) = 1$ ve $x(2) = 5$, $C_1 = 2$ ve $C_2 = 1$ doğrusu $x^*(t) = 2t + 1$ dir. Özet olarak

- i. Verilen basit bir açıklama veya durumdan performans indeksi formülendir.
- ii. Euler-Lagrange denkleminin uygulaması önceden bilinen çözümle gerçekleşir .

Bu örnekte (3.50) fonksiyonelinin V integralleneni sadece $\dot{x}(t)$ nin bir fonksiyonudur. Aşağıdaki örnekte V , $x(t)$, $\dot{x}(t)$ ve t nin bir fonksiyonudur.

3.3.6 Örnek

$$J = \int_0^2 [2x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt \quad (3.53)$$

$$x(0) = 0 \text{ ve } x(2) = 5 \quad (3.54)$$

sınır şartlarını sağlayan optimumu bulunuz.

Çözüm: (3.39) denkleminde $V = 2x^2(t) + \dot{x}^2(t)$ belirlenir. (3.53) performans indeksine (3.35) denklemi uygulandığında

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow 4x(t) - \frac{d}{dt} (2\dot{x}(t)) = 0 \rightarrow \ddot{x}(t) = 2x(t) \quad (3.55)$$

bulunur ve önceki basit diferansiyel denklem çözülerek

$$x^*(t) = \frac{x^3(t)}{3} + C_1 t + C_2 \quad (3.56)$$

elde edilir. Burada C_1 ve C_2 integrasyon sabitidir. (3.56)'da, verilen (3.39) sınır şartları kullanılarak

$$x(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0, x(2) = 5 \rightarrow C_1 = \frac{-55}{3} \quad (3.57)$$

bulunur ve bu sabit değerleri ile optimal fonksiyon elde edilir.

$$x^*(t) = \frac{x^3(t)}{3} - \frac{55}{3}t \quad (3.58)$$

3.4 İkinci Varyasyon

İlk varyasyonun kayboluşu klasik Euler-Lagrange denklemi ile başlar. Optimumun doğası için ikinci varyasyonu incelemek gerekir. Artışın (3.27) bağıntısındaki terimler ikinci varyasyona karşılıktır.

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_* (\delta x(t))^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} \right)_* (\delta \dot{x}(t))^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \delta \dot{x}(t) \right] dt \quad (3.59)$$

Önceki denklemdeki son terim incelenir ve kısmi integrasyon kullanılarak $\delta x(t)$ nin terimlerinde yazılır. Sabit bitiş şartları $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ kullanılarak

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\left\{ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_* \right\} (\delta x(t))^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} \right)_* (\delta \dot{x}(t))^2 \right] dt \quad (3.60)$$

bulunur. Teorem 3.2.3'e göre, varyasyon hesabı temel teoreminden, minimum için yeter şart $\delta^2 J > 0$ dır. Bu $\delta x(t)$ ve $\delta \dot{x}(t)$ keyfi değerleri için

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}}\right)_* > 0, \quad (3.61)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2}\right)_* > 0. \quad (3.62)$$

olacağı anlamına gelir. Maksimum için önceki şartların işaretleri ters çevrilir. Matris formunda (3.59) ikinci varyasyonunu tekrar yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \delta^2 J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \delta x(t) & \delta \dot{x}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}_* \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta \dot{x}(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \delta x(t) & \delta \dot{x}(t) \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta \dot{x}(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned} \quad (3.63)$$

Burada

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}_* \quad (3.64)$$

Önceki denklemdeki Π matrisi pozitif (negatif) tanımlı ise, minimum (maksimum) bulunur. $\delta x(t)$ keyfi olduğu için, $(\delta \dot{x}(t))^2$ nin katsayısı, $\partial^2 V / \partial \dot{x}^2$ $\delta^2 J$ nin işaretini belirler. İkinci varyasyonun işareti $\partial^2 V / \partial \dot{x}^2$ nin işareti ile uyudur. Minimizasyon için

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2}\right)_* > 0. \quad (3.65)$$

i gerektirir. Maksimizasyon için önceki denklemin işareti ters çevrilir. Literatürde bu şarta *Legendre şartı* denir [1], [22].

3.4.1 Örnek İki nokta arasındaki minimum uzaklığı gösteren doğruyu sağlayınız [1].

Çözüm: İki nokta arasındaki uzaklık için bir fonksiyoneli formülleyelim.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt = \int_{t_0}^{t_f} V(\dot{x}(t)) dt \quad (3.66)$$

$x^*(t) = C_1 t + C_2$ doğrusu optimumdur. (3.65) yeter şartını sağlayarak

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* = \frac{\dot{x}^*(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}^{*2}(t)}} \text{ ve } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} \right)_* = \frac{1}{[1 + \dot{x}^{*2}(t)]^{3/2}} \quad (3.67)$$

bulunur, $\dot{x}^*(t)$ sabit olduğu için önceki denklem (3.65) şartını sağlar. $x^*(t)$ ile verilen iki nokta arasındaki uzaklık minimumdur. Optimal kontrolün ikinci aşamasında bir sistem fonksiyonelinin optimizasyonu, fonksiyonelin şartı veya sınırı bulunur. Bir sistem denkleminin formundaki bazı şartlarla bir fonksiyonelin ekstremizasyonunu açıklayalım. Durum denkleminin formundaki sistem dinamik sistemlerin optimal kontrolünü oluşturur.

3.5 Şartlarla Fonksiyonların Ekstremumları

Bir şart altında bir fonksiyonun ekstremumunu bulunmasını açıklayan örnek aşağıda verilmiştir. Çözüm için iki metot kullanılmıştır. Birincisi direkt metot, ikincisi Lagrange çarpan metodudur. Bu örnek şartlı ekstremizasyon ile ilgili ana kavramları da açıklamaktadır.

3.5.1 Örnek Bir manufakturacı ilgili şartlarla dairesel bir depodaki malzemenin hacmini maksimize etmek ister. Depo sınırlıdır (sabittir). Malzemenin inceliği bir sabit olmak üzere manufakturacı kullanılan malzemenin hacmini ve depo için maliyeti minimize etmek ister [1].

Çözüm: Malzemenin inceliği bir sabit farz edilirse, deponun alanı da sabittir. Dairesel deponun çapı ve yüksekliği d ve h olsun. Deponun hacmi

$$V(d, h) = \pi d^2 h / 4 \quad (3.68)$$

dir ve deponun alanı

$$A(d, h) = 2\pi d^2 / 4 + \pi dh = A_0 \quad (3.69)$$

dır ve burada A_0 verilen bir sabittir ve amaç $A(d, h) = A_0$ korunarak $V(d, h)$ maksimize etmektir. İki metotla çözüm verilmiştir.

i. Direkt Metot: Doğrudan optimum değeri bulmak için değişkenlerden birini yok edelim, (3.69) alan bağıntısında (3.68) hacim bağıntısından h yok edilerek orijinal fonksiyonu ekstremlenilen eden şart bulunur. (3.69)'dan,

$$h = \frac{A_0 - \frac{\pi d^2}{2}}{\pi d} \quad (3.70)$$

elde edilir ve (3.68) bağıntısında yükseklik için (3.70) bağıntısı kullanılarak hacim

$$V(d) = \frac{A_0 d}{4} - \frac{\pi d^3}{8} \quad (3.71)$$

bulunur. Bu hesaplama probleminin ekstremumunu bulmak için (3.71) d ye göre diferansiyellenir ve sifıra eşitlenir.

$$\frac{A_0}{4} - \frac{3}{8} \pi d^2 = 0 \quad (3.72)$$

denklemini çözülerek d optimal değeri bulunur.

$$d^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}} \quad (3.73)$$

Bir fonksiyonun optimumu için 3.2.1 tanımından (3.71)'de d ye göre V nin ikinci türevi alınır, *maksimum için negatif* olur. Fonksiyonun maksimum değerine karşılık karekök fonksiyonunun pozitif değerinin geldiği kolayca görülür. (3.69) ile verilen orijinal alanda (3.73) çapın optimal değeri yerine konularak

$$h^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}} \quad (3.74)$$

elde edilir. Deponun yüksekliği çapına eşit olursa depoya sınırlı hacim (3.73) ve (3.74)'den maksimize edilir.

ii. Lagrange Çarpan Metodu: Bu metotta orijinal fonksiyona verilen bir şart eklenip yeni bir fonksiyon formu oluşturulur ve ekstremize edilir. Yeni eklenmiş (adjoined) fonksiyon tüm değişkenlere göre kısmi türevleri alınır, sıfıra eşitlenir ve ekstremal değişkenler çözülür. Ekstremize edilen (3.68) orijinal hacim bağıntısı

$$f(d, h) = \frac{\pi d^2 h}{4} \quad (3.75)$$

dir ve (3.69) şartının sağlaması olarak

$$g(d, h) = \frac{2\pi d^2}{4} + \pi dh - A_0 = 0 \quad (3.76)$$

yazılır ve Lagrange fonksiyonu denilen L yeni eklenmiş (adjoint) fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(d, h, \lambda) &= f(d, h) + \lambda g(d, h) \\ &= \frac{\pi d^2 h}{4} + \lambda \left(\frac{2\pi d^2}{4} + \pi dh - A_0 \right) \end{aligned} \quad (3.77)$$

bulunur ve burada λ *Lagrange Çarpanı* denilen bir parametredir. d , h ve λ optimal değişkenlerin bir fonksiyonu L Lagrange fonksiyonu olduğu için $L(d, h, \lambda)$ ın her değişkene d , h ve λ göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial L}{\partial d} = \frac{\pi dh}{2} + \lambda(\pi d + \pi h) = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\pi d^2}{4} + \lambda(\pi d) = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{2\pi d^2}{4} + \pi dh - A_0 = 0 \quad (3.80)$$

Bu üç bağıntı çözülerek

$$d^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}}; \quad h^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}}; \quad \lambda^* = -\sqrt{\frac{A_0}{24\pi}} \quad (3.81)$$

elde edilir. Silindirik bir deponun hacmini maksimize etmek için, deponun (d^*) çapına eşit (h^*) yüksekliğine ihtiyaç vardır. (3.79)'dan bulunan d çapı fiziksel gerektirmeyi sağlaması için (3.81)'deki λ nın karekök fonksiyonunun negatif değeri alınmalıdır.

$$d = -4\lambda \quad (3.82)$$

denklemleri pozitif değerlidir. Bu iki metodun geliştirilmesi aşağıdadır [1], [22].

3.5.2 Direkt Metot

Bu metotta diferansiyel hesaplama kullanarak değişken yok edilir. Geliştirme için birbirine bağlı değişkenler x_1 ve x_2 ile $f(x_1, x_2)$ fonksiyonunun ekstremumu bulunur. İlgili şart

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad (3.83)$$

dır ve ekstremum için gerekli şart olarak

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (3.84)$$

elde edilir. dx_1 ve dx_2 keyfi olmadığından şartla bağlantılıdır.

