

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI



LEBESGUE UZAYLARINDA DİFERANSİYELLENEBİLİR  
FONKSİYONLARA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HACI BEKİR MEYDAN

BALIKESİR, MAYIS 2015

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI



LEBESGUE UZAYLARINDA DİFERANSİYELLENEBİLİR  
FONKSİYONLARA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HACI BEKİR MEYDAN

BALIKESİR, MAYIS 2015

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Hacı Bekir MEYDAN tarafından hazırlanan “LEBESGUE UZAYLARINDA DİFERANSİYELLENEBİLİR FONKSİYONLARA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22/05/2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.


Jüri Üyeleri

Danışman  
Doç. Dr. Ramazan AKGÜN

Üye  
Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR

Üye  
Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET

İmza







Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

## ÖZET

LEBESGUE UZAYLARINDA DİFERANSİYELLENEBİLİR  
FONKSİYONLARA YAKLAŞIM PROBLEMLERİ  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
HACI BEKİR MEYDAN  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. RAMAZAN AKGÜN)

BALIKESİR, MAYIS 2015

Bu tez toplam sekiz bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümü olup yapılacak olan çalışma hakkında genel bilgi verilmektedir. İkinci bölümde  $L_2$  Uzayında Yaklaşım problemleri incelenmektedir. Bu bölüm birde  $L_2$  Uzayında Düz ve Ters Teoremler alt bölümlerini içermektedir.

Üçüncü bölümde Tam Ortonormal Sistemler durumuna genelleme ile ilgili önermeler ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde  $L_2$  Uzayında Jackson Eşitsizlikleri ve eşitsizliğin sabit anlamında iyileştirilemez olduğu ele alınmıştır.

Beşinci bölüm Marcinkiewicz, Riesz ve Hardy-Littlewood Teoremlerini içerir. Altıncı bölüm  $L^{\bar{\psi}}L_p$  fonksiyon sınıflarının gömülme özelliklerini içerir. Yedinci bölümde Fourier Toplamlarıyla  $L^{\bar{\psi}}L_p$  sınıfına ait fonksiyonlara trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemleri incelenmiştir.

Sekizinci ve son bölümdeyse diğer bölümlerde çıkarılan sonuçların bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Üst sınır, en iyi yaklaşım sayısı, yaklaşım polinomu, ortonormal sistem, süreklilik modülü, düzgün sınırlılık, trigonometrik eşlenik fonksiyon, genelleştirilmiş türev.

## ABSTRACT

### PROBLEMS OF APPROXIMATION TO DIFFERENTIABLE FUNCTIONS IN LEBESGUE SPACES

MSC THESIS

HACI BEKİR MEYDAN

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN)

BALIKESİR, MAY 2015

This thesis consists of eight sections.

The first section is an introductory part, where an overview of the work to be performed is given. In the second section approximation problems in Space  $L_2$  are investigated. This section also includes a subsection titled Direct and Inverse Theorems in the Space  $L_2$ .

In the third section the propositions regarding generalization to Complete Orthonormal Systems are proved. In the fourth section with Jackson Inequalities in the Space  $L_2$  are investigated. Furthermore, the fact that these inequalities constantly cannot be improved is proved.

In the fifth section Marcinkiewicz, Riesz and Hardy-Littlewood Theorems are given. The sixth section includes the imbedding properties of  $L^{\bar{\psi}}L_p$  function classes. In the seventh section problems of approximation of functions from Sets  $L^{\bar{\psi}}L_p$ , by Fourier Sums are investigated.

In the eighth and the final section an evaluation of the results obtained under the other sections as described above is given.

**KEYWORDS:** Upper boundary, best approximation number, approximation polynomial, orthonormal system, modulus of continuity, uniform boundedness, trigonometric conjugate function, generalised derivatives.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER .....	iii
SEMBOL LİSTESİ .....	iv
ÖNSÖZ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. $L_2$ UZAYINDA YAKLAŞIM .....	5
2.1 $L_2$ Uzayında Düz ve Ters Teoremler .....	9
3. TAM ORTONORMAL SİSTEMLER DURUMUNA GENELLEME.....	13
4. $L_2$ UZAYINDA JACKSON EŞİTSİZLİKLERİ.....	19
5. MARCINKIEWICZ, RIESZ VE HARDY-LITTLEWOOD TEOREMLERİ .....	23
6. $L^{\bar{\psi}}L_p$ KÜMELERİ İÇİN GÖMÜLME TEOREMLER .....	27
7. FOURIER TOPLAMLARIYLA $L^{\bar{\psi}}L_p$ KÜMELERİNDEN FONKSİYONLARIN YAKLAŞIMLARI.....	31
8. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	43
9. KAYNAKLAR.....	44

## SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Adı</u>
$L_p$	Lebesgue uzayı
$L^{\bar{\psi}}\mathfrak{R}$	$\bar{\psi}$ türevlenebilir fonksiyonlar sınıfının $\mathfrak{R}$ alt sınıfı
$N$	Doğal sayılar kümesi
$\psi(k)$	Doğal sayı parametrelili fonksiyon
$\rho_n(f; t)$	Fourier serisinin $n$ . kısmi toplamı ile fonksiyon arasındaki fark
$\omega_p(f; t)$	$L_p$ uzayında süreklilik modülü
$\mathcal{T}_n$	En fazla $n$ dereceli trigonometrik polinomlar kümesi
$\ M\ _p$	Eşlenik fonksiyonun operatör normu
$\mu(k)$	Marcinkiewicz çarpanı
$L^{\bar{\psi}}L_p\bar{\psi}$	Türevlenebilir fonksiyonlar sınıfı

## ÖNSÖZ

Öncelikle, artık yüksek lisans ve akademik kariyerime devam edemeyeceğimi düşünmeye başladığım anda beni yolda bırakmayan, her türlü kolaylığı ve yardımını benden esirgemeyen hocam ve danışmanım Doç. Dr. Ramazan AKGÜN' e saygılarımı sunmayı vefanın gereği sayar, kendisine çok teşekkür ederim.

Aynı zamanda yüksek lisansa başlangıçta bana yol gösteren Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR hocama ve Ramazan hocamın yurt dışında olduğu bir sene içerisinde bana danışmanlık yapan Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET hocama da teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan, bu zamana gelmemde maddi manevi emeği olan aileme sevgilerimi sunarım. Yeni bir yuva kuracağım ve tez yazımında benim kadar uğraş veren nişanlıma da teşekkürler.

## 1. GİRİŞ

Bu bölümde,  $\mathfrak{N}$ ,  $L_p$  uzayında belli bir alt küme olmak üzere,  $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$  kümelerinden fonksiyonlar için  $L_s$  uzaylarının metriğine göre:

$$\| \rho_n(f; x) \|_s = \| f(x) - S_{n-1}(f; x) \|_s, \| \varphi \|_s = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^s dt \right)^{\frac{1}{s}}, \quad s \geq 1, \quad (1.1)$$

Fourier kısmi toplamının sapma değerlerini inceleyeceğiz. Çoğu kez  $\mathfrak{N} = S_p = \{ \varphi : \| \varphi \|_p \leq 1 \}$  durumunu inceleriz. Bu durumda,  $L^{\bar{\psi}}S_p = L^{\bar{\psi}}_p$  olur. Önceden olduğu gibi, temelde  $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$  sınıflarındaki sapmaların üst sınırlarını, yani,

$$\mathcal{E}_n(L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N})_s := \sup_{f \in L^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}} \| \rho_n(f; x) \|_s \quad (1.2)$$

değerini araştırıyoruz. Buna ek olarak, şimdi bu sınıftan fonksiyonların trigonometrik polinomlara en iyi yaklaşımlarını irdeliyoruz. Bunun gerekçeleri şu şekilde açıklanabilir:

Bilindiği gibi,  $\tau_{2n-1}$  derecesi  $(n-1)$ ' den büyük olmayan

$$t_{n-1}(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (c_k \cos kx + d_k \sin kx), \quad c_k, d_k \in R^1 \quad (1.3)$$

trigonometrik polinomlarının kümesi,  $X'$  in  $\| \cdot \|_X$  normlu  $2\pi$  periyodik fonksiyonlarının bir kümesi (uzayı) ve  $\mathfrak{N} \subseteq X'$  in  $X'$  in sabit bir alt kümesi (sınıfı) olduğu durumda,  $X$  uzayının metriğine göre:

$$E_n(f)_X := \inf_{t_{n-1} \in \tau_{2n-1}} \| f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \|_X, \quad f \in X \quad (1.4)$$

ile belirlenen niceliğe  $f$  fonksiyonunun en iyi yaklaşım sayısı,

$$E_n(\mathfrak{N})_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} E_n(f)_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1} \in \tau_{2n-1}} \| f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \|_X \quad (1.5)$$

ile belirlenen niceliğe  $\mathfrak{N}$  sınıfının en iyi yaklaşım sayısı denilir.

Eğer  $X = L_p$  ise,  $E_n(f)_{X=L_p} = E_n(f)_p$  ve  $E_n(\mathfrak{N})_{X=L_p} = E_n(\mathfrak{N})_p$  yazarız.  $p \in (1, \infty)$  değerleri için,  $\| \rho_n(f; x) \|_p$  ve  $E_n(f)_p$ ,  $\mathcal{E}_n(L^{\bar{\psi}}_p)$  ve  $E_n(L^{\bar{\psi}}_p)_p$  niceliklerinin

sıraları  $n \rightarrow \infty$  a yaklaştıkça çakışır. Bu niceliklerin eş zamanlı analizlerinin yapılmasının nedeni budur.