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (3.85)$$

Şartlar olmadan fonksiyonun ekstremizasyonunu bitirmek mümkün değildir.

(3.84) gerek şartında

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad (3.86)$$

bulunur. (3.86) ekstremum şartları x_1^* ve x_2^* optimal değerleri ile çözülürse, (3.83) ile verilen şart optimal değerleri garanti etmez. Hem (3.83) şartını hem de (3.84) ekstremum şartlarını sağlayan optimal değerleri bulmak için, keyfi olarak bir değişken seçilir, x_1 bağımsız değişkenini seçilirse (3.83) şartına göre x_2 bağımlı bir

değişken olur. Farz edelim ki $\frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0$ olsun, bu durumda (3.85)

$$dx_2 = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{array} \right\} dx_1 \quad (3.87)$$

halini alır ve (3.84) gerek şartında (3.87) kullanılarak

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{array} \right\} \right] dx_1 = 0 \quad (3.88)$$

bulunur. dx_1 bağımsız olarak seçildiğinden, keyfi olarak incelenebilir ve (3.88)'i sağlar. dx_1 katsayısı sıfır olsun.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.89)$$

dir ve (3.83) şartı ile (3.89) bağıntısı x_1^* ve x_2^* optimal çözümleri ile çözülür. (3.89) denklemini şu şekilde tekrar yazılır:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.90)$$

x_1 ve x_2 e göre f ve g Jacobi denklemdir. Bağımlı değişkenleri yok etme metodu yüksek dereceli problemler için oldukça zaman alır [1].

3.5.3 Lagrange Çarpan Metodu

Şartlarla verilen aynı problemin ekstremumunu bulmak için Lagrange çarpan metodu genelleştirilir. $f(x_1, x_2)$ fonksiyonunun ekstremumunu incelenir, ilgili şart olarak

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad (3.91)$$

tür ve bu metotta *artan (augmented)* Lagrange fonksiyonu

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) \quad (3.92)$$

tır ve burada λ belirlenen bir parametre (çarpan), Lagrange çarpanıdır. (3.92)

Lagrange denkleminde, verilen (3.91) şartı kullanılarak

$$L(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \quad (3.93)$$

bulunur ve ekstremum için gerek şart

$$df = dL = 0 \quad (3.94)$$

dir. (3.92) Lagrange denklemi tam problemin gösteriminde (3.93) ekstremumu bulma denkleminde daha iyidir. (3.92) Lagrange bağıntısından

$$dL = df + \lambda dg = 0 \quad (3.95)$$

bulunur ve (3.95)'de (3.84) ve (3.85) kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right] dx_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right] dx_2 = 0 \quad (3.96)$$

elde edilir. dx_1 ve dx_2 bağımsız değildir ve sifıra eşit olan (3.96)'daki dx_1 ve dx_2 nin tüm katsayıları bitmez. dx_1 i bağımsız diferansiyel olarak seçersek dx_2 (3.85)'de bağımlı bir diferansiyel haline gelir. Üretilen ve kontrolde olan λ çarpanı, (3.96)'daki dx_1 ve dx_2 nin katsayılarından birini sıfır yapmak için seçilir. Mesela, λ λ^* değerinde alındığında dx_2 bağımlı diferansiyelinin katsayısı sıfır olur.

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \quad (3.97)$$

Böylece (3.96) denklemi

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right] dx_1 = 0 \quad (3.98)$$

haline gelir. dx_1 bağımsız diferansiyel olduğundan keyfi olarak değişebilir. (3.98)'i sağlayan tüm dx_1 ler için dx_1 in katsayısı sıfırdır.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \quad (3.99)$$

dir. (3.92)'den

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.100)$$

(3.91) sınır bağıntısı ortaya çıkar. (3.99), (3.97) ve (3.100)'den sonuçlar birleştirilerek

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0 \quad (3.103)$$

buluruz. Bu denklemler çözümlenerek x_1^* , x_2^* ve λ^* elde edilir. (3.101) ve (3.102) arasında λ^* yok edilerek

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.104)$$

direkt metodu ile bulunan (3.89) şartı bulunur. Lagrange çarpan metodu ile aynı sonuç elde edilir. (3.101) ve (3.102) gerek şartları, (3.96)'da bağımsız diferansiyel

olan dx_1 ve dx_2 den elde edilen aynı şartlardır. λ çarpanı artan fonksiyon $L(x_1, x_2, \lambda)$ da her değişken bağımsız olsa da tüm değişkenleri ele alabilmeye izin verir. λ çarpanı bir *katalizör* gibidir, sadece ara aşamada görünür.

Özet olarak, ilgili sınır şartı $g(x_1, x_2) = 0$ ile $f(x_1, x_2)$ ekstremum fonksiyonu x_1 , x_2 ve λ bağımsız olsa da tek bir artan fonksiyonun ekstremumuna $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$ a eşittir. Bu sonucun genelleştirmesini veren teorem aşağıdadır [1].

3.5.4 Teorem Sürekli gerçekteğerli bir fonksiyonun ekstremumu $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ilgili şartlar

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ &\dots \\ g_m(x) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

şeklindedir, burada f ve g sürekli kısmi türevlere sahiptir ve $m < n$ dir. m şartlarına karşılık Lagrange çarpanları $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ olsun. Artan Lagrange fonksiyonu şu formdadır:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t g(x) \quad (3.106)$$

Burada λ^t λ nın transpozesidir. x^* ve λ^* optimal değerleri aşağıdaki $n + m$ denklemlerin çözümüdür.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^t \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) = 0 \quad (3.108)$$

Lagrange Çarpanının Özellikleri: Lagrange çarpanı metodu ilgili sınırlarla fonksiyonun ekstremumunu bulmada çok önemlidir.

1. Lagrange çarpanı tekniğinin önemi; $g(x)=0$ ilgili şartı ile $f(x)$ fonksiyonunun ekstremumunu belirleme problemi ile basit artan (augmented) fonksiyonun $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda' g(x)$ ekstremumunu belirleme problemi arasındadır.
2. Lagrange çarpanı, artan fonksiyon $L(x, \lambda)$ daki her terim bağımsız olsa da tüm x ve λ değişkenlerini ele almaya izin verir.
3. λ çarpanı katalizör gibidir, 2. madde ile verilen kesin görevi başarı ile sağlar.
4. Lagrange çarpanı metodunun özelliği olan artan boyut $(n + m)$ tekniğin *basitliği* ve *sistematikliği* ile karşılık verir [1].

3.6 Şartlarla Fonksiyonların Ekstremleri

Bu bölümde, önceki bölümde fonksiyonlar için geliştirilen düşünceler fonksiyonlara dayalı olarak genişletilecektir. Önce iki değişkenli bir fonksiyon önceki bölümde varyasyon hesabındaki sonuçlar kullanarak incelenmiştir. Gerek şartlar ele alınıp, sonra genelleme için n . derece vektör durumunu aynı şekilde genişletilmiştir. Fonksiyonel formunda performans indeksinin ekstremizasyonu

$$J(x_1(t), x_2(t), t) = J = \int_{t_0}^{t_f} V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) dt \quad (3.109)$$

ilgili şart (veya sistem denklemleri)

$$g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = 0 \quad (3.110)$$

ve sabit bitiş nokta şartları

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_{10}; & x_2(t_0) &= x_{20} \\ x_1(t_f) &= x_{1f}; & x_2(t_f) &= x_{2f} \end{aligned} \quad (3.111)$$

dür. Bu probleme aşağıdaki adımlar uygulanır.

- Adım 1:* Lagrange Denklemi
- Adım 2:* Varyasyonlar ve Artış
- Adım 3:* İlk Varyasyon
- Adım 4:* Temel Teorem
- Adım 5:* Temel Lemma
- Adım 6:* Euler-Lagrange Denklemi

Adım 1 Lagrange Denklemi: Artan fonksiyonel formu

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} L(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t) dt \quad (3.112)$$

şeklindedir. Burada $\lambda(t)$ Lagrange çarpanı ve Lagrange denklemi L

$$\begin{aligned} L &= L(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t) \\ &= V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) + \lambda(t)g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \end{aligned} \quad (3.113)$$

şeklinde tanımlanır. (3.109) performans indeksi ve (3.112) artan performans indeksinden (3.110) şartı her $\lambda(t)$ için sağlanırsa $J_a = J$ dir.

Adım 2 Varyasyonlar ve Artış: Optimal değerler için *varyasyon* ve *artış* şöyledir.

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i^*(t) + \delta x_i(t), \quad \dot{x}_i(t) = \dot{x}_i^*(t) + \delta \dot{x}_i(t), \quad i = 1, 2 \\ \Delta J_a &= J_a(x_i^*(t) + \delta x_i(t), \dot{x}_i^*(t) + \delta \dot{x}_i(t), t) - J_a(x_i^*(t), \dot{x}_i^*(t), t), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Adım 3 İlk Varyasyon: Taylor serisi açılımını kullanarak ve sadece lineer terimler kullanılarak J_a fonksiyonelinin *ilk* varyasyonu

$$\delta J_a =$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* \delta x_1(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* \delta x_2(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta \dot{x}_1(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \delta \dot{x}_2(t) \right] dt \quad (3.115)$$

halini alır. Varyasyon hesabında sadece $\delta x_1(t)$ ve $\delta x_2(t)$ içeren terimlerde $\delta \dot{x}_1(t)$ ve $\delta \dot{x}_2(t)$ içeren terimleri tekrar yazılır (kısmi integrasyon kullanılır).

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta \dot{x}_1(t) dt &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \frac{d}{dt} (\delta x_1(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* d(\delta x_1(t)) \\ &= \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) dt \end{aligned} \quad (3.116)$$

Yukarıdakiler kullanılarak (3.115) ilk varyasyonu elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta J_a &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* \delta x_1(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* \delta x_2(t) \right] dt \\ &+ \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) \right]_{t_0}^{t_f} + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \delta x_2(t) \right]_{t_0}^{t_f} \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \delta x_2(t) dt \end{aligned} \quad (3.117)$$

Sabit bitiş zamanı ve sabit bitiş durum problemi (3.111) ile verildiğinden, bitiş noktasında varyasyonlara izin verilmez.

$$\delta x_1(t_0) = \delta x_2(t_0) = \delta x_1(t_f) = \delta x_2(t_f) = 0 \quad (3.118)$$

dur ve (3.117) artan ilk varyasyonunda (3.118) sınır varyasyonları kullanılarak

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \right] \delta x_1(t) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \right] \delta x_2(t) dt \end{aligned} \quad (3.119)$$

bulunur.

Adım 4 Temel Teorem:

- i.** Varyasyon hesabı temel teoremine (3.2.3 Teorem) göre sifira eşit olan (3.119) ilk varyasyonu bulunur.
- ii.** Her iki $\delta x_1(t)$ ve $\delta x_2(t)$ nin bağımsız değildir, çünkü $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ (3.110) şartıyla bağlantılıdır. $\delta x_2(t)$ i bağımsız varyasyon olarak $\delta x_1(t)$ i bağımlı varyasyon olarak seçilebilir.
- iii.** Keyfi ve kontrolde olan $\lambda^*(t)$ çarpanını ile (3.119)'de $\delta x_1(t)$ bağımlı varyasyonun katsayısı yok edilir.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* = 0 \quad (3.120)$$

Bu seçimlerle (3.119) ilk varyasyonu aşağıdaki halini alır.

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \right] \delta x_2(t) dt = 0 \quad (3.121)$$

Adım 5 Temel Lemma: Varyasyon hesabı temel lemmasını (3.3.2 Lemma) kullanılır ve $\delta x_2(t)$ keyfi olarak bağımsız varyasyon seçilebilir. (3.121)'i sağlayabilen $\delta x_1(t)$ katsayısı da yok edilir.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* = 0 \quad (3.122)$$

dir. (3.113) Lagrange denkleminde

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* = 0 \quad (3.123)$$

(3.110) sınır bağıntısı bulunur.

Adım 6 Euler-Lagrange Denklemi: (3.120), (3.122) ve (3.123) bağıntıları birleştirilerek (Euler-Lagrange denklemine göre) ilgili (3.110) sınır şartı ile (3.109) fonksiyonelinin ekstremizasyonu için gerek şartlar

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* = 0 \quad (3.124)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)_* = 0 \quad (3.125)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)_* = 0 \quad (3.126)$$

dir. Bu şartlar $\delta x_1(t)$ ve $\delta x_2(t)$ bağımsızmış gibi (3.113) Lagrange denkleminde elde edilmiştir. (3.126)'da, L Lagrange denklemi $\dot{\lambda}(t)$ den bağımsızdır ve (3.126) şartı (3.110) sistem denklemleri ile verilir. Bu yüzden, $\lambda(t)$ Lagrange çarpanı $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ bağımsızmış gibi (3.110) şartına bağlı olmalarına rağmen değişkenleri ele alabilir. (3.124) ve (3.125) ikinci dereceli diferansiyel denklemlerinin çözümü ve (3.110) veya (3.126) şart bağıntısı (3.111) sınır şartları $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ ve $\lambda^*(t)$ optimal çözümlerini verir.

n . dereceli sistemlerin genelleştirmesi için bir fonksiyonelin ekstremizasyonu

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (3.127)$$

dir ve burada $x(t)$ n . dereceli durum vektörüdür, ilgili sistem denklemleri

$$g_i(x(t), \dot{x}(t), t) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.128)$$

dir ve sınır şartları $x(0)$ ve $x(t_f)$ dir. Artan fonksiyonel

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t) dt \quad (3.129)$$

dır ve burada L Lagrange denklemi

$$L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t) = V(x(t), \dot{x}(t), t) + \lambda'(t) g_i(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (3.130)$$

ile verilir ve Lagrange çarpanı $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)]^T$ dir. Euler-Lagrange denklemini J_a üzerine uygulanır.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \quad (3.131)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right)_* = 0 \rightarrow g_i(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \quad (3.132)$$

(3.130)'dan, L Lagrange denklemi $\dot{\lambda}(t)$ den bağımsızdır ve (3.132) Euler-Lagrange denklemi önemsizdir fakat (3.128) sistemi ile ilgili bağıntı verilmiştir [1].

3.6.1 Örnek Performans indeksini minimize ediniz [1].

$$J = \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)] dt \quad (3.133)$$

İlgili sınır şartları

$$x(0) = 1; \quad x(1) = 0 \quad (3.134)$$

Sistem denklemi şu şekildedir:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad (3.135)$$

Çözüm: İki metotla da bu problemi çözelim.

i. *Direkt Metot:* Burada fonksiyonel için (3.133) performans indeksi ile (3.135) sistemi arasında $u(t)$ yok edilir.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left[x^2(t) + (\dot{x}(t) + x(t))^2 \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[2x^2(t) + \dot{x}^2(t) + 2x(t)\dot{x}(t) \right] dt \end{aligned} \quad (3.136)$$

(3.136) fonksiyoneli (3.135) şartını içerir. Euler-Lagrange denklemi (3.136) fonksiyoneline uygulanarak

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \quad (3.137)$$

bulunur. Burada

$$V = 2x^2(t) + \dot{x}^2(t) + 2x(t)\dot{x}(t) \quad (3.138)$$

$$4x^*(t) + 2\dot{x}^*(t) - \frac{d}{dt} (2\dot{x}^*(t) + 2x^*(t)) = 0 \quad (3.139)$$

elde edilir. Basitleştirerek

$$\ddot{x}^*(t) - 2x^*(t) = 0 \quad (3.140)$$

bulunur. Optimal çözüm olarak

$$x^*(t) = C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t} \quad (3.141)$$

bulunur, burada C_1 ve C_2 sabitleri (3.134) verilen sınır şartları ile değerlendirilir.

$$C_1 = 1/(1 - e^{-2\sqrt{2}}); \quad C_2 = 1/(1 - e^{2\sqrt{2}}) \quad (3.142)$$

Sonuç olarak, $x^*(t)$ optimali, $u^*(t)$ optimal kontrolü (3.135) sisteminden bulunur.

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \dot{x}^*(t) + x^*(t) \\ &= C_1(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + C_2(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \end{aligned} \quad (3.143)$$

Metot basit olmasına rağmen, özellikle yüksek dereceli sistemlerde (3.133) ve (3.135)'den $u(t)$ i yok etmek her zaman mümkün değildir.

ii. *Lagrange Çarpan Metodu:* Önceki bölümde sınırlarla fonksiyonların ekstremizasyonunda geliştirilen fikirler kullanılarak (3.135) sistemini tanımlayan şart altında (3.134) sınır şartları ile (3.133) fonksiyonelinin optimizasyonunu elde edilir. (3.135) şartı aşağıdadır.

$$g(x(t), \dot{x}(t), u(t)) = \dot{x}(t) + x(t) - u(t) = 0 \quad (3.144)$$

Artan fonksiyonel

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t) + \lambda(t) \{ \dot{x}(t) + x(t) - u(t) \}] dt \\ &= \int_0^1 L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) dt \end{aligned} \quad (3.145)$$

dir. Burada $\lambda(t)$ Lagrange çarpanı ve

$$L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) = x^2(t) + u^2(t) + \lambda(t) \{ \dot{x}(t) + x(t) - u(t) \} \quad (3.146)$$

Lagrange denklemdir. Bu denkleme Euler-Lagrange denklemini uygulanır.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \rightarrow 2x^*(t) + \lambda^*(t) - \dot{\lambda}^*(t) = 0 \quad (3.147)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right)_* = 0 \rightarrow 2u^*(t) - \lambda^*(t) = 0 \quad (3.148)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)_* = 0 \rightarrow \dot{x}^*(t) + x^*(t) - u^*(t) = 0 \quad (3.149)$$

Optimal $x^*(t)$, $u^*(t)$ ve $\lambda^*(t)$ çözümler. Önce (3.148) ve (3.149)'dan

$$\lambda^*(t) = 2u^*(t) = 2(\dot{x}^*(t) + x^*(t)) \quad (3.150)$$

bulunur ve (3.147)'de (3.150) denklemini kullanılarak

$$2x^*(t) + 2(\dot{x}^*(t) + x^*(t)) - 2(\dot{x}^*(t) + \dot{x}^*(t)) = 0 \quad (3.151)$$

elde edilir, bu denklemin çözümü ile

$$\ddot{x}^*(t) - 2x^*(t) = 0 \rightarrow x^*(t) = C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t} \quad (3.152)$$

bulunur. (3.150)'den

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) + x^*(t) = C_1(1 - \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + C_2(1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \quad (3.153)$$

bulunur. Direkt metotla çözümde aynı sonuçlar bulunmuştur.

3.7 Optimal Kontrol Sistemlerine Varyasyonel Yaklaşım

Bu bölümde, varyasyon hesabı kullanılarak elde edilen optimal şartları kapsayan konuların gelişimi bulunmaktadır.

3.7.1 Aşama 1: Bir Fonksiyonelin Optimizasyonu

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (3.154)$$

Verilen sınır şartları

$$x(t_0) \text{ sabit ve } x(t_f) \text{ serbesttir.} \quad (3.155)$$

$x^*(t)$ optimal fonksiyonu Euler-Lagrange denklemini sağlamalıdır.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \quad (3.156)$$

Serbest-bitiş noktasında sağlanan genel sınır şartı

$$\left[V - \dot{x}^t(t) \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) \right]_{*t_f} \delta t_f + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_{*t_f} \delta x_f = 0 \quad (3.157)$$

ile verilmiştir. t_f ve $x(t_f)$ nin doğasına bağlı sınır şartı değişir. L integrali ile tek artan performans indeksine sistem dinamikleri ve performans indeksi yerleşmiştir.

Optimum için yeter şart verilen Legendre şartı aşağıdadır.

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} \right)_* > 0 \quad \text{minimum için} \quad (3.158)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} \right)_* < 0 \quad \text{maksimum için} \quad (3.159)$$

3.7.2 Aşama 2: Bir Fonksiyonelin Optimizasyonu İle Şartı

Bir fonksiyonelin optimizasyonu

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (3.160)$$

ve verilen sınır değerleri

$$x(t_0) \text{ sabit ve } x(t_f) \text{ serbesttir.} \quad (3.161)$$

Bağıntı şartı

$$g(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \quad (3.162)$$

tir, burada (3.162) şartı artan fonksiyonel formuyla

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t) dt \quad (3.163)$$

dir ve $\lambda(t)$ Lagrange çarpanıdır (costate fonksiyonu da denir). L Lagrange denklemini

$$L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t) = V(x(t), \dot{x}(t), t) + \lambda^t(t) g(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (3.164)$$

ile verilir. V yerine (3.163) artan fonksiyoneli için aşama 1'in sonuçları kullanılır. Optimal şartta $x(t)$ ve $\lambda(t)$ terimlerinde verilen artan fonksiyonel için (3.156) Euler-Lagrange denklemini mevcuttur.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \text{ durum denklemini ve} \quad (3.165)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right)_* = 0 \text{ costate denklemdir.} \quad (3.166)$$

(3.164) ile L Lagrange denklemini $\dot{\lambda}^*(t)$ den bağımsızdır ve $\lambda(t)$ costate için (3.162) sınır bağıntısı önemli, (3.166) Euler-Lagrange denklemini önemsizdir. Serbest-bitiş noktasında sağlanan (3.157) genel sınır şartı

$$\left[L - \dot{x}^t(t) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right]_{*t_f} \delta t_f + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_{*t_f} \delta x_f = 0 \quad (3.167)$$

ile verilir. Bu sınır şartı t_f ve $x(t_f)$ nin doğasına bağlı değişir.