Yukarıda (1.4) denklemini alt sınırının elde edildiği  $t_{n-1}^* \in \tau_{2n-1}$  polinomu, yani

$$\| f(\cdot) - t_{n-1}^*(\cdot) \|_X = E_n(f)_X, \quad (1.6)$$

$X$  uzayında  $f(\cdot)$  fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinomu olarak adlandırılır.

Fonksiyonlara en iyi yaklaşım  $E_n(f)_X$ ' in araştırılmasında karşılaşılan genel sorunlar son zamanlarda yayınlanan sayısız kitap içeriğinde detaylı irdelenmekte olduğundan, bu tartışmaları tekrarlamaya gerek görülmemiştir. İhtiyaç olduğu takdirde, kanıtları söz gelimi Korneichuk [1,2] kitaplarında bulunabilir. Öte yandan, bu bölümde, esasen ihtiyacımız olan açık önermelerdir. Bu nedenle,  $L_p$  uzayında bir en iyi yaklaşım polinomu  $t_{n-1}^*(\cdot)$  var olduğu gerçeğinden hareket ediyoruz. Bunun sağlaması daha genel bir durumda dahi zor değildir.

Aslında,  $X$ ' in rastgele normlu bir uzay,  $g_1, \dots, g_n$   $X$ ' in  $n$  sayıda lineer bağımlı elemanı,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ' in sayısal koordinatları  $\lambda_i$  ve

$$\varphi_x(\lambda) = \| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \|_X, \quad x \in X$$

olan bir vektör olduğunu varsayalım. Şimdi, herhangi bir  $x \in X$  için,

$$e(x) \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{\lambda} \varphi_x(\lambda) = \varphi_x(\lambda^*)$$

olacak şekilde bir  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$  vektörü olduğunu gösterelim.

Aslında herhangi bir sabit  $x \in X$  için  $\varphi_x(\lambda)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak süreklidir, çünkü, norma ait üçgen eşitsizliği sayesinde;

$$\begin{aligned} |\varphi_x(\lambda) - \varphi_x(\lambda^*)| &= \left| \| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \|_X - \| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i^* g_i \|_X \right| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i \right\|_X \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \lambda_i^*| \| g_i \|_X \\ &\leq \max_k |\lambda_k - \lambda_k^*| \sum_{i=1}^n \| g_i \|_X \end{aligned}$$

Aynı  $\varphi_x(\lambda)$  gibi,

$$\psi(\lambda) = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \right\|_X$$

fonksiyonu da  $\lambda_i$ ' ye göre süreklidir. Bu yüzden, sınırlı kapalı

$$\{\lambda: \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 1\}$$

içerisinde, bu fonksiyon en küçük değeri  $m'$  i alır; bu değer,  $g_i$  vektörlerinin lineer bağımsızlığı nedeniyle pozitiftir. Ayrıca, eğer

$$\left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} > (e(x) + 1 + \|x\|_X) m^{-1} \stackrel{\text{df}}{=} \mathfrak{R}$$

ise, şunu yazmak yanlış olmaz:

$$\varphi_x(\lambda) > \psi(\lambda) - \|x\|_X > \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} m - \|x\|_X > e(x) + 1.$$

Dolayısıyla,  $\varphi_x(\lambda)$  fonksiyonu için minimum değer arayışımızda kendimizi  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \mathfrak{R}^2$  yuvarı ile sınırlayabiliriz. Bu durumda, bu fonksiyonun en düşük değerinin elde edildiği noktanın var olduğu sonucunu çıkartmak mümkündür.

Trigonometrik sistem

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$$

lineer bağımlı olduğundan, hem  $L_p$  hem de  $C$  uzaylarında  $f(\cdot)$  fonksiyonuna en iyi yaklaşımı sağlayan bir  $t_{n-1} \in \tau_{2n-1}$  polinomu vardır.

Bu bölümde,  $\psi_1(k)$  ile  $\psi_2(k)$  aşağıdaki koşulları karşılayan doğal sayı argümanlı rastgele fonksiyonlardır. Niceliksel olarak şu şekilde formüle edilir:

$$v(n) = \sup_{k \geq n} \bar{\psi}(k), \quad \bar{\psi}(k) = (\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k))^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

Armayan bir  $\bar{\psi}(k)$ ,  $k \in N$  fonksiyonu için bu nicelik  $\bar{\psi}(n)$  ile çakışır.  $K$  ( $K_i, i = 1, 2, \dots$ ) mutlak sabitleri gösterir. Sabitleri parametrelere bağı olarak göstermek gerektiği takdirde (yani,  $p, s, q$ , vb. üzerinden),  $C_p, C_{p,s}$ , vb. yazılır.

## 2. $L_2$ UZAYINDA YAKLAŞIM

Öncelikle  $p = s = 2$  eşitliğinin olduğu basit ancak çok önemli bir durumu değerlendireceğiz.

**2.1 Önerme:**  $f \in L_2$  kabul edilirse,

$$\| \rho_n(f; x) \|_2^2 = E_n^2(f)_2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (2.1)$$

olur. Formülde  $a_k$  ve  $b_k$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $f$  fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır.

**İspat:**  $t_{n-1}(\cdot)$  rastgele bir polinom ve (1.3) formunda ise, temel dönüşümlerin ardından, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \| f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - t_{n-1}(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{\pi}{2} (c_0 - a_0)^2 \\ &\quad + \pi \sum_{k=1}^{n-1} ((c_k - a_k)^2 + (d_k - b_k)^2). \end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafı örneğin,  $t_{n-1}(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  fonksiyonunun Fourier serisinin  $(n-1)$  inci kısmı toplamı ise,  $c_k = a_k$  ve  $d_k = b_k$  için en küçük değeri almaktadır. Dolayısıyla,  $f(\cdot)$  fonksiyonunun kısmi Fourier toplam fonksiyonun  $L_2$  uzayındaki en iyi yaklaşım polinomudur ve bu nedenle, (2.1) eşitliğinin ilk bölümü kanıtlanmış olmaktadır. (2.1) formülünün ikinci bölümünün ispatı da aslında son derece kolaydır, zira

$$\| \rho_n(f; x) \|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx))^2 dx.$$

Bundan sonra yapılması gereken tek şey Parseval eşitliğini uygulamaktır ki buna göre

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t) dt = \frac{a_0^2(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(g) + b_k^2(g)) \quad \forall g \in L_2. \quad (2.2)$$

Eşitlik (2.2) sayesinde (2.1) eşitliğinin sağ tarafı,  $n \rightarrow \infty$  yaklaştıkça tüm  $f \in L_2$  değerleri için monoton bir şekilde sifıra yaklaşmaktadır. Keza aynı durum  $\| \rho_n(f; x) \|_2$  ve  $E_n(f)_2$  nicelikleri için de geçerlidir.

Şimdi  $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ ,  $\psi_1(k)$  ve  $\psi_2(k)$   $k = 0, 1, \dots$  da tanımlı ve  $\psi_1(0) = 1$  ve  $\psi_2(0) = 0$  olduğunu kabul edelim. Ayrıca  $\varphi \in L_2$ ,

$$S[\varphi] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varphi; x) \quad (2.3)$$

ve  $J\bar{\psi}\psi(x)$  olsun. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} S[f] &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_1(k)A_k(\varphi; x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(\varphi; x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Buradan,

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0, \quad a_k = \psi_1(k)\alpha_k - \psi_2(k)\beta_k, \\ b_k &= \psi_1(k)\beta_k + \psi_2(k)\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

ve son olarak,

$$a_k^2 + b_k^2 = \bar{\psi}^2(k)(\alpha_k^2 + \beta_k^2), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

bulunur. Bu nedenle, (2.2)'den şunu elde etmiş oluruz:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \pi^{-1} \|\varphi\|_2^2 \quad (2.7)$$

$\bar{\psi}(k)$  niceliğini alttan sınırlı, yani  $\bar{\psi}(k) \leq K$ ,  $k \in N$  olduğunu kabul edersek, (2.6) ve (2.7) denklemlerinden şunu elde ederiz:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \leq K^2 \pi^{-1} \|\varphi\|_2^2 \quad (2.8)$$

İyi bilinen Fischer-Riesz teoreminden, bu  $f \in L_2$  anlamına gelmektedir. Dolayısıyla şu önerme doğrudur:

**2.2 Önerme:** Eğer  $\bar{\psi}(k) \leq K$ ,  $k \in N$  ve  $f \in L^{\bar{\psi}}L_2$  ise,  $f \in L_2$ , yani,  $L^{\bar{\psi}}L_2 \subset L_2$  'dir. Aslında,

$$\bar{\psi}(k) \leq K, \quad k \in N \quad (2.9)$$

eşitsizliği,

$$L^{\bar{\psi}}L_2 \subset L_2 \quad (2.10)$$

için yeterli bir koşuldur. Öte yandan, üst sınırı  $+\infty$  olan herhangi bir pozitif  $\{c_k\}$  dizisi için,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k c_k = +\infty$  olacak şekilde pozitif değerli bir  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  yakınsak dizisinin varlığı gösterilebilir. Bu nedenle, eğer

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \bar{\psi}(k) = \infty$$

ise, denklem (2.6)' dan hareketle, denklem (2.9)' un koşulu olan  $J^{\bar{\psi}} \varphi^* \in L_2$  ifadesinin aynı zamanda (2.10) denkleminin geçerliliği için yeterli bir koşul oluşturacak şekilde bir  $\varphi^* \in L_2$  gösterilebilir. Dolayısıyla, şu önerme doğrudur:

**2.1 Teorem:** *Koşul (2.9) denklem (2.10)' un geçerliliği açısından gerekli ve yeterlidir.*

Şimdi de şu önermeyi ispatlayalım:

**2.3 Önerme:** *Eğer  $f \in L^{\bar{\psi}} \cap L_2$  ve  $f^{\bar{\psi}} \in L_2$  ise, herhangi bir  $n \in N$  için,*

$$\| \rho_n(f; x) \|_2 = E_n(f)_2 \leq v(n) \| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \|_2 = v(n) E_n(f^{\bar{\psi}})_2. \quad (2.11)$$

Aslında, (2.5) bağıntılarından gelen  $a_k = a_k(f)$  ve  $b_k = b_k(f)$  (2.1) denkleminin sağ tarafına uygulandığında, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \| \rho_n(f; x) \|_2^2 &= E_n^2(f)_2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\psi}^2(k) (a_k^2(f^{\bar{\psi}}) + b_k^2(f^{\bar{\psi}})) \\ &\leq \sup_{k \geq n} \bar{\psi}^2(k) \| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \|_2^2 = v^2(n) \| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \|_2^2 \\ &= v^2(n) E_n^2(f^{\bar{\psi}})_2 \end{aligned}$$

Fourier kısmi toplamları ile yaklaşımlarda  $L_2^{\bar{\psi}}$  sınıfları içerisindeki en iyi yaklaşım için şu ifade doğrudur.

**2.2 Teorem:**  $\psi_1(k)$  ve  $\psi_2(k)$ ,  $k \in N$  koşul (2.9)' u karşılayan rastgele fonksiyonlar olsun. Bu durumda, herhangi bir  $n \in N$  için,

$$\varepsilon_n(L_2^{\bar{\psi}})_2 = E_n(L_2^{\bar{\psi}})_2 = v(n) \quad (2.12)$$

olur.

**İspat:** Koşul (2.9) ve Önerme 2 sayesinde elimizde  $L_2^{\bar{\psi}} \subset L_2$  mevcuttur. Bu nedenle, bağıntı (2.11) tüm  $f \in L_2^{\bar{\psi}}$  değerleri için geçerlidir. İncelenen durumda,  $f^{\bar{\psi}} \in S_2$  yani,  $\|f^{\bar{\psi}}\|_2 \leq 1$  olduğundan,

$$E_n(f^{\bar{\psi}})_2 \leq 1, \quad \forall f \in L_2^{\bar{\psi}} \text{ olur.} \quad (2.13)$$

Dolayısıyla, (2.11)' e göre,

$$\|\rho_n(f; x)\|_2 = E_n(f)_2 \leq v(n) \quad \forall f \in L_2^{\bar{\psi}} \text{ dir.} \quad (2.14)$$

Geriye yalnızca bu tahminin tüm  $L_2^{\bar{\psi}}$  sınıfı içerisinde kesin olduğunu göstermek kalmaktadır.

Belirli bir  $\bar{\psi}(k)$  fonksiyonu ve  $n \in N$  için şu eşitliği sağlayan bir  $k_n$  sayısı olduğunu düşünelim:

$$v(n) = \sup_{k \geq n} \bar{\psi}(k) = \bar{\psi}(k_n). \quad (2.15)$$

Fonksiyonumuzu

$$f_n(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} (\psi_1(k_n) \cos k_n x + \psi_2(k_n) \sin k_n x)$$

olarak alalım.  $f_n(x)$  fonksiyonu  $L_2^{\bar{\psi}}$  ye aittir, çünkü  $\psi$  türevi  $\pi^{-\frac{1}{2}} \cos k_n x$  değerine eşittir ve dolayısıyla,  $\|f_n^{\bar{\psi}}(x)\|_2 = 1$ ' dir. Bu fonksiyon için,

$$\|\rho_n(f_n; x)\|_2 = \|f_n(x)\|_2 = \pi^{-\frac{1}{2}} \bar{\psi}(k_n) \|\cos(k_n x - \theta_{k_n})\|_2 = \bar{\psi}(k_n) = v(n)$$

olur, yani incelenen durumda teorem ispat edilmiştir.

Eğer  $\bar{\psi}(k)$  fonksiyonu ve bir  $n \in N$  değeri için, (2.15) bağıntısını sağlayan hiçbir  $k_n$  sayısı yoksa, bu durumda,  $\{\bar{\psi}(k)\}$  kümesinin sınırlılığı gözetilerek, şu eşitlik bulunur:

$$v(n) = \sup_{k \geq n} \bar{\psi}(k) = \sup_{k \geq n} \{\bar{\psi}(k)\} \stackrel{\text{df}}{=} g_n.$$

Keza,  $n_i \geq n$  olduğu ve  $\bar{\psi}(n_i)$  değerlerinin  $g_n$ ' e yaklaşan azalmayan bir seri oluşturduğu bir  $n_i$ , ( $i \in N$ ) vardır. Eşitliğimizi

$$f_{n_i}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}}(\psi_1(n_i)\cos n_i x + \psi_2(n_i)\sin n_i x)$$

olarak belirledikten sonra, tüm  $f_{n_i}(\cdot), i \in N$  fonksiyonlarının oluşturduğu  $\Phi_n = \cup_i f_{n_i}(\cdot)$  kümesini incelediğimizde, hem  $f_n(\cdot)$  fonksiyonu ve  $f_{n_i}(\cdot)$  fonksiyonlarının  $L_2^{\bar{\psi}}$  ye ait olduğunu görürüz. Ayrıca,

$$\| \rho_n(f_n; x) \|_2 = \| f_{n_i}(x) \|_2 = \bar{\psi}(n_i) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, bu durumda aynı zamanda şu eşitliğimiz mevcuttur:

$$\varepsilon_n(L_2^{\bar{\psi}})_2 = E_n(L_2^{\bar{\psi}})_2 \geq \sup_{f \in \Phi_n} \| \rho_n(f; x) \|_2 = \sup_{i \in N} \bar{\psi}(n_i) = g_n = v(n)$$

Böylece Teorem 2.2 kanıtlanmış olur.

Eğer  $\bar{\psi}(k), k \in N$  artmayan bir fonksiyon ise,  $v(n) = \bar{\psi}(n)$ ' dir. Bu nedenle, Teorem 2 şu sonucu doğurur:

**2.1 Sonuç:** Eğer  $\psi_1(k)$  ve  $\psi_2(k)$  dizileri için,  $\bar{\psi}(k)$  artmayan ise,

$$\varepsilon_n(L_2^{\bar{\psi}})_2 = E_n(L_2^{\bar{\psi}})_2 = \bar{\psi}(n) \text{ dir.} \quad (2.16)$$

Eğer,  $\psi(k), k \in N$  pozitif sayıların oluşturduğu bir dizi ve  $\beta \in R^1$  ise,

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta\pi/2, \quad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta\pi/2 \quad (2.17)$$

Bu durumda,  $L_2^{\bar{\psi}}$  yerine  $L_{\beta,2}^{\bar{\psi}}$  yazarız. Eğer, buna ek olarak,  $\psi(k) = k^{-r}, r > 0$  ise,  $L_{\beta,2}^{\bar{\psi}} = W_{\beta,2}^r$  yazarız. Bu durumda (2.16) eşitliği şu şekli alır:

$$\varepsilon_n(W_{\beta,2}^r)_2 = E_n(W_{\beta,2}^r)_2 = n^{-r} . \quad (2.18)$$

## 2.1 $L_2$ Uzayında Düz ve Ters Teoremler

(2.12) eşitliği  $L_2$  uzayında,  $L_2^{\bar{\psi}}$  sınıflarındaki en iyi yaklaşımların üst sınırlarını tamamıyla karakterize eder. Bu bölümde,  $L^{\bar{\psi}}L_2$  kümelerine ait fonksiyonların yaklaşımlarını inceleyeceğiz. Temelde elde edeceğimiz sonuç, şu şekilde formüle dökülebilir:

**2.1.1 Teorem:**  $f \in L^{\bar{\psi}}L_2$  ve  $\psi_1(k)$  ile  $\psi_2(k)$  (2.9) koşulunu karşılayan seriler olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\bar{\psi}^2(k) - \bar{\psi}^2(k-1))E_k^2(f\bar{\psi})_2 \quad (2.1.1)$$

serisi yakınsaktır ve herhangi bir  $n \in N$  için,

$$E_n^2(f)_2 = \bar{\psi}^2(n)E_n^2(f\bar{\psi})_2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\bar{\psi}^2(k) - \bar{\psi}^2(k-1))E_k^2(f\bar{\psi})_2 \text{ dir.} \quad (2.1.2)$$

Öte yandan, eğer  $f \in L_2$ ,  $\psi_1(k)$  ve  $\psi_2(k)$  serileri  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\psi}(k)E_k(f) = 0$  eşitliğini sağlayacak şekilde ise,  $f \in L^{\bar{\psi}}L_2$  kapsamı, ancak ve sadece

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\bar{\psi}^{-2}(k) - \bar{\psi}^{-2}(k-1))E_k^2(f)_2 \quad (2.1.3)$$

serisi yakınsak ise, geçerlidir. Bu dizinin yakınsak olması durumunda,  $f \in L^{\bar{\psi}}L_2$  'dir ve herhangi bir  $n \in N$  için, şu eşitlik geçerlidir:

$$E_n^2(f\bar{\psi})_2 = \bar{\psi}^{-2}(n)E_n^2(f)_2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\bar{\psi}^{-2}(k) - \bar{\psi}^{-2}(k-1))E_k^2(f)_2. \quad (2.1.4)$$

Bu teoremin ilk kısmı olan (2.1.2) denklemini bizlere  $f(\cdot)$  fonksiyonunun  $\bar{\psi}$  türevi hakkındaki verilerden yararlanarak  $E_n(f)_2$  niceliklerinin, ya da bunun muadili olarak  $\|\rho_n(f; x)\|_2$  niceliklerinin sifıra gitme oranlarına ilişkin sonuçlar çıkartma olanağı vermektedir. Yaklaşım kuramında bu tür değerlendirmelere *düz teoremler* adı verilir. Teoremin ikinci kısmı ise *ters eşitsizlik* olmaktadır; bizatihi fonksiyonun ve türevlerin özelliklerine ilişkin sonuçlar çıkarılmasında  $E_n(f)_2$  serisinin özelliklerinden yararlanır.