3.7.3 Aşama 3: Lagrange Denklem Formuyla Optimal Kontrol Sistem

Standart kontrol sistemi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3.168)$$

dir ve sınır şartları

$$x(t_0) \text{ sabit ve } x(t_f) \text{ serbesttir.} \quad (3.169)$$

Performans indeksi

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (3.170)$$

dir. (3.162) bağıntı şartı olarak (3.168) sistem denklemini

$$g(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) = f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) = 0 \quad (3.171)$$

dır. (3.170) performans indeksinin ve (3.171) bağıntı şartının artan fonksiyoneli

$$J_a(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) dt \quad (3.172)$$

dur, burada L Lagrange denklemi

$$\begin{aligned}
L &= L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) \\
&= V(x(t), u(t), t) + \lambda^t(t) \{f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\}
\end{aligned} \tag{3.173}$$

ile verilir. Aşama 2'nin sonuçları kullanılır. Optimal şartta $x(t)$, $\lambda(t)$ ve $u(t)$ terimlerinde verilen (3.172) artan fonksiyoneli için (3.165) ve (3.166) Euler-Lagrange denklemleri mevcuttur.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0 \text{ durum denklemi,} \tag{3.174}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right)_* = 0 \text{ costate denklemi ve} \tag{3.175}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right)_* = 0 \text{ kontrol denklemdir.} \tag{3.176}$$

(3.173) ile L Lagrange denklemi $\dot{\lambda}^*(t)$ ve $\dot{u}^*(t)$ den bağımsızdır, (3.175) Euler-Lagrange denklemi (3.171) sınır bağıntısı ile benzerdir. Serbest-bitiş noktasında sağlanan (3.167) genel sınır şartı

$$\left[L - \dot{x}^t(t) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right]_{*t_f} \delta t_f + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_{*t_f}^t \delta x_f = 0 \tag{3.177}$$

haline gelir. Bu sınır şartı t_f ve $x(t_f)$ nin doğasına bağlı değişir.

3.7.4 Aşama 4: Hamilton Denklem Formuyla Optimal Kontrol Sistem (Pontryagin Prensibi)

Lagrange denklem formundan Hamilton denklem formuna geçiş için Hamilton denklemi tanımlanabilir.

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda^t(t) f(x(t), u(t), t) \tag{3.178}$$

(3.173) Lagrange denklem terimlerinde

$$L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) = H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^t(t) \dot{x}(t) \quad (3.179)$$

halini alır. (3.179) kullanılarak, Lagrange denklem terimlerindeki (3.174)'den (3.176)'a Euler-Lagrange denklemleri Hamilton denklemi olarak tekrar yazılır.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt}(-\lambda^*) = 0 \quad (3.180)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* - \dot{x}^*(t) - \frac{d}{dt}(0) = 0 \quad (3.181)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_* - \frac{d}{dt}(0) = 0 \quad (3.182)$$

Böylece

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* \text{ durum denklemi,} \quad (3.183)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_* \text{ costate denklemi ve} \quad (3.184)$$

$$0 = + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_* \text{ kontrol denklemdir.} \quad (3.185)$$

Benzer olarak (3.179) kullanılarak (3.177) sınır şartı Hamilton denklem terimleri olarak tekrar yazılır.

$$\left[H - \lambda^t(t) \dot{x}(t) - \dot{x}^t(t) (-\lambda(t)) \right]_{*t_f} \delta t_f + \left[-\lambda^t(t) \right]_{*t_f} \delta x_f = 0 \quad (3.186)$$

Böylece

$$H|_{*t_f} \delta t_f - \lambda^{*t}(t_f) \delta x_f = 0 \quad (3.187)$$

halini alır. Yeter şart

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)_* > 0 \text{ minimum için ve} \quad (3.188)$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)_* < 0 \text{ maksimum içindir.} \quad (3.189)$$

(3.183)'dan (3.185)'e durum, costate ve kontrol denklemleri (3.187) bitiş şartı ve (3.169) başlangıç şartı ile çözülmüş ve iki-nokta sınır değer problemine (TPBVP) öncülük etmiştir [1], [20], [23], [25].

3.7.4.1 Bitiş Maliyet Fonksiyonlu Serbest-Bitiş Nokta Sistemi

Bu problem aşama 4'deki bitiş maliyet fonksiyonlu problemin uzantısıdır. Bazı denklemlerin tekrar riski mevcuttur. Sistem

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3.190)$$

ile tanımlanır. Performans indeksi

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (3.191)$$

dir ve sınır şartları

$$x(t_0) \text{ sabit ve } x(t_f) \text{ serbesttir.} \quad (3.192)$$

İntegrali ile beraber S bitiş maliyet fonksiyonu katılarak (3.191) performans indeksi tekrar yazılırsa

$$J_1(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[V(x(t), u(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^t \dot{x}(t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right] dt \quad (3.193)$$

bulunur. (3.187) bitiş şart denkleminin değişikliği dışında aşama 3'ün sonuçları tekrar edilir.

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* \text{ durum denklemi,} \quad (3.194)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_* \text{ costate denklemi ve} \quad (3.195)$$

$$0 = + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_* \text{ kontrol denklemdir.} \quad (3.196)$$

Bitiş sınır şartı

$$\left[H + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{*t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) - \lambda(t) \right]_{*t_f}^t \delta x_f = 0 \quad (3.197)$$

dır. Optimum için yeter şart

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)_* > 0 \text{ minimum için ve} \quad (3.198)$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)_* < 0 \text{ maksimum içindir.} \quad (3.199)$$

Durum, costate ve kontrol denklemleri verilen (3.192) başlangıç şartı ve (3.197) bitiş şartı ile çözülmüş ve bu formülleme iki nokta sınır değer problemine öncülük etmiştir [1].

3.7.5 Örnek İkinci dereceli (çift integralli) sistem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \quad (3.200)$$

ve performans indeksi

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \quad (3.201)$$

veriliyor. Verilen sınır şartları ile optimal kontrol ve optimal durumu bulunuz.

$$x(0) = [1 \ 2]^T ; \quad x(2) = [1 \ 0]^T \quad (3.202)$$

Kontrol ve durumu kısıtsız farz ediniz [1].

Çözüm: Önce (3.200) sistemi ve (3.201) performans indeksi ile (3.154) sistemi ve (3.155) performans indeksi genel formülünü karşılaştırarak

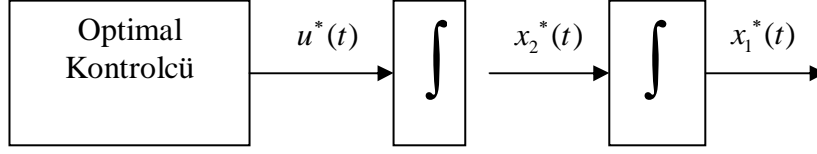
$$\begin{aligned} V(x(t), u(t), t) &= V(u(t)) = \frac{1}{2} u^2(t) \\ f(x(t), u(t), t) &= [f_1, f_2]^T \end{aligned} \quad (3.203)$$

tanımlanır. Burada $f_1 = x_2(t)$, $f_2 = u(t)$ dir.

Adım 1: Hamilton denklem fonksiyonu aşağıdadır.

$$\begin{aligned} H &= H(x_1(t), x_2(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) \\ &= V(u(t)) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t)) \\ &= \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda_1(t) x_2(t) + \lambda_2(t) u(t) \end{aligned} \quad (3.204)$$

Adım 2: Aşağıdaki bağıntı ile $u^*(t)$ bulunur.



Şekil 3.6 3.7.5 Örneği için optimal kontrolcü

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(t) + \lambda_2^*(t) = 0 \rightarrow u^*(t) = -\lambda_2^*(t) \quad (3.205)$$

Adım 3: Adım 1’de adım 2’nin sonuçları kullanılarak H^* optimali bulunur.

$$\begin{aligned} H^* \left(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t) \right) &= \frac{1}{2} \lambda_2^{*2}(t) + \lambda_1^*(t) x_2^*(t) - \lambda_2^{*2}(t) \\ &= \lambda_1^*(t) x_2^*(t) - \frac{1}{2} \lambda_2^{*2}(t) \end{aligned} \quad (3.206)$$

Adım 4: Durum ve costate denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^*(t) &= + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \right)_* = x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) &= + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \right)_* = -\lambda_2^*(t) \\ \lambda_1^*(t) &= - \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)_* = 0 \\ \lambda_2^*(t) &= - \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)_* = -\lambda_1^*(t) \end{aligned} \quad (3.207)$$

denklemlerinin çözümleri ile bulunur, optimal durum ve optimal costate aşağıdadır.

$$x_1^*(t) = \frac{C_3}{6} t^3 - \frac{C_4}{2} t^2 + C_2 t + C_1$$

$$\begin{aligned}
x_2^*(t) &= \frac{C_3}{2}t^2 - C_4t + C_2 \\
\lambda_1^*(t) &= C_3 \\
\lambda_2^*(t) &= -C_3(t) + C_4
\end{aligned} \tag{3.208}$$

Adım 5: Optimal kontrol

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t) = C_3t - C_4 \tag{3.209}$$

ile elde edilir. Burada C_1 , C_2 , C_3 ve C_4 verilen (3.202) sınır şartları kullanılarak değerlendirilen sabitlerdir.

$$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3, C_4 = 4 \tag{3.210}$$

Sonuç olarak, optimal durumlar, costateler ve kontrol bulunur.

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) &= 0.5t^3 - 2t^2 + 2t + 1 \\
x_2^*(t) &= 1.5t^2 - 4t + 2 \\
\lambda_1^*(t) &= 3 \\
\lambda_2^*(t) &= -3t + 4 \\
u^*(t) &= 3t - 4
\end{aligned} \tag{3.211}$$

3.7.6 Örnek

$$J = \frac{1}{2}[x_1(2) - 4]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt \tag{3.212}$$

Sınır şartları

$$x(0) = [1 \ 2]; \quad x(2) \text{ serbesttir } [1]. \tag{3.213}$$

(3.208) ve (3.209)'da verilen aynı optimal durumlar, costateler ve kontrol kullanılır.