Ayrıca şunu da belirtmeliyiz ki, (2.1.2) eşitliğinden, herhangi bir  $f \in L_2$  ve  $n \in N$  için,

$$\bar{\psi}^2(n)E_n^2(f\bar{\psi})_2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\bar{\psi}^2(k) - \bar{\psi}^2(k-1))E_k^2(f\bar{\psi})_2 \quad (2.1.5)$$

niceliği sınırlı olmak koşuluyla  $\psi_1(k)$  ve  $\psi_2(k)$  dizilerinden bağımsızdır.

Teoremin ikinci kısmı, özellikle,  $f \in L_2$  fonksiyonu ancak ve sadece (2.1.3) serisi yakınsak olduğu takdirde sonlu  $L_2$  normlu  $\bar{\psi}$  türevine sahip olduğunu gösterir. Bu durum, özellikle, herhangi bir  $f \in L_2$  fonksiyonu açısından, bu fonksiyonun

$\bar{\psi}(k) \equiv E_k(f)_2$  eşitliğini sağlayan  $\bar{\psi}$  türevinin  $L_2$ ' ye ait olamayacağını göstermektedir (bu durumda (2.1.4) serisi ıraksaktır).

Teorem 2.1.1' i ispatlamak için şu önermeye ihtiyacımız bulunmaktadır:

**2.1.1 Önerme:** *Aşağıdaki şekilde bir dizinin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad (2.1.6)$$

*yakınsak olduğunu ve bir  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  serisinin şu şekilde olduğunu kabul edelim:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n A_{n+1} = 0, A_n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k. \quad (2.1.7)$$

*Bu durumda,*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k c_k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} c_i \quad (2.1.8)$$

*dizileri aynı anda ıraksar ve yakınsar. Keza, yakınsamaları durumunda,*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k c_k = \lambda_n \sum_{k=n}^{\infty} c_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} c_i \quad \text{olur.} \quad (2.1.9)$$

**İspat:** Bu önermenin ispatı, yeterince büyük tüm  $m$  değerleri için geçerli

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) A_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k c_k - \lambda_n A_n + \lambda_m A_{m+1}$$

eşitliğinde limit alınarak elde edilir.

**Teorem 2.1.1' in İspatı:**  $f \in L^{\bar{\psi}} L_2$  olsun,  $\lambda_k = \bar{\psi}^2(k)$  ve  $c_k = \pi(a_k^2(f\bar{\psi}) + b_k^2(f\bar{\psi}))$  diyelim. Parseval eşitliğinden,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(f\bar{\psi}) + b_k^2(f\bar{\psi})) = \|f\bar{\psi}\|_2^2 - \frac{\pi a_0^2(f\bar{\psi})}{2} < \infty$$

elde edilir ve (2.9)' dan hareketle, şu sonucu buluruz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\psi}^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2(f\bar{\psi}) + b_k^2(f\bar{\psi})) = 0.$$

Dolayısıyla, Önerme 2.1.1' e göre,

$$\Sigma_1 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\psi}^2(k) (a_k^2(f\bar{\psi}) + b_k^2(f\bar{\psi}))$$

ile

$$\Sigma_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\bar{\psi}^2(k) - \bar{\psi}^2(k-1)) \pi \sum_{i=k}^{\infty} (a_k^2(f\bar{\psi}) + b_k^2(f\bar{\psi}))$$

dizileri aynı anda yakınsamaktadır. (2.6) ve (2.1) eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda,

$$\Sigma_1 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) = E_n^2(f)_2$$

ve

$$\Sigma_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\bar{\psi}^2(k) - \bar{\psi}^2(k-1)) E_k^2(f\bar{\psi})_2$$

sonuçlarını elde ederiz. Teorem 2.1' e göre elimizde  $f \in L_2$  olduğundan,  $\Sigma_1$  sonludur.

Bu nedenle,  $\Sigma_2$  niceliği de sonludur, yani, (2.1.1)' deki dizi gerçekten yakınsaktır ve dolayısıyla, Önerme 2.1.1' e yer alan (2.1.2) eşitliği doğrudur.

Teoremin ikinci kısmı da benzer bir yoldan ispatlanır. Bu kez,  $\lambda_k = \bar{\psi}^{-2}(k)$  ve  $c_k = \pi(a_k^2(f) + b_k^2(f))$  eşitlikleri kullanılmalıdır.

### 3. TAM ORTONORMAL SİSTEMLER DURUMUNA GENELLEME

Önceki iki bölüm sonuçlarının rastgele fonksiyonların oluşturduğu tam ortonormal sistemlere göre Fourier serileri ve polinoma genellenmesi mümkündür. İlk olarak gerekli tanımları yapalım.

Diyelim ki,  $\varphi = \{\varphi_n\}$ ,  $n \in N$  genel olarak  $[a, b]$  aralığı üzerinde karmaşık değerli fonksiyonların oluşturduğu bir ortonormal sistemdir.  $L^\varphi$ ,  $[a, b]$  üzerinde toplanabilir tüm  $f(\cdot)$  fonksiyonların oluşturduğu kümedir, öyle ki;

$$c_k = c_k(f) = \int_a^b f(x) \bar{\varphi}(x) dx, k \in N \quad (3.1)$$

integralleri vardır. Yine,  $\Phi[f]$ ,  $\{\varphi_n\}$  sistemine göre  $f \in L^\varphi$  fonksiyonlarının Fourier serisi:

$$\Phi[f] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \quad (3.2)$$

ve  $\psi(k)$ ,  $k \in N$ , doğal sayı argümanlı bir fonksiyon olsun. Belirli bir  $f \in L^\varphi$  fonksiyonu için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\psi(k)} \varphi_k(x) \quad (3.3)$$

de  $L^\varphi$ 'den belirli bir fonksiyonun Fourier serisi olsun. Bu fonksiyon  $f^\psi(\cdot)$  ile gösterilmekte ve  $f(\cdot)$  fonksiyonunun  $\psi$  türevi olarak adlandırılmaktadır.  $\psi$  türevleri bulunan  $L^\varphi$ 'ye ait tüm fonksiyonların kümesi  $L^{\varphi, \psi}$  ile gösterilmektedir.  $f \in L^{\varphi, \psi}$  ve buna ek olarak,  $\mathfrak{N}$   $L(a, b)$ 'nin belirli bir alt kümesi olmak kaydı ile,  $f^\psi \in \mathfrak{N}$  ise,  $f \in L^{\varphi, \psi} \mathfrak{N}$  yazabiliriz. Burada  $\mathfrak{N}$ ,

$$\|g\|_2 = \left( \int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

sonlu normuna sahip  $g(\cdot)$  fonksiyonlarının  $L_2(a, b)$  uzayı ile bu uzaydaki  $S_2(a, b)$  birim yuvarı

$$S_2(a, b) = \{g: \|g\|_2 \leq 1\} \text{ olabilmektedir.} \quad (3.5)$$

Şimdi  $L_2(a, b) = L_2$ ,  $S_2(a, b) = S_2$ ,  $L^{\varphi, \psi} S_2 = L_2^{\varphi, \psi}$ ,

$$\begin{aligned} S_n(f; x) &= \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad c_k = c_k(f), n \in \mathbb{N} \\ \rho_n(f; x) &= f(x) - S_{n-1}(f; x) \quad \text{olsun.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$P_n$  ile,  $\{\varphi_k\}$  sistemine göre  $n$  dereceli tüm  $P_n(x)$  polinomlarının kümesini göstermekteyiz :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \quad (3.7)$$

Bu  $\{\varphi_k\}$  sistemlerini her zaman  $L_2$ ' de tam kabul edeceğiz. Çok iyi bilindiği gibi,  $P_n$ ' den tüm polinomlar arasında,  $L_2$  metriğine göre en iyi yaklaşımı veren polinom  $f \in L_2$ ' nin Fourier serisinin  $S_n(f; x)$  kısmi toplamıdır:

$$\begin{aligned} E_{n+1}(f)_2 &= E_{n+1}(\varphi; f)_2 = \inf_{P_n \in P_n} \|f(x) - P_n(x)\|_2 \\ &= \|f(x) - S_n(f; x)\|_2 . \end{aligned} \quad (3.8)$$

$L_2$  uzayındaki herhangi bir tam ortonormal sistem  $\{\varphi_n\}$  kapalı olduğundan, Parseval eşitliği

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2 \quad (3.9)$$

herhangi bir  $f \in L_2$  için geçerlidir ve dolayısıyla,

$$E_n^2(f)_2 = \|f(x) - S_{n-1}(f; x)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n-1} |c_k|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \text{ dir.} \quad (3.10)$$

$\{\varphi_k\}$ ' yı  $L_2$  içerisinde rasgele tam bir ortonormal sistem kabul edelim ve belirli bir  $\psi(\cdot)$  için  $f \in L^{\varphi, \psi} L_2$  olsun. Eğer  $c_k(f)$  ve  $c_k(f^\psi)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  sırasıyla  $f(\cdot)$  ve  $f^\psi(\cdot)$  fonksiyonlarının Fourier katsayıları olursa, bu durumda (3.2) ve (3.3)' den hareket ederek, şunu elde ederiz:

$$|c_k(f)| = |\psi(k)| |c_k(f^\psi)| . \quad (3.11)$$

Bu nedenle, eğer  $\psi(k)$  sınırlıysa, yani,  $|\psi(k)| \leq K$  ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq K^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f^\psi)|^2 = K^2 \|f^\psi\|_2^2 ,$$

olduğundan  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2$  serisi,  $f^\psi \in L_2$  olduğu için, yakınsaktır.  $\{\varphi_k\}$  fonksiyonlarının tam ortonormal sistemlerine ilişkin Fischer-Riesz teoremine göre,  $f \in L_2$  olduğu sonucuna varmaktayız.

**3.1 Önerme:** Eğer  $|\psi(k)| \leq K$ ,  $k \in N$  ise,  $L^{\varphi,\psi} L_2 \subset L_2$  'dir.

Önerme 2.3' ün eş anlamlısı olan aşağıdaki önerme de açıktır:

**3.2 Önerme:**  $f \in L^{\varphi,\psi} \cap L_2$  ve  $f^\psi \in L_2$  kabul edildiğinde, herhangi bir  $n \in N$  için,

$$\| \rho_n(f; x) \|_2 = E_n(f)_2 \leq v(n) \| \rho_n(f^\psi; x) \|_2 = v(n) E_n(f^\psi)_2 \quad \text{dir.} \quad (3.12)$$

Burada

$$v(n) = \sup_{k \geq n} |\psi(k)| \quad \text{dir.}$$

Aslında, (3.10) ve (3.11) bağıntıları göz önünde bulundurulduğunda şu eşitlik elimizde mevcuttur:

$$\begin{aligned} \| \rho_n(f; x) \|_2^2 &= E_n^2(f)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} |\psi(k)|^2 |c_k(f^\psi)|^2 \leq v^2(n) E_n^2(f^\psi)_2. \end{aligned}$$

Şimdi  $L_2^{\varphi,\psi}$  sınıflarında (3.7) formundaki polinomların  $E_n(L_2^{\varphi,\psi})_2$  en iyi yaklaşımlarını karakterize eden teoremi ispatlayalım:

$$E_n(L_2^{\varphi,\psi})_2 = \sup_{f \in L_2^{\varphi,\psi}} E_n(f)_2.$$

**3.1 Teorem:** Diyelim ki,  $\psi(k)$  şu özellikte bir rastgele fonksiyondur:

$$|\psi(k)| \leq K \quad \forall k \in N. \quad (3.13)$$

Bu durumda,  $L_2$  içerisinde tam olan herhangi bir ortonormal sistem  $\{\varphi_n\}$  ve herhangi bir  $n \in N$  için,

$$E_n(L_2^{\varphi,\psi})_2 = \sup_{f \in L_2^{\varphi,\psi}} \| \rho_n(f; x) \|_2 = v(n) \quad \text{dir.} \quad (3.14)$$

**İspat:** Koşul (3.13) ve Önerme 3.1 ile  $L_2^{\varphi,\psi} \subset L_2$  olur. Bu nedenle, (3.12) bağıntısı herhangi bir  $f \in L_2^{\varphi,\psi}$  için geçerlidir. İncelenen durumda,  $f^\psi \in S_2$  dir. Dolayısıyla, (3.10)' a göre,

$$E_n^2(f^\psi)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f^\psi)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f^\psi)|^2 = \|f^\psi\|_2^2 < 1 \text{ dir.}$$

Bu nedenle,

$$\|\rho_n(f; x)\|_2 = E_n(f)_2 \leq v(n). \quad (3.15)$$

Geriye sadece bu eşitsizliği  $L_2^{\varphi,\psi}$  sınıfı bütününde iyileştirmenin mümkün olmadığını göstermek kalmaktadır. İlk olarak, verilen her bir  $\psi(\cdot)$  fonksiyonu ve  $n \in N$  için aşağıdaki eşitliği sağlayacak bir  $k_n$  olsun:

$$v(n) = \sup_{k \geq n} |\psi(k)| = |\psi(k_n)|. \quad (3.16)$$

Bu durumda, denklemlerimizi  $f_n(x) = \gamma_n |\psi(k_n)| \varphi_{k_n}(x)$  ve  $\gamma_n = \|\varphi_{k_n}\|_2^{-1}$  olarak alalım.  $f_n \in L_2^{\varphi,\psi}$  ve,

$$\|\rho_n(f_n; x)\|_2 = \|f_n\|_2 = |\psi(k_n)| = v(n)$$

sağlanır. Eğer  $\psi(\cdot)$  fonksiyonu ile bir  $n \in N$  sayısı için (3.16) bağıntısını geçerli kılan  $k_n$  değeri bulmak olanaksız ise,  $\{|\psi(k)|\}$ ' in sınırlı olmasından

$$v(n) = \sup_{k \geq n} \{|\psi(k)|\} \stackrel{\text{df}}{=} g_n.$$

Keza,  $n_i \geq n$  için  $|\psi(n_i)|$  sayıları  $v(n)$ ' ye yaklaşan azalmayan bir  $n_i$  dizisi mevcuttur.

$$f_{n_i}(x) = \gamma_{n_i} |\psi(n_i)| \varphi_{n_i}(x), \quad \gamma_{n_i} = \|\varphi_{n_i}\|_2^{-1}$$

Tüm  $f_{n_i}(x)$ ,  $i \in N$  fonksiyonları kümesini  $F_n$  ile gösterelim. Açık ki, herhangi bir sabit  $i$  için elimizde  $f_{n_i} \in L_2^{\varphi,\psi}$  ve  $\|\rho_n(f_{n_i}; x)\|_2 = |\psi(n_i)|$  olur. Ayrıca

$$E_n(L_2^{\varphi,\psi})_2 \geq \sup_{f \in F_n} \|\rho_n(f; x)\|_2 = \sup_{i \in N} |\psi(n_i)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |\psi(n_i)| = v(n).$$

Teorem 3.1 böylelikle kanıtlanır.

**3.1 Sonuç:** Eğer, Teorem 3.1 koşulları altında  $|\psi(k)|$ ,  $k \in N$  dizisi artmayan ise,

$$E_n(L_2^{\varphi, \psi})_2 = |\psi(n)|.$$

Aşağıdaki önerme Teorem 2.1.1' in bir benzeridir.

**3.2 Teorem:**  $\{\varphi_k\}$  ' nin  $L_2$  uzayında tam bir fonksiyonlar ortonormal sistemi,  $f \in L_2^{\varphi, \psi}$  ve  $\psi(k)$  ' nin (3.13) koşulunu sağlayan bir dizi olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi^2(k) - \psi^2(k-1)) E_k^2(f^\psi)_2$$

dizisi yakınsaktır ve

$$E_n^2(f)_2 = \psi^2(n) E_n^2(f^\psi)_2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\psi^2(k) - \psi^2(k-1)) E_k^2(f^\psi)_2$$

eşitliği herhangi bir  $n \in N$  için geçerlidir.

Öte yandan, eğer:

$$f \in L_2 \text{ ve } \psi(k)$$

dizisi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\psi(k)| E_k(f) = 0$$

şeklinde ise,  $f \in L_2^{\varphi, \psi} L_2$  kapsamı ancak ve sadece

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi^{-2}(k) - \psi^{-2}(k-1)) E_k^2(f)_2$$

serisi yakınsak olduğunda geçerli olur. Bu serinin yakınsak olması durumunda,  $f \in L_2^{\varphi, \psi} L_2$  ' dir ve herhangi bir  $n \in N$  için,

$$E_n^2(f^\psi)_2 = \psi^{-2}(n) E_n^2(f)_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi^{-2}(k) - \psi^{-2}(k-1)) E_k^2(f)_2$$

**İspat:** Aynen Teorem 2.1.1' in sağlamasında olduğu gibi, bu teoremin ispatında da Önerme 2.1.1' de izlenen yol izlenir. Önerme 2.1.1' den teoremin ilk

kısmını elde etmek için  $\lambda_k = \psi^2(k)$  ve  $c_k = |c_k(f\psi)|^2$  almak yeterlidir. Teorem 3.2' nin ikinci kısmını kanıtlamak için  $\lambda_k = \psi^{-2}(k)$  ve  $c_k = |c_k(f)|^2$  eşitlikleri kullanılmalıdır.

Teorem 2.1.1' in ardından verilen tüm sonuçlar Teorem 3.2 için de geçerliliğini korur. Bu nedenle, özellikle ikinci kısım herhangi bir  $f \in L_2$  için  $\psi$  türevinin

$$\psi(k) = E_k(f)_2$$

için,  $L_2$ ' ye dahil olamayacağını göstermektedir.