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) &= \frac{C_3}{6}t^3 - \frac{C_4}{2}t^2 + C_2t + C_1 \\
x_2^*(t) &= \frac{C_3}{2}t^2 - C_4t + C_2 \\
\lambda_1^*(t) &= C_3 \\
\lambda_2^*(t) &= -C_3(t) + C_4 \\
u^*(t) &= -\lambda_2^*(t) = C_3t - C_4
\end{aligned} \tag{3.214}$$

t_f 2 olarak belirtildiğinden δt_f sıfırdır ve $x(2)$ belirtilmediğinden δx_f (3.197) sınır şartında serbesttir.

$$\lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*t_f} \tag{3.215}$$

Burada

$$S(x(t_f)) = \frac{1}{2}[x_1(2) - 4]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2 \tag{3.216}$$

tir, (3.215) şu hale gelir:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^*(t_f) &= \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)_{t_f} \rightarrow \lambda_1^*(2) = x_1(2) - 4 \\
\lambda_2^*(t_f) &= \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)_{t_f} \rightarrow \lambda_2^*(2) = x_2(2) - 2
\end{aligned} \tag{3.217}$$

Dört sabiti bulmak için (3.213)'den iki başlangıç şartı ve (2.217)'den iki bitiş şartı kullanılır.

$$C_1 = 1; C_2 = 2; C_3 = \frac{3}{7}; C_4 = \frac{4}{7} \quad (3.218)$$

Optimal durumlar, costateler ve kontrol

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= \frac{1}{14}t^3 - \frac{2}{7}t^2 + 2t + 1 \\ x_2^*(t) &= \frac{3}{14}t^2 - \frac{4}{7}t + 2 \\ \lambda_1^*(t) &= \frac{3}{7} \\ \lambda_2^*(t) &= -\frac{3}{7}t + \frac{4}{7} \\ u^*(t) &= \frac{3}{7}t - \frac{4}{7} \end{aligned} \quad (3.219)$$

3.7.7 Önemli Özellikler

Varyasyon hesaplamada optimal şartları elde ederken kullanılan yöntemin farklı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. *Lagrange Çarpanının Önemi:* Lagrange çarpanı $\lambda(t)$ costate (veya eklenmiş) fonksiyonu adını da alır. Lagrange çarpanı $\lambda(t)$ (3.168) sistem denklemi ile yüklü ‘dikkat edilen’ kısıt bağıntısını üretir. Costate değişkeni $\lambda(t)$ her $x(t)$ ve $u(t)$ değişkeni için her biri sistem denkleminin bağlı olmasına rağmen, bağımsızmış gibi Euler-Lagrange denkleminin kullanılmasına izin verir.
2. *Lagrange ve Hamilton Denklemi:* Lagrange ve Hamilton denklemi tanımlanır.

$$\begin{aligned} L &= L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t) \\ &= V(x(t), u(t), t) + \lambda^i(t) \{f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\} \end{aligned} \quad (3.220)$$

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda^i(t) f(x(t), u(t), t) \quad (3.221)$$

Tanımlamada vektör notasyonlarını kullanılmıştır, L ve H sadece skalar fonksiyonlardır.

3. Hamilton Denklem Optimizasyonu:

i. (3.185) kontrol denklemi $u(t)$ kontrolü ile Hamilton denkleminin optimizasyonunu gösterir. (3.170) orijinal performans indeksin optimizasyonu (3.168) sistem denklemi ile ilgili bir *fonksiyoneldir* ve $u(t)$ li Hamilton *fonksiyon* optimizasyonuna eşittir. Orijinal *fonksiyonel* optimizasyon problemi adi *fonksiyon* optimizasyon problemine indirgenir.

ii. $u(t)$ kontrolünün *kısıtsız* veya *sınırsız* olduğunu farz edilir ve $\partial H/\partial u = 0$ kontrol bağıntısı elde edilir.

iii. $u(t)$ U kümesinin bir elemanı olarak $u(t) \in U$ *kısıtlı* veya *sınırlı* ise, daha fazla $\partial H/\partial u = 0$ alınmaz. $u(t)$ U izin verilen bölgesinin dışına çıkabilir. $u(t)$ kontrolü yükselteçlerin doyurulması, motorun hızı veya roketin fırlatılışı gibi birçok şeyle *sınırlıdır*.

iv. $u(t)$ deki kısıt ne olursa olsun, $u(t)$ Hamilton denklemin minimize etmek için seçilmelidir. $u(t)$, optimal kontrol teoriye Pontryagin'nin en önemli katkısı olan H fonksiyonunu optimize etmek için seçilmelidir. Bu nedenle yaklaşıma *Pontryagin Prensibi* denir. Kısıtlı kontrol

$$\min_{u \in U} H(x^*(t), \lambda^*(t), u(t), t) = H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t) \quad (3.222)$$

dur veya eşit olarak şu şekilde yazılabilir:

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t) \leq H(x^*(t), \lambda^*(t), u(t), t) \quad (3.223)$$

4. Pontryagin'nin Maksimum Prensibi: Pontryagin minimize eden performans indeksi yerine maksimize eden performans indeksini kullanmıştır ve adını *Pontryagin'nin Maksimum Prensibi* koymuştur. Bu yüzden Hamilton denklemi bazen Pontryagin H -fonksiyonu olarak adlandırılır. J performans indeksinin minimizasyonu $-J$ nin maksimizasyonuna eşittir. Hamilton denklemi aşağıdadır.

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = -V(x(t), u(t), t) + \hat{\lambda}'(t) f(x(t), u(t), t) \quad (3.224)$$

5. Optimal Şartta Hamilton Denklemi: Optimal şartta Hamilton denklemi şöyle yazılabilir:

$$H^* = H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)$$

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{dH^*}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_*^t \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_*^t \dot{\lambda}^*(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_*^t \dot{u}^*(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_*^t \quad (3.225)$$

Bu denklemde (3.183)'den (3.185)'e durum, costate ve kontrol denklemleri kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(\frac{dH}{dt} \right)_* = \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_* \quad (3.226)$$

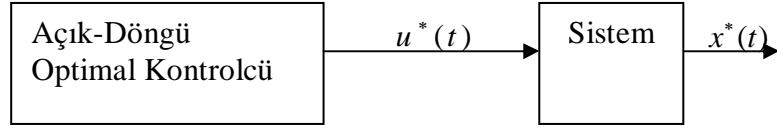
Optimal yörünge boyunca zamana bağlı H ın toplam türevi zamana bağlı H ın kısmi türevi olarak aynıdır. H t e bağlı değilse,

$$\left. \frac{dH}{dt} \right|_* = 0 \quad (3.227)$$

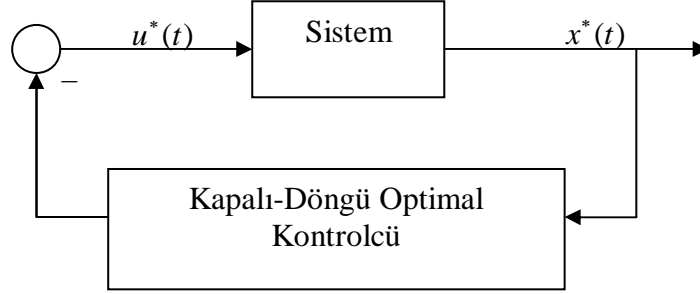
tir ve H optimal yörünge boyunca t zamanına bağlı sabittir.

6. İki-Nokta Sınır Değer Problemi (TPBVP): Dinamik sistem optimal kontrol problemi TPBVP e öncülük eder.

- i. (3.183) ve (3.185) durum ve costate denklemleri başlangıç ve bitiş şartları kullanılarak çözülür. Bunlar lineer değildir ve zamanla değişir. Çözümleri için sayısal metotlara başvurulabilir.
- ii. Durum ve costate denklemleri her tür sınır şartı için aynıdır.
- iii. Optimal kontrol sistemi için, durum ve costate denklemlerini elde etmek kolay olmasına rağmen çözümlerine ulaşma biraz zaman alır.



Şekil 3.7 Açık-döngü optimal kontrol



Şekil 3.8 Kapalı-döngü optimal kontrol

7. Açık-Döngü Optimal Kontrol: Durum ve costate denklemlerine ulaşmak ve kontrol denklemini yerine yazmak için TPBVP i çözerken şekil 3.7’de gösterildiği gibi sadece açık-döngü optimal kontrol kullanılır. Açık-döngü optimal kontrolcüyü (OLOC) kavramak ve kurmak gerekir, fakat bu çok fazla zaman alır. Sistem parametrelerindeki değişim OLOC hesaplanırken alınmaz. Bu nedenle kapalı-döngü optimal kontrol (CLOC) terimleri düşünülür. Şekil 3.8’deki gibi $x^*(t)$ durum terimlerinde $u^*(t)$ optimal kontrolü elde edilir. CLOC sistem parametre varyasyonuna önemli avantajlar kazandırır ve kontrolcülerin yapımını basitleştirir [1], [10], [12], [18],[21].

4. LINEER QUADRATİK OPTİMAL KONTROL SİSTEMLERİ

Bu bölümde, quadratik performans indeksi ile lineer sistemli kapalı-döngü optimal kontrolü gösterilmiştir. Bu durum düzenleme, çıkış düzenleme ve izleme ile ilgili lineer quadratik düzenleyici (LQR) sisteme öncülük etmiştir.

4.1 Problem Formülleme

Sistem ve quadratik performans indeksi formülendir. Bu quadratik maliyet fonksiyonelindeki farklı matrislerin seçiminde düzenli matematiksel şartlar elde etmeye yardımcı olur. Bu yüzden optimizasyon problemi ile mühendislik açısından değerlendirilir.

Lineer zamanla değişen sistem (LTV)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (4.2)$$

dir ve maliyet fonksiyoneli (CF) veya performans indeksi (PI)

$$\begin{aligned} J(u(t)) &= J(x(t_0), u(t), t_0) \\ &= \frac{1}{2} [z(t_f) - y(t_f)]^T F(t_f) [z(t_f) - y(t_f)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [z(t) - y(t)]^T Q(t) [z(t) - y(t)] + u^T(t) R(t) u(t) dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

dir. Burada $x(t)$ n . durum vektörü, $y(t)$ m . çıkış vektörü, $z(t)$ m . referans veya arzu edilen çıkış vektörü ($x(t)$ durumu elde edilebilirse n . arzu edilen durum vektörü), $u(t)$ r . kontrol vektörü, $e(t) = z(t) - y(t)$ (veya $x(t)$ durumu doğrudan

elde edilebilirse $e(t) = z(t) - x(t)$ m . hata vektörüdür. $A(t)$ $n \times n$ durum matrisi, $B(t)$ $n \times r$ kontrol matrisi, $C(t)$ $m \times n$ çıkış matrisidir. $u(t)$ kontrolünün kısıtsız, $0 < m \leq r \leq n$, ve tüm durum ve/veya çıkışların ölçülür olduğu farz edilir. (4.3) maliyet fonksiyoneli $e(t)$ hatası ve $u(t)$ kontrolünde quadratik terimler içerir, böylece quadratik maliyet fonksiyoneli adını alır. (4.3) quadratik maliyet fonksiyoneliindeki farklı matrisler üzerinde tanımlanan kesin yargılar aşağıdadır. Bu yargılar altında optimal kontrol doğal olarak kapalı-döngüde bulunur, yani $u(t)$ optimal kontrolü $x(t)$ durumunun veya $y(t)$ çıkışının bir fonksiyonudur. Sonlu (sonsuz) olan t_f bitiş zamanına bağlı olarak sistem sonlu (sonsuz) zamanlı yatay sistem adını alır. Aşağıda sistem kategorileri bulunmaktadır.