#### 4. $L_2$ UZAYINDA JACKSON EŞİTSİZLİKLERİ

Yaklaşım kuramında Jackson eşitsizlikleri (ya da teoremleri) en iyi yaklaşım sayısını üstten süreklilik (düzgünlük) modülü ile değerlendirir. Bu tip önermelerin isim babası D. Jackson (henüz 1911' li yıllarda)

$f^{(r)} \in C, r = 0, 1, \dots$ ,  $f^{(0)}(\cdot) \stackrel{\text{df}}{=} f(\cdot)$  olmak üzere,

$$E_n(f)_C \leq C_r \omega(f^{(r)}; n^{-1}), \quad (4.1)$$

ifadesinin doğru olduğunu,  $C_r$ ' nin  $n$ ' ye düzgün sınırlı bir ifade olması kaydıyla ispatlamıştır.

Bizim hedefimiz  $L_2$  uzayında (4.1) eşitsizliğinin benzerlerini bulmaktır. Çıkış noktamızı şu önerme oluşturmaktadır:

**4.1 Teorem:**  $f \in L_2$  ve  $f(\cdot)$  hemen her yerde sabit olmayan bir fonksiyon kabul edilirse,

$$\| \rho_n(f; x) \|_2 = E_n(f)_2 < 2^{-1/2} \omega_2(f; \pi/n) \quad (4.2)$$

olur ve eşitliğin sağ tarafındaki  $2^{-1/2}$  sabiti herhangi bir  $n$  için daha küçültülemez.

**İspat:** Öncelikle  $\omega_p(f; t)$ ' nin  $L_p$  uzayında  $f(\cdot)$  fonksiyonunun süreklilik modülünü ifade ettiğini ve

$$\omega_2(f; t) = \sup_{|h| \leq t} \| f(\cdot + h) - f(\cdot) \|_2 \quad (4.3)$$

ile tanımlı olduğunu hatırlayalım.  $f(x+h) - f(x)$  farkı için Fourier serisi ile Parseval eşitliğini kullandığımızda, herhangi bir  $f \in L_2$  için

$$\| f(x+h) - f(x) \|_2^2 = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2(f) (1 - \cos kh),$$

$$\gamma_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f) \quad (4.4)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, (4.3) ve (2.1)' den hareketle, herhangi bir  $t \geq 0$  için

$$\begin{aligned}\omega_2^2(f; t) &\geq \|f(x+t) - f(x)\|_2^2 \geq 2\pi \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k^2(f)(1 - \cos kt) \\ &= 2E_n^2(f)_2 - 2\pi \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k^2(f)\cos kt,\end{aligned}$$

ya da

$$E_n^2(f)_2 \leq \frac{1}{2}\omega_2^2(f; t) + \pi \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k^2(f)\cos kt$$

elde ederiz.

Bu eşitsizliğin her iki tarafını  $\sin(nt)$  ile çarpıp ve  $[0, \pi/n]$  aralığı üzerinden integralini alırız. Bunu yapmamız mümkündür çünkü herhangi bir  $t \in R^1$  için, sağ taraftaki seri bir yakınsak  $\sum \gamma_k^2(f)$  serisinden küçüktür. Sonuçta,

$$E_n^2(f)_2 \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega_2^2(f; t) \sin(nt) dt + \pi \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k^2(f) c_k$$

elde ederiz. Burada

$$c_k = \int_0^{\pi/n} \sin(nt) \cos kt dt \text{ dir.}$$

Açıkça görüldüğü gibi,  $c_n = 0$ ' dir ve  $\sin(nt)$ ' nin  $(0, \pi/2n)$  aralığında artan bir fonksiyon olduğu gerçeğini göz önüne alırsak, herhangi bir  $k > 0$  için elimizde  $c_k \leq 0$  mevcuttur. Bu nedenle,

$$E_n^2(f)_2 \leq \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega_2^2(f; t) \sin(nt) dt \text{ dir.} \quad (4.5)$$

Varsayımdan,  $f(\cdot)$  fonksiyonu sabit değildir. Bu nedenle  $\omega_2(f; \pi/n) > 0$  ve

$$\frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega_2^2(f; t) \sin nt dt < \frac{n}{4} \omega_2^2(f; \pi/n) \int_0^{\pi/n} \sin nt dt = \frac{1}{2} \omega_2^2(f; \pi/n). \quad (4.6)$$

(4.5) ve (4.6) eşitsizliklerini bir araya getirdiğimizde (4.2)' ye ulaşırız. Bundan sonra yapılacak iş bu eşitsizliğin iyileştirilmesinin mümkün olmadığını göstermekten ibarettir. Şu halde, herhangi bir  $n \in N$  ve rastgele küçük  $\delta > 0$  için  $L_2$ ' de, aşağıdaki eşitliği sağlayan bir  $f_n(x) = f_n(\delta; x)$  olduğunu ispatlayalım:

$$E_n(f_n)_2 = \sqrt{\frac{\pi-\delta}{2\pi}} \omega_2(f_n; \pi/n) \quad (4.7)$$

Bu eşitlik teoremi ispatlar.

$n \in \mathbb{N}$  ve  $\delta \in (0, \pi/n)$  olsun.  $g_n(\delta; t)$ ' yi  $2\pi/n$  periyodik olarak şöyle tanımlayalım:

$$g_n(\delta; t) = \begin{cases} 1 - t/2\delta, & t \in [0, 2\delta], \\ 0, & t \in [2\delta; \frac{\pi}{n}]. \end{cases}$$

Bu fonksiyonun Fourier serisi

$$g_n(\delta; t) = \frac{\delta}{\pi} + \frac{2}{\pi\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin k n \delta}{kn} \right)^2 \cos k n t$$

olur ve buna ek olarak,  $t \in [0, \pi/n]$  için,  $g_n(\delta; 0) = 1$  ve  $g_n(\delta; t) \geq 0$  olur. Ayrıca,

$$f_n(t) = f_n(\delta; t) = \left( \frac{2}{\pi\delta} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \pi n}{kn} \cos k n t$$

olsun. Fischer-Riesz teoreminden elimizde  $f_n \in L_2$  mevcuttur ve dolayısıyla bu fonksiyon incelenen durumda

$$\begin{aligned} \|f_n(x+h) - f_n(x)\|_2^2 &= \frac{4}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin k n \delta}{kn} \right)^2 (1 - \cos k n h) \\ &= 2\pi [g_n(\delta; 0) - g_n(\delta; \pi/n)] \end{aligned}$$

olur ve (4.4)' ü sağlar.  $g_n(\delta; t)$  fonksiyonu,  $t \in (0; \pi/n)$  için artmayandır. Bu nedenle,

$$\omega_2^2(f_n; \frac{\pi}{n}) = 2\pi [g_n(\delta; 0) - g_n(\delta; \frac{\pi}{n})] = 2\pi \text{ dir.}$$

Aynı zamanda,  $k < 0$  için  $a_k(f_n) = b_k(f_n) = 0$  olduğundan, (2.1) eşitliğinden,

$$E_n^2(f_n)_2 = \frac{2}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin k n \delta}{kn} \right)^2 = \pi [g_n(\delta, 0) - \delta/\pi] = \pi - \delta$$

ve

$$\omega_2^2(f_n; \pi/n) = 2E_n^2(f_n)_2 \frac{\pi}{\pi-\delta}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu (4.7) bağıntısını verir. Teorem 4.1 kanıtlanır.

Önerme 2.1, Önerme 2.3 ve Teorem 4.1' i birleştirdiğimizde, şu teoreme ulaşırız:

**4.2 Teorem:**  $\psi_1(k)$  ve  $\psi_2(k)$ ,  $k \in N$

$$\bar{\psi}(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \leq K$$

sağlansın. O halde, herhangi bir  $f \in L^{\bar{\psi}}L_2$  için

$$\| \rho_n(f; x) \|_2 = E_n(f)_2 < 2^{-1/2} v(n) \omega_2(f^{\bar{\psi}}; \pi/n), v(n) = \sup_{k \geq n} \bar{\psi}(k) \text{ olur.} \quad (4.8)$$

$\omega(t)$  süreklilik modülü ve  $L^{\bar{\psi}}H_{\omega_2}$  sınıfı  $\omega_2(f^{\bar{\psi}}; t) \leq \omega(t)$  ilişkisini sağlayan  $f \in L^{\bar{\psi}}$  fonksiyonlarının sınıfı olsun. Bağıntı (4.8)' deki üst sınırları bu fonksiyon sınıfı için analiz ettiğimizde, şu önermeye ulaşırız:

**4.1 Sonuç:** *Teorem 4.2 koşulları altında,*

$$\varepsilon_n(L^{\bar{\psi}}H_{\omega_2})_2 = E_n(L^{\bar{\psi}}H_{\omega_2})_2 < 2^{-\frac{1}{2}} v(n) \omega(\pi/n)' \text{ dir.} \quad (4.9)$$

Eğer  $\psi_1(k) = \psi(k) \cos \beta \pi / 2$  ve  $\psi_2(k) = \psi(k) \sin \beta \pi / 2$  ise,  $\psi(k)$  doğal sayı argümanlı bir fonksiyonu ve  $\beta \in R^1$  olmak kaydıyla,  $L^{\bar{\psi}}H_{\omega_2}$  yerine  $L^{\bar{\psi}}_{\beta}H_{\omega_2}$  yazabiliriz. Eğer, buna ek olarak  $\psi(k) = k^{-r}$ ,  $r > 0$  ise, o zaman  $L^{\bar{\psi}}H_{\omega_2} = W^r_{\beta}H_{\omega_2}$  yazalım. Son durumda, (4.9) bağıntısı şu şekli alır:

$$\varepsilon_n(W^r_{\beta}H_{\omega_2})_2 = E_n(W^r_{\beta}H_{\omega_2})_2 < 2^{-1/2} n^{-r} \omega(\pi/n). \quad (4.9')$$

Burada dikkat çeken bir husus, (4.2) eşitsizliğindeki  $2^{-1/2}$  sabitinin iyileştiremez oluşudur. Aynı zamanda bu durumun (4.8) - (4.9') bağıntıları için de söylenmesi mümkün değildir.

## 5. MARCINKIEWICZ, RIESZ VE HARDY-LITTLEWOOD TEOREMLERİ

İzleyen paragraflarda,  $L_p, p \in (1, \infty)$  uzayları için 1. ile 4. maddelerde elde ettiğimiz başlıca savların benzerlerini oluşturacağız. Bu amaçla, Marcinkiewicz' in elde ettiği, çarpanlar adı verilen özel bir formda operatörler kuramı ile ilgili bir sonuçtan geniş ölçüde yararlanacağız. Bu konuda kaynak olarak Zygmund [3,4], Stein [5], Butzer ve Nessel [6] ile Edwards [7,8] tarafından yayınlanan ve bu alanda bol miktarda verinin yanı sıra zengin bir kaynakça içeren kitapları öneririz. Burada, çoğunluğu zaten gerekli tanımları vermek ve Marcinkiewicz teoremini formüle etmekle yetineceğiz.

$\mathcal{T}'$  nin şu formda bir trigonometrik seri kümesi olsun.

$$y(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (5.1)$$

$\mu = \mu(k), k = 0, 1, \dots,$  in bir sayı dizisi olduğunu varsayalım. Her  $y \in \mathcal{T}'$  ye karşılık  $z \in \mathcal{T}$  elemanı ile şu şekilde verilsin:

$$z(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{a_0 \mu_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.2)$$

Böylece, her  $\mu = \mu(k)$  dizisi  $\mathcal{T}'$  den  $\mathcal{T}'$  ye çarpan olarak adlandırılan bir  $M$  operatörü belirtir.

$A$  ve  $B$   $\mathcal{T}'$  nin alt kümeleri olsun.  $M_{A,BA}$  dan  $B'$  ye giden çarpanlar ailesini gösterebiliriz. Bu durumda, eğer  $A = B$  ise, tanım itibarıyla,  $M_{A,A} = M_A$  olmalıdır.

$M \in M_{p,s}$  ile kastımız (5.1)' deki serinin  $S[y]$  olduğu,  $y \in L_p$  ve (5.2)' deki serinin  $S[z]$  ve  $z \in L_s$  olduğunu göstermektedir.  $s = p$  ise,  $M_{p,p} = M_p$  alacağız.

Eğer  $y$  ve  $z$  (5.1) ve (5.2) bağıntılarını karşılar ve bu eşitsizliklerdeki seriler sırasıyla  $S[y]$  ve  $S[z]$  ise,  $z(x) = My(x)$  yazabiliriz. Ayrıca eğer  $M \in M_p$  ise,  $\|M\|_p$   $L_p$  uzayında operatör normudur. Yani,

$$\|M\|_p = \sup_{\|y\|_p \leq 1} \|My(x)\|_p. \quad (5.3)$$

Bu notasyonda, aşağıdaki Marcinkiewicz teoremini formüle edebiliriz:

**5.1 Teorem:** Bir  $\mu = \mu(k)$  serisi için,

$$v_0 = v_0(\mu) = \sup_k |\mu(k)|, \quad \sigma_0 = \sigma_0(\mu) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\mu(k+1) - \mu(k)| \quad (5.4)$$

şeklinde ifade edilen niceliklerin sonlu olduğunu kabul edelim.

Bu durumda, bu seriden üretilen  $M$  çarpanı her bir  $p \in (1, \infty)$  değeri için  $M_p$  'ye aittir ve

$$\|M\|_p \leq C_p \lambda, \quad \lambda = \lambda(\mu) = \max(v_0, \sigma_0), \quad (5.5)$$

olup, formülde  $C_p$  sabiti yalnızca  $p$ 'ye bağlıdır.

Bu teorem yalnızca  $M \in M_p$  kapsamının geçerliliğine ilişkin yeterli koşul sağlamakla kalmayıp, aynı zamanda  $\mu = \mu(k)$  dizisinin  $v_0(\mu)$  ve  $\sigma_0(\mu)$  nitelikleri aracılığıyla  $\|M\|_p$  normunu sınırlama olanağı vermektedir ki, bu son derece önemlidir.

Teorem 5.1 hemen şu önermeyi verir:

**5.1 Sonuç:** Diyelim ki,  $S_n$  her bir  $f \in L$  fonksiyonunu kendi  $(n-1)$ 'inci kısmi Fourier toplamı ile ilişkilendirsin. Yani  $S_n f(x) = S_{n-1}(f, x)$  eşitliğini sağlayan bir operatör olsun. Bu durumda her  $p \in (1, \infty)$  için,

$$\|S_n\|_p = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|S_n f(x)\|_p = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|S_{n-1}(f; x)\|_p \leq C_p, \quad (5.6)$$

olmalıdır. Formülde  $C_p$  yalnızca  $p$ 'ye bağlıdır.

**İspat:**  $S_n$ ,  $v_0(\mu_n) = 1$  ve  $\sigma_0(\mu_n) = 1$  eşitliklerini sağlayan

$$\mu_n = \mu_n(k) = \begin{cases} 1, & k < n, \\ 0, & k \geq n, \end{cases}$$

ile belirlenmiş olsun. Dolayısıyla, (5.6) bağıntısı, (5.5)'den çıkar.

(5.6) bağıntısı aslında bizlere şu eşitsizliği oluşturma olanağı da verir (bu eşitsizlik, yaklaşım kuramında Lebesgue eşitsizliği olarak bilinir):

$$E_n(f)_p \leq \| \rho_n(f; x) \|_p \leq C_p E_n(f)_p \quad \forall f \in L_p, \quad 1 < p < \infty, \quad (5.7)$$

Formülde  $C_p$ ,  $n$ ' den ve  $f$ ' den bağımsız bir sabittir.

**İspat:**  $t_{n-1}^*(\cdot)$ ,  $L_p$  uzayındaki bir  $f(\cdot)$  fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom kabul edilirse,

$$\begin{aligned} E_n(f)_p &\leq \| \rho_n(f; x) \|_p = \| f(x) - t_{n-1}^*(x) + S_n(f - t_{n-1}^*; x) \|_p \\ &\leq \| f(x) - t_{n-1}^*(x) \|_p + \| S_n(f - t_{n-1}^*; x) \|_p \\ &\leq E_n(f)_p (1 + \| S_n \|_p) \leq C_p E_n(f)_p. \end{aligned}$$

(5.7) eşitsizliği, herhangi bir sabit  $p \in (1, \infty)$  için,  $f \in L_p$  içerisinde  $\| \rho_n(f; x) \|_p$  ve  $E_n(f)_p$  niceliklerinin sadece  $f$  ve  $n$ ' den bağımsız bir sabit kadar bir çarpan ile farklı olabileceğini göstermektedir, yani:

$$\| \rho_n(f; x) \|_p = O(1) E_n(f)_p. \quad (5.8)$$

Dolayısıyla, eğer  $\mathfrak{R}$ ,  $L_p$ ,  $p \in (1, \infty)$ ' nin bir alt kümesi ise,

$$\varepsilon_n(\mathfrak{R})_p = \sup_{f \in \mathfrak{R}} \| \rho_n(f; x) \|_p = O(1) E_n(\mathfrak{R})_p = O(1) \sup_{f \in \mathfrak{R}} E_n(f)_p \quad \text{olur.} \quad (5.8')$$

Eşitlikte  $O(1)$ ,  $n$ ' ye göre düzgün sınırlı demektir.

Ayrıca, aşağıda sunulan Riesz teoremine de (Riesz [9]) ihtiyacımız bulunmaktadır. İspatı, örneğin Bari [10] içeriğinde bulunabilir.

**5.2 Teorem:** *U her  $f \in L$  fonksiyonunu trigonometrik eşlenik fonksiyonu, yani  $Uf(x) = \tilde{f}$  ile ilişkilendiren bir operatör ise, herhangi bir  $p \in (1, \infty)$  için,*

$$\| U \|_p = \sup_{\| f \|_p \leq 1} \| Uf(x) \|_p = \sup_{\| \tilde{f} \|_p \leq 1} \| \tilde{f} \|_p \leq C_p \quad \text{olur.} \quad (5.9)$$

Eşitlikteki  $C_p$  sadece  $p$ ' ye bağlıdır.

Bu teorem  $f \in L_p$  ve  $1 < p < \infty$  olursa,  $\tilde{f} \in L_p$  olacağını ifade etmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, benzer önermelerin  $L_1$ ,  $L_\infty$  ve  $C$  uzayları için doğru olmadığıdır. Bu uzaylar için (5.6) ile (5.8') bağıntılarına aykırılık meydana gelmektedir.

Burada Hardy-Littlewood teoremi [11] kullanılacaktır. Bu teoremin ayrıntılı ispatı Zygmund [5,12] kitapları içeriğinde bulunabilir. Hardy-Littlewood teoremi şu şekilde formüle edilebilir:

**5.3 Teorem:**  $1 < p < s < \infty$ ,  $\alpha = p^{-1} - s^{-1}$  ve

$$D_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos kt$$

ise, herhangi bir  $\varphi \in L_p$  için,

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) D_\alpha(t) dt$$

ifadesi,  $L_s$  uzayına aittir ve

$$\|\Phi_\alpha\|_s \leq C_{p,s} \|\varphi\|_p \text{ 'dir.}$$

Bağıntıdaki  $C_{p,s}$  yalnızca  $p$  ve  $s$ ' ye bağımlı bir sabittir.