Amaç $x(t)$ durumunu sifira yakınlaştırmaksa ($z(t) = 0$ ve $C = I$), sisteme *durum düzenleyici* sistem denir. Amaç (4.1) ve (4.2) ile tanımlanan sıfır olmayan durumdan sıfır duruma geçen sistemli bir $u(t)$ kontrolü elde etmektir. Sistem, istenilmeyen bir durum karışıklığı ile karşılaştığında bu hale gelebilir (örneğin, bir elektrik voltaj düzenleyici sistemdeki ani yük değişimi, bir radar anteni kontrol sistemindeki ani rüzgâr esişi)

Amaç $y(t)$ çıkışını sifira yakınlaştırmaksa ($z(t) = 0$) sisteme *çıkış düzenleyici* sistem denir.

Çıkış veya *durumu* arzu edilen çıkış veya duruma yakınlaştırmak istenirse *izlenilen* bir sistem gereklidir. Durum ve çıkış düzenleyici sistemlerin her ikisinde de arzu edilen ve sözü edilen durum sıfırdır ve izlenilen sistemde hata sıfır yapılır. Örnek olarak yine anten kontrol sisteminde bir uçağın yolu verilebilir. (4.3) maliyet fonksiyoneli ve içeriğindeki farklı matrisler aşağıdadır.

1. $Q(t)$ Hata Ağırlık Matrisi: $e(t)$ hatasını küçültmek ve hatanın karesini negatif yapmamak için $\frac{1}{2}e^t(t)Q(t)e(t)$ integral ifadesi negatif olmamalı veya küçük olmalıdır. Bu yüzden $Q(t)$ matrisi *pozitif yarı tanımlıdır*. Ağırlığın quadratik doğasına bağlı olarak büyük hatalara dikkat etmek gerekir.

2. $R(t)$ Kontrol Ağırlık Matrisi: $\frac{1}{2}u'(t)R(t)u(t)$ kontrol maliyet ifadesinin quadratik doğası daha geniş kontrol gücü için daha yüksek maliyet ödemek gerektiğini gösterir. Kontrol maliyetinin pozitif olma zorunluluğundan $R(t)$ matrisi *pozitif tanımlı* olmalıdır.
3. $u(t)$ Kontrol Sinyali: Kapalı döngü optimal konfigürasyonunu elde ederken $u(t)$ kontrolünde kısıt olmaması çok önemlidir.
4. $F(t_f)$ Bitiş Maliyet Ağırlık Matrisi: Bu terimin ana amacı t_f bitiş zamanında $e(t)$ hatasını mümkün olduğu kadar küçültmektir. Bunu garanti etmek için $F(t_f)$ matrisi *pozitif yarı tanımlı* olmalıdır. $Q(t)$, $R(t)$ ve $F(t)$ ağırlık matrislerinin simetrik olduğu farz edilir. Quadratik maliyet fonksiyonelinin bazı önemli özellikleri:
- i. Kapalı-döngü optimal kontrolcülerin tasarımı için düzenli bir prosedür sağlar.
 - ii. *Durum* fonksiyonu *lineer* olan optimal geri-bildirim kontrolü ile sonuçlanır.
5. *Sonsuz Bitiş Zamanı*: t_f bitiş zamanı sonsuz olduğunda $F(t_f)$ içeren bitiş maliyet terimi sonlu zamanlı çözümlerle ilgilenildiğinden gerçekçi bir anlam taşımaz. Bu nedenle $F(t_f)$ sıfır olmalıdır [1], [14], [25].

4.2 Sonlu-Zamanlı Lineer Quadratik Düzenleyici

Değişen-zamanlı lineer bir sistem

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4.4)$$

ve quadratik bir performans indeksi

$$J = \frac{1}{2}x^t(t_f)F(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^t(t)Q(t)x(t) + u^t(t)R(t)u(t)] dt \quad (4.5)$$

verilsin, burada $u(t)$ kısıtsız, t_f belirtilmiş ve $x(t_f)$ belirtilmemiştir. $F(t_f)$ ve $Q(t)$ $n \times n$ simetrik, pozitif yarı tanımlı matrislerdir. $R(t)$ $r \times r$ simetrik, pozitif tanımlı matristir. Optimal kontrol

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^t(t)P(t)x^*(t) = -K(t)x^*(t) \quad (4.6)$$

ile verilir. Burada $K(t) = R^{-1}(t)B^t(t)P(t)$ e *Kalman kazancı* denir ve $P(t)$ $n \times n$ simetrik, *pozitif tanımlı* matristir (tüm $t \in [t_0, t_f]$ için). Diferansiyel Riccati denklem (DRE) matrisinin çözümü

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^t(t)P(t) - Q(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^t(t)P(t) \quad (4.7)$$

dür. Final şartı

$$P(t = t_f) = F(t_f) \quad (4.8)$$

dir. Optimal durum

$$\dot{x}^*(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^t(t)P(t)]x^*(t) \quad (4.9)$$

nin çözümüdür. Optimal maliyet

$$J^* = \frac{1}{2}x^{*t}(t)P(t)x^*(t) \quad (4.10)$$

dir. $u^*(t)$ optimal kontrolü (4.6) ile verilir, $x^*(t)$ optimal durumu *lineer*dir.

Not: Performans ölçüsü tanımı ile J nin birleşimi $\frac{1}{2}$ i yutabilir.

$$J_2 = 2J = x^t(t_f)F(t_f)x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^t(t)Q(t)x(t) + u^t(t)R(t)u(t)]dt \quad (4.11)$$

J_2 için diferansiyel matris Riccati denkleminin karşılığı

$$\frac{\dot{P}_2(t)}{2} = -\frac{P_2(t)}{2}A(t) - A^t(t)\frac{P_2(t)}{2} - Q(t) + \frac{P_2(t)}{2}B(t)R^{-1}(t)B^t(t)\frac{P_2(t)}{2} \quad (4.12)$$

bulunur. Bitiş şartı

$$\frac{P_2(t=t_f)}{2} = F(t_f) \quad (4.13)$$

dir. J için (4.7) DRE karşılığı J_2 için önceki DRE karşılaştırılarak, $P_2(t) = 2P(t)$ olduğu görülür. Böylece optimal kontrol şu hale gelir:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}(t)B^t(t)\frac{P_2(t)}{2}x^*(t) = \\ &= -\frac{K_2(t)}{2}x^*(t) = -R^{-1}(t)B^t(t)P(t)x^*(t) = -K(t)x^*(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Performans indeksindeki $\frac{1}{2}$ 'siz J_2 kullanılarak (4.4) orjinal sistemi için (4.14) aynı optimal kontrolü bulunur. Fakat tek fark Riccati katsayı matrisi $P_2(t)$ iki kez olmasıdır. $P(t)$ ve J_2 iki kezdir. (4.5) PI de ve Hamilton denkleminde $\frac{1}{2}$ faktörü, Hamilton denkleminin kontrol, durum ve costate fonksiyonlarının kısmi türevleri alınarak yok edilir [1], [25].

4.2.1 Önemli Özellikler

Durum düzenleyici sistemin ve diferansiyel matris Riccati denkleminin çeşitli önemli özellikleri:

1. *Riccati Katsayısı*: $P(t)$ Riccati katsayı matrisi $A(t)$ ve $B(t)$ sistem matrislerine, performans indeks matrisleri $Q(t)$, $R(t)$ ve $F(t_f)$, bitiş zamanı t_f e bağlı zamanla değişen bir matristir. Fakat $P(t)$ sistemin başlangıç durumu $x(t_0)$ a bağlı değildir.

2. *$P(t)$ matrisinin simetrikliği*: Simetri sayesinde (4.7) DRE $n \times n$ dereceli matrisi $\frac{n(n+1)}{2}$ birinci dereceden, lineer olmayan, zamanla değişen, adi diferansiyel denklemlerin sistemini gösterir.

3. *Optimal Kontrol*: Kontrol ağırlık matrisi $R(t)$ *pozitif tanımlı (negatif tanımlı)* ise $u^*(t)$ optimal kontrolü minimum (maksimum) dur.

4. *Optimal Durum*: (4.4) durum denkleminde (4.6) optimal kontrolü kullanılarak

$$\dot{x}^*(t) = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) \right] x^*(t) = G(t)x^*(t) \quad (4.15)$$

elde edilir, burada

$$G(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) \quad (4.16)$$

dir. Başlangıç şartı $x(t_0)$ ile bu durum diferansiyel denklemin çözümü $x^*(t)$ optimal durumunu verir. $G(t)$ kapalı-döngü matrisinde *kararlılık* şart değildir.

5. *Optimal Maliyet*: (4.10)'de minimum maliyet J^*

$$J^* = \frac{1}{2} x^{*t}(t)P(t)x^*(t) \text{ tüm } t \in [t_0, t_f] \text{ için} \quad (4.17)$$

dir, burada $P(t)$ (4.7) DRE matrisinin çözümüdür. $x^*(t)$ (4.15) kapalı-döngü optimal sisteminin çözümüdür.

6. *$P(t)$ Matrisinin Belirliliği*: $F(t_f)$ pozitif yarı-tanımlı olduğu için, $P(t_f) = F(t_f)$ dir. Böylece $P(t_f)$ de *pozitif yarı-tanımlıdır*. $P(t)$ nin tüm $t \in [t_0, t_f]$ ler için *pozitif tanımlı* olduğunun ispatı şöyledir. $P(t)$ bazı $t = t_s < t_f$ için pozitif tanımlı

olmadığını farz edilir. $x^*(t_s)$ durumuna karşılık $\frac{1}{2}x^{*t}(t_s)P(t_s)x^*(t_s) \leq 0$ maliyet fonksiyonu vardır ki minimum maliyetin pozitif niceliği olmalıdır zorunluluğuna uymadığı açıktır. Bu yüzden, $P(t)$ tüm $t \in [t_0, t_f)$ ler için *pozitif tanımlıdır*. $P(t)$ simetrik olduğundan $P(t)$ pozitif tanımlı, simetrik matristir.

7. DRE Matrisini Hesaplama: Bazı şartlar altında lineer olmayan matris DRE için analitik çözüm bulunur. Fakat genellikle (4.8) bilinen bitiş şartı integre edilerek (4.7) DRE matrisinin çözümü denenir.

8. $P(t)$ Riccati Katsayı Matrisinin Bağımsızlığı: $P(t)$ matrisi $x^*(t)$ optimal durumundan bağımsızdır, bu yüzden sistem ve maliyet belirtildiğinde, yani $A(t)$ ve $B(t)$ sistem matrisleri ve performans indeks matrisleri $Q(t)$, $R(t)$ ve $F(t_f)$ verildiğinde, optimal sistem başlangıç şartından ileri doğru çalışmadan önce $P(t)$ matrisi bağımsızca hesaplanabilir. $t \in [t_f, t_0]$ aralığında $P(t)$ matrisini geriye doğru (*off-line*) hesaplanır, depo edilir. $t \in [t_0, t_f]$ aralığında ileri doğru sistem çalıştığında depo edilmiş değerler kullanılır.