$\varphi \in L_p$  ve  $S[\varphi] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varphi; x)$  kabul edilirse,

$$S(\Phi_\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} A_k(\varphi; x)$$

yani,  $\Phi_\alpha(x) = M^\alpha \varphi(x)$  olur. Burada  $M^{(\alpha)}$ ,  $\mu^\alpha(k) = 0, 1^{-\alpha}, 2^{-\alpha}, \dots$  serisi ile üretilen çarpılandır. Teorem 5.3  $M^{(\alpha)} \in M_{p,s}$ ' yi ifade etmektedir.

## 6. $L^{\bar{\psi}}L_p$ KÜMELERİ İÇİN GÖMÜLME TEOREMLERİ

$1 < p, s < \infty$  olmak üzere  $L_s$  uzayında  $L^{\bar{\psi}}L_p$  kümesinden olan fonksiyonlara yaklaşım problemlerini irdeleyeceğiz.  $s$  sayısı  $p$  değerine eşit, ondan büyük ya da küçük olabilir. Bu nedenle, öncelikle  $f \in L^{\bar{\psi}}L_p$  kapsamının hangi koşullar altında  $f \in L_s$  'yi gerektirdiğini açıklığa kavuşturmak gereklidir. Açıkçası, sabit  $p$  sayıları için bu durum tamamen  $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ ' ye bağlıdır. Aşağıdaki tanımı verelim.

**6.1 Tanım:** Her sabit  $\alpha \geq 0$  için,  $\psi_1(k)$  ve  $\psi_2(k), k = 0, 1, \dots, \psi_1(0) = 1$  ve  $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$  ile  $\psi_2(0) = 0$  ' dan oluşan  $(\psi_1, \psi_2)$  ' nin

$$v_\alpha(\psi_i) = \sup_k |\psi_i(k)|k^\alpha \quad (6.1)$$

olmak üzere

$$\sigma_\alpha(\psi_i) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_i(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_i(k)k^\alpha|, i = 1, 2, \quad (6.2)$$

sınırlı olması durumunda,  $P_\alpha$  kümesine dahil olur deriz.

$v_\alpha(\psi_i)$  niceliklerinin sınırlılık durumunun kontrol edilmesi son derece kolaydır.  $\sigma_\alpha(\psi_i)$  nicelikleri için, bu sorun daha karmaşıktır. Yine de, eğer bir şekilde genelliği sınırlı tutup,  $\psi_i(k)k^\alpha$  sayılarının artmadığını kabul edecek olursak,  $v_\alpha(\psi_i)$  ve  $\sigma_\alpha(\psi_i)$  niceliklerinin sınırlı olduğu aşikar hale gelir.

Şimdi de gömülme teoremlerine geçelim ve  $p = s$  olduğu durumu inceleyelim.

**6.1 Teorem:** Eğer  $\bar{\psi} \in P$  ve  $p \in (1, \infty)$  ise,  $L^{\bar{\psi}}L_p \subset L_p$  ' dir.

**İspat:** (1.4) eşitliğinden yola çıkıldığında, herhangi bir  $f \in L^{\bar{\psi}}L_p$  için,

$$\begin{aligned}
S[f] &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k)A_k(f^{\bar{\psi}}; x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f^{\bar{\psi}}; x)) = \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)A_k(f^{\bar{\psi}}; x) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(k)\tilde{A}_k(f^{\bar{\psi}}; x) = \\
&= \frac{a_0(f)}{2} + Mf^{\bar{\psi}}(x) + \tilde{M}Uf^{\bar{\psi}}(x)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

eşitliğini elde ederiz. Formülde  $U$  eşleniklik operatörü yani  $U\varphi = \tilde{\varphi}$  ve  $M$  ile  $\tilde{M}$  aşağıdaki denklemlerle tanımlanan çarpılanlardır:

$$\mu(k) = \psi_1(k), \quad \tilde{\mu}(k) = \psi_2(k). \tag{6.4}$$

$\bar{\psi} \in P_0$  koşulu ve Teorem 8' i  $M$  ve  $\tilde{M}$  çarpılanlarının  $M_p$ ' ye ait olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca,  $f \in L^{\bar{\psi}}L_p$  koşulu  $f^{\bar{\psi}} \in L_p$  sonucunu vermektedir. Dolayısıyla, Teorem 5.2' ye göre,  $Uf^{\bar{\psi}} \in L_p$  olduğu sonucuna varıyoruz. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left\| \frac{a_0(f)}{2} + Mf^{\bar{\psi}}(x) + \tilde{M}Uf^{\bar{\psi}}(x) \right\|_p \\
&\leq \left\| \frac{a_0(f)}{2} \right\|_p + (\|M\|_p + \|\tilde{M}\|_p \|U\|_p) \|f^{\bar{\psi}}\|_p \leq C_p,
\end{aligned}$$

yani,  $f \in L_p$ ' dir.

Teorem 6.1' in  $p = 2$  için de doğru olduğu açıktır. Bu durumda, önerme Önerme 2.2 tarafından kapsanır. Eğer  $f \in L_p$  ve  $1 < s \leq p < \infty$  ise, Hölder eşitsizliği ile

$$\|f\|_s = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^s dt \right)^{1/s} \leq (2\pi)^{(p-s)/ps} \|f\|_p. \tag{6.5}$$

Dolayısıyla, Teorem 6.1 kullanılırsa:

**6.1 Sonuç:** Eğer  $\bar{\psi} \in P_0$  ve  $1 < s \leq p < \infty$  ise,  $L^{\bar{\psi}}L_p \subset L_s$ ' dir.

Şimdi,  $1 < p < s < \infty$  durumunu inceleyelim.

**6.2 Teorem:** Varsayalım  $1 < p < s < \infty$ ,  $\alpha = p^1 - s^1$ , ve  $\bar{\psi} \in P_\alpha$  ' dir. Bu durumda  $L^{\bar{\psi}} L_p \subset L_s$  olur.

**İspat:**  $\mu(k)$  ve  $\tilde{\mu}(k)$ , (6.4) bağıntılarındaki gibi,  $k^\alpha \mu(k)$  ve  $k^\alpha \tilde{\mu}(k)$  dizileri tarafından üretilen çarpanlar  $(MM^{-\alpha})$  ve  $(M\tilde{M}^{-\alpha})$  ile gösterilirse,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\bar{\psi}}; x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \mu(k) (k^{-\alpha} A_k(f^{\bar{\psi}}; x))$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\bar{\psi}}; x) = (MM^{-\alpha}) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} A_k(f^{\bar{\psi}}; x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\bar{\psi}}; x) = (MM^{-\alpha}) S\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(x+t) D_\alpha(t) dt\right]$$

(6.6)

elde edilir. Burada  $D_\alpha(t)$  Teorem 5.3' deki gibidir.  $f^{\bar{\psi}} \in L_p$  olduğundan, Teorem 5.3' den hareketle

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(x+t) D_\alpha(t) dt \quad (6.7)$$

evrişimi  $L_s$  ' ye aittir ve  $\bar{\psi} \in P_\alpha$  olduğundan, herhangi bir  $p \in (1, \infty)$  için  $(MM^{-\alpha}) \in M_p$  olduğunu Teorem 5.1 sayesinde biliyoruz. Dolayısıyla

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\bar{\psi}}; x) \|_s = \| MM^{(-\alpha)} S[g] \|_s \leq C_{p,s} \text{ dir.} \quad (6.8)$$

Formülde  $C_{p,s}$ , sadece  $p$  ve  $s$ 'ye bağımlı bir sabittir.

Benzer şekilde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\mu}(k) \tilde{A}_k(f^{\bar{\psi}}; x)) = (\tilde{M}M^{(-\alpha)}) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \tilde{A}_k(f^{\bar{\psi}}; x)$$

$$= (\tilde{M}M^{-\alpha}) S[\tilde{g}] \text{ dir.}$$

$(\tilde{M}M^{-\alpha}) \in M_p$  olduğundan ve Teorem 5.2' den  $\tilde{g} \in L_p$  olduğu bilindiğinden, Teorem 5.3' e göre,

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(k) \tilde{A}_k(f^{\bar{\psi}}; x) \|_s \leq C_{p,s} \quad (6.9)$$

(6.3), (6.8) ve (6.9) bağıntılarını birleştirdiğimizde, Teorem 6.2' nin ispatını tamamlamış oluruz.

## 7. FOURIER TOPLAMLARIYLA $L^{\bar{\psi}}L_p$ KÜMELERİNDEN FONKSİYONLARIN YAKLAŞIMLARI

$1 < p, s < \infty$  ve  $\bar{\psi} \in P_\alpha$ ,  $\alpha = p^{-1}/s^{-1}$ .  $f \in L^{\bar{\psi}}L_p$  fonksiyonu için,  $\|\rho_n(f; x)\|_s$  ve  $E_n(f)_s$  niceliklerini karşılaştıralım. İlk, aşağıdaki önermeyi kanıtlayalım.

**7.1 Önerme:**  $1 < p, s < \infty$  ve

$$\alpha = (p^{-1} - s^{-1})_+ = \begin{cases} p^{-1} - s^{-1}, & p < s \\ 0, & p \geq s. \end{cases} \quad (7.1)$$

olsun. Ayrıca