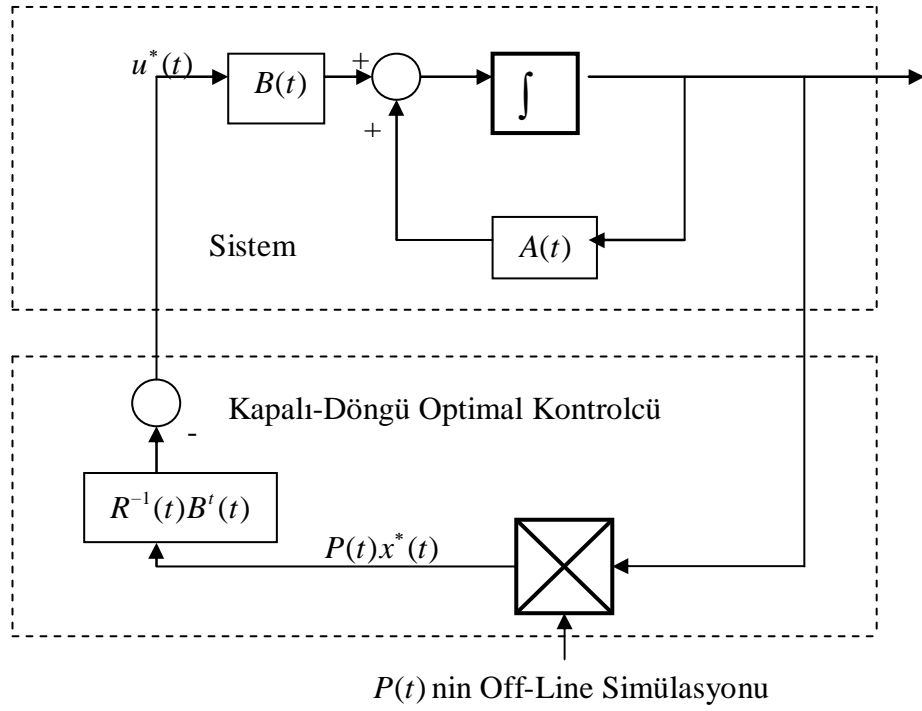
9. Optimal Kontrolü Uygulama: Blok diyagramlı kapalı-döngü optimal kontrolcü (CLOC) şekil 4.1'de gösterilmiştir. Zaman $t = t_f$ den $t = t_0$ a DRE matrisi geriye doğru çözüldükten sonra CLOC nün kendi $P(t)$ dış değerlerine sahip olduğu şekilden açıkça görülür. Bu yüzden kapalı-döngü optimal kontrol konfigürasyonunu *on-line* olarak uygulamanın yolu yoktur. $u^*(t)$ optimal kontrolü çözülebilir ve Pontryagin prosedürü kullanılarak açık-döngü konfigürasyonunda uygulanabilir. Açık-döngü optimal kontrolcü (OLOC) kapalı-döngü optimal kontrolcüyeye göre kullanışsızdır.

10. Linear Optimal Kontrol: $u^*(t)$ optimal geribildirim kontrolü (4.6) ile verilmiştir.

$$u^*(t) = -K(t)x^*(t) \quad (4.18)$$

Burada *Kalman kazancı* $K(t) = R^{-1}(t)B^t(t)P(t)$ dir veya alternatif olarak

$$u^*(t) = -K_a^t(t)x^*(t) \quad (4.19)$$



Şekil 4.1 Kapalı-döngü optimal kontrol uygulaması

yazabiliriz, burada $K_a(t) = P(t)B(t)R^{-1}(t)$ dir. Önceki optimal kontrol $x^*(t)$ durumunda lineerdir. Bu quadratik maliyet fonksiyonelleri ile lineer sistemlerin optimal kontrolünün önemli özelliklerinden biridir. (4.19) optimal kontrol bağlantısında negatif geribildirim, optimal kontrol *teoriden* ortaya çıkmıştır.

11. Kontrol Edilebilirlik: Optimal geribildirim kontrol uygulaması için sistemde kontrol edilebilirlik şartı gerekli midir? Hayır, (t_f) sonlu zamanlı sistemle ilgilenildiğinden, kontrol edilemez (kararsız da olurlar) durumların maliyet fonksiyonuna katkısı sadece sonlu miktardadır. Sonsuz zamanlı bir aralıkla ilgilenildiğinde, kontrol edilebilirlik şartı kesinlikle gereklidir.

Riccati matris denkleminin skaler versiyonunda köke sahiptir.

$$\dot{x}(t) = ax^2(t) + bx(t) + c \quad (4.20)$$

Orijinal skaler denklemin matris formunda bir genellemesi olan Riccati denklem matrisi lineer quadratik optimal kontrol, kararlılık, stochastic filtreleme ve

kontrol, pasif ağların sentezi, diferansiyel oyunlar, H_∞ -kontrol ve sağlam kararlılık ve kontrol gibi kontrol ve sistem teori alanlarında çok önemli rol oynar [1], [19], [25].

4.2.2 Genel Performans İndeksli LQR Sistemi

Bu alt bölümde (4.5) ile verilen genel performans indeksi ile durum düzenleyici sistem bulunmaktadır. Lineer, zamanla değişen sistem

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4.21)$$

ve maliyet fonksiyoneli

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} x^t(t_f)F(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[x^t(t)Q(t)x(t) + 2x^t(t)Su(t) + u^t(t)R(t)u(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} x^t(t_f)F(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} x^t(t) & u^t(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^t(t) & R(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

dur ve burada önceki bölümlerde tanımlanmış çeşitli vektör ve matrisler vardır ve sadece $n \times r$ $S(t)$ matrisi pozitif tanımlı matristir. LQR sistemi için aynı yöntem kullanılarak matris diferansiyel Riccati denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -P(t)A(t) - A^t(t)P(t) - Q(t) \\ &+ [P(t)B(t) + S(t)]R^{-1}(t)[B^t(t)P(t) + S^t(t)] \end{aligned} \quad (4.23)$$

$P(t)$ de bitiş şartı ile

$$P(t_f) = F(t_f) \quad (4.24)$$

dir. Optimal kontrol aşağıdaki gibi bulunur.

$$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)[S'(t) + P(t)]x(t) \quad [1]. \quad (4.25)$$

4.3 Matris Diferansiyel Riccati Denklemine Analitik Çözüm

Bu bölümde, matris diferansiyel Riccati denklemi (DRE) için analitik bir çözüm sunulmuştur. Zamanla değişmeyen (* basitleştirme için ihmal edilmiştir) durum ve costate denklemlerin Hamilton sistemi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -E \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Burada $E = BR^{-1}B'$ dir.

$$\Delta = \begin{bmatrix} A & -E \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$\lambda(t) = P(t)x(t)$ dönüşümü ile (4.7) matris diferansiyel Riccati denklemi (zamanla değişmeyen A , B , Q ve R matrisleri) tekrar yazılır.

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A'P(t) - Q + P(t)BR^{-1}B'P(t) \quad (4.28)$$

Bitiş şartı ile

$$P(t_f) = F(t_f) \quad (4.29)$$

tür. Δ Hamilton matrisinin özdeğer ve özvektör terimlerinde $P(t)$ çözümü analitik olarak (sayısal integrasyona karşı) elde edilebilir. (4.28) diferansiyel Riccati denklemine analitik çözüm bulmak için (4.27)'de Δ Hamilton matrisinin bir özdeğerinin μ olduğunu göstermek gereklidir. $-\mu$ de Δ nın özdeğeri olduğu anlaşılır. Bunun için

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Diğer deyişle $\Gamma^{-1} = -\Gamma$ tir. Γ ile artış ve basitleştirme ile

$$\Delta = \Gamma \Delta' \Gamma = -\Gamma \Delta' \Gamma^{-1} \quad (4.31)$$

elde edilir. v özvektörüne karşılık Δ nın özdeğeri μ ise

$$\Delta v = \mu v \quad (4.32)$$

$$\Gamma \Delta' \Gamma v = \mu v, \quad \Delta' \Gamma v = -\mu \Gamma v \quad (4.33)$$

dir. Burada $\Gamma^{-1} = -\Gamma$ kullanıldı. Düzenlenerek

$$(\Gamma v)^t \Delta = -\mu (\Gamma v)^t \quad (4.34)$$

bulunur. Δ nın özdeğeri düzenlenerek

$$D = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

bulunur, burada $M(-M)$ sağ-yarı düzlem (sol-yarı düzlem) özdeğerleri ile bir köşegen matristir. W D e karşılık özvektörlerin modal matrisidir.

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

ile tanımlanır. Burada $[W_{11} \quad W_{21}]^t$ Δ nın özdeğeri sol-yarı düzleminin (kararlı) n özvektörleridir.

$$W^{-1} \Delta W = D \quad (4.37)$$

Durum dönüşümün tanımı aşağıdadır.

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

(4.37) ve (4.38) kullanılarak (4.26) Hamilton sistemi şu hale gelir:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = W^{-1} \Delta \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = W^{-1} \Delta W \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Bilinen bitiş şartları ile (4.39) çözülerek

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-M(t-t_f)} & 0 \\ 0 & e^{M(t-t_f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t_f) \\ z(t_f) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.40) yeniden yazılarak

$$\begin{bmatrix} w(t_f) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{M(t-t_f)} & 0 \\ 0 & e^{M(t-t_f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t_f) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

bulunur. (4.38)'den ve (4.29) bitiş şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} \lambda(t_f) &= W_{21}w(t_f) + W_{22}z(t_f) = Fx(t_f) \\ &= F \left[W_{11}w(t_f) + W_{12}z(t_f) \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. $w(t_f)$ terimlerindeki $z(t_f)$ için önceki bağlantı çözülerek

$$\begin{aligned} z(t_f) &= T(t_f)w(t_f) \\ T(t_f) &= -[W_{22} - FW_{12}]^{-1} [W_{21} - FW_{11}] \end{aligned} \quad (4.43)$$

bulunur. (4.41)'den

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-M(t_f-t)} z(t_f) \\ &= e^{-M(t_f-t)} T(t_f) w(t_f) \\ &= e^{-M(t_f-t)} T(t_f) e^{-M(t_f-t)} w(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Tekrar yazılarak

$$\begin{aligned} z(t) &= T(t) w(t), \text{ burada} \\ T(t) &= e^{-M(t_f-t)} T(t_f) e^{-M(t_f-t)}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Sonuç olarak, $T(t)$ için (4.45) bağıntısı (4.28)'de $P(t)$ ile ilişkilendirilir, (4.38) kullanarak yazılır.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= W_{21} w(t) + W_{22} z(t) \\ &= P(t) x(t) = P(t) [W_{11} w(t) + W_{12} z(t)] \end{aligned} \quad (4.46)$$

(4.45) ile önceki bağıntı tekrar yazılabilir.

$$[W_{21} + W_{22} T(t)] w(t) = P(t) [W_{11} + W_{12} T(t)] w(t). \quad (4.47)$$

$P(t)$ nin analitik gösterimi aşağıdadır.

$$P(t) = [W_{21} + W_{22} T(t)] [W_{11} + W_{12} T(t)]^{-1} \quad [1], [19], [25]. \quad (4.48)$$

4.3.1 Örnek Çift integralli sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \quad x_2(0) = -3 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Performans indeksi (PI)

$$J = \frac{1}{2} \left[x_1^2(5) + x_1(5)x_2(5) + 2x_2^2(5) \right] + \frac{1}{2} \int_0^5 \left[2x_1^2(t) + 6x_1(t)x_2(t) + 5x_2^2(t) + 0.25u^2(t) \right] dt \quad (4.50)$$

Geribildirim kontrolü elde ediniz [1].

Çözüm: (4.4) sistem ve (4.5) PI genel formüllerine karşılık problemin (4.49) sistemi ve (4.50) PI karşılaştırılarak aşağıdaki farklı değerler bulunur:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F(t_f) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$R(t) = r(t) = \frac{1}{4}, \quad t_0 = 0, \quad t_f = 5 \quad (4.51)$$

(4.49) sistemi kararsızdır. 2×2 simetrik $P(t)$ matrisi

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

(4.6) optimal kontrolü

$$u^*(t) = -4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix}$$

$$= -4 \left[p_{12}(t)x_1^*(t) + p_{22}(t)x_2^*(t) \right] \quad (4.53)$$

Burada $P(t)$ pozitif tanımlı matris, (4.7) DRE matris çözümü

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11}(t) & \dot{p}_{12}(t) \\ \dot{p}_{12}(t) & \dot{p}_{22}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

(4.8) bitiş şartı ile

$$\begin{bmatrix} p_{11}(5) & p_{12}(5) \\ p_{12}(5) & p_{22}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

bulunur. (4.54) DRE matrisi basitleştirilerek

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11}(t) &= 4p_{12}^2(t) + 4p_{12}(t) - 2, & p_{11}(5) &= 1, \\ \dot{p}_{12}(t) &= -p_{11}(t) - p_{12}(t) + 2p_{22}(t) + 4p_{12}(t)p_{22}(t) - 3, & p_{12}(5) &= 0.5 \\ \dot{p}_{22}(t) &= -2p_{12}(t) - 2p_{22}(t) + 4p_{22}^2(t) - 5, & p_{22}(5) &= 2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

elde edilir.

5. VARYASYON HESABI, OPTİMAL KONTROL VE OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde varyasyon hesabı, optimal kontrol ve optimizasyon problemi bir tablo ile özetlenmiştir. Tablo 5.1’de bu problemlerin tanımları, içerikleri, amaçları, çözümünde yararlanılan yöntem ve teknikleri verilmiştir.

| VARYASYON HESABI | OPTİMAL KONTROL | OPTİMİZASYON |
|---|---|---|
| Temel varyasyon problemi hem başlangıç zamanı ve durumu hem de bitiş zamanı ve durumu sabit, birinci türevi mevcut sürekli $x(t)$ fonksiyonundan oluşur. | Optimal kontrol problemi $x(t)$ durum ve $u(t)$ kontrol değişkenlerinden oluşur. | Optimizasyon problemi değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilebildiğinden maksimum ya da minimum değerini veren şartları elde etme sürecinden oluşur. |
| Bir fonksiyon ve fonksiyonelin ekstremumunu veya optimumunu bulmayı amaçlar. | Verilen başlangıç şartları altında durum ve kontrol değişkenlerini bulmaya amaçlar. | Verilen kısıtlı ve kısıtsız problemi optimize eden değişkenlerin bulunmasını amaçlar. |
| Temel varyasyon probleminin çözümünde 1. Euler-Lagrange denklemi, 2. Birinci ve ikinci varyasyon, 3. Artış, 4. Lagrange çarpan metodu, 5. Direkt metot kullanılır. | Optimal kontrol probleminin çözümünde 1. Direkt metot, 2. Lagrange çarpan metodu, 3. Pontryagin prensibi, 4. Hamilton denklemi kullanılır. | Kısıtlı optimizasyon probleminin çözümünde 1. Lagrange çarpan metodu, 2. Kuhn-Tucker şartları, 3. Dönüşüm teknikleri, 4. Ceza fonksiyonları yöntemi, 5. Yaklaştırma yöntemleri kullanılır. |
| | Quadratik optimal kontrol problem çözümünde 1. Lineer quadratik düzenleyici 2. Riccati katsayısı 3. Diferansiyel matris Riccati denklemi kullanılır. | Kısıtsız optimizasyon probleminin çözümünde 1. Tam arama, 2. İki simetrik nokta araması, 3. Fibonacci araması, 4. Altın oranı arama, 5. Üçe bölerek arama, 6. Kareli interpolasyon, 7. Kübik interpolasyon, 8. Simpleks yöntemi, 9. Newton yöntemi, 10. En hızlı çıkış yöntemi, 11. En hızlı iniş yöntemi, 12. Eşlenik gradyant yöntemi kullanılır. |
| Sonuç olarak verilen sabit başlangıç zamanlı ve durumlu, sabit bitiş zamanlı ve durumlu fonksiyonun optimumu bulunur. | Sonuç olarak uygun optimum kontrol parametresi hesaplanır. | Sonuç olarak objektif fonksiyon verilen kısıtlarla optimize edilir. |

Tablo 5.1 Varyasyon hesabı, optimal kontrol ve optimizasyon probleminin karşılaştırılması [24], [26].

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde yapılan çalışmalar aşağıda verilmektedir.

Birinci bölümde genel olarak klasik ve modern kontrol, optimizasyon, optimal kontrol ve ilgili kavramlara değinilmiştir. Optimal kontrol ve performans indeksi ile ilgili örneklere ve varyasyon hesabı ile optimal kontrolün tarihine yer verilmiştir.

İkinci bölümde bir optimizasyon probleminin genel ifadesine, tek ve iki değişkenli optimizasyona değinilmiştir. Ayrıca kısıtsız çok değişkenli optimizasyon, konveks ve konkav fonksiyonlar bulunmaktadır. Eşitlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon sistemi tanımlanmış ve Lagrange çarpan yöntemi ile çözümü gösterilmiştir. Eşitsizlik kısıtlı optimizasyon yönteminin Kuhn-Tucker şartları ile eşitlik kısıtlı hale getirilişi ve yine Lagrange çarpan yöntemi ile çözümü anlatılmıştır. Son olarak Newton metoduna verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak varyasyon hesabı ve optimal kontrol tanım ve örnekleri yer almaktadır. Sabit-bitiş zamanlı ve sabit-bitiş durumlu sistemi optimal çözüm bulma adımları ile anlatılmıştır. Daha sonra Euler-Lagrange denklemi, Lagrange çarpan metodu, direkt metot ve ilgili örnekler verilmiştir. Pontryagin prosedürü ile ilgili örneklere yer verilmiş ve önemli özellikler vurgulanmıştır.

Dördüncü bölümde lineer quadratik optimal kontrol sistemleri bulunmaktadır. Quadratik performans indeksi, problem formülleme ve çözümü adım adım anlatılmaktadır. Değişen-zamanlı durum, optimal kontrol, performans indeksi ve önemli özellikleri yer almaktadır. Lineer quadratik Riccati sisteminin genel performans indeksi ve analitik çözümüne değinilmiştir.

Beşinci bölümde varyasyon hesabı, optimal kontrol ve optimizasyonun karşılaştırılması bulunmaktadır. Böylece ortak ve farklı yönleri vurgulanmıştır.

7. KAYNAKLAR

- [1] Naidu, D., S., Optimal control systems, CRC Press, Idaho, (2002)
- [2] Bal, H., Optimizasyon teknikleri, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, Ankara, (1995)
- [3] Özdemir, B., Ayırık sistemler için kontrol teori, Yüksek lisans tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kütahya, (2002)
- [4] Gürkan, H., Optimal kontrol sistemlerinin incelenmesi, Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Ankara, (2000)
- [5] Badakhshan, K., P., Kamyad, A., V., “Numerical solution of nonlinear optimal control problems using nonlinear programming”, *Appl. Math. Comput.* 187, (2007), 1511-1519
- [6] Kamyad, A., V., Keyanpour, M., Farahi, M., H., “A new approach for solving of optimal nonlinear control problems”, *Appl. Math. Comput.* 187, (2007), 1461-1471
- [7] Burghes, D., N., Graham, A., Introduction to control theory, including optimal control, Ellis Horwood Limited, England, (1980)
- [8] Yüksel, İ., Otomatik kontrol sistem dinamiği ve denetim sistemleri, Vipaş, Bursa, (2001)
- [9] Pedregal, P., Introduction to optimization, Springer-Verlag, New York, (2004)

- [10] Tepecik, A., İkinci mertebeden iki parametrelili ayrıık sistemler için optimal kontrol problemleri, Doktora tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul, (1998)
- [11] Yüüklü, E., Ayrıık sistemlerde gözlemlenebilirlik, Yüksek lisans tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Kütahya, (2002)
- [12] Rotkowitz, M., Cogill, R., Lall, S., “A simple condition for the convexity of optimal control over Networks with delays”, *Proceedings of the IEEE conference on decision and control*, (2005), 12
- [13] Luenberger, D., Introduction to linear and nonlinear programming, Addison-Wesley Publishing Company, USA, (1973)
- [14] Debinska, A., Just, A., Stempien, Z., “Galerkin method for optimal control of second-order evolution equations”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 10.1002, 452, (2004), **27**, 221
- [15] Hao, D., Lesnic, D., “The Cauchy problem for Laplace’s equation via the conjugate gradient method”, *IMA Journal of applied mathematics*, (2000), **65**, 199
- [16] Galewska, E., Nowakowski, A., “Sufficient conditions for optimal control problems with mixed constraints”, *Optim. Control Appl. Meth.*, 10.1002, 762, (2005), **26**, 255
- [17] Bock, I., “On optimal control problems connected with eigenvalue variational inequalities”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 10.1002, 236, (2001), **24**, 671
- [18] Lo, K., Kimura, H., “Optimal adaptive controller for systems with delay”, *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, 10.1002, 836, (2004), **18**, 799

- [19] Murata, Y., Optimal control methods for linear discrete-time economic systems, Springer-Verlag, New York, (1982)
- [20] Barriere, R., Optimal control theory, Dover publications, New York, (1967)
- [21] Li, X., Yong, J., Optimal control theory for infinite dimensional systems, Birkhauser, Boston, (1995)
- [22] Bryson, A., Ho, Y., Applied optimal control, Taylor-Francis, USA, (1975)
- [23] Guo, B., Sun, B., “Numerical solution to the optimal birth feedback control of a population dynamics:viscosity solution approach”, *Optim. Control Appl. Meth.*, 10.1002, 759, (2005), **26**, 229
- [24] Rardin, R., Optimization in operations research, Prentice Hall, New Jersey, (1998)
- [25] Hocking, L., Optimal control, Clarendon Press, Oxford, (1991)
- [26] Wismer, D., Chattergy, R., Introduction to nonlinear optimization, Elsevier Science Publishing, New York, (1978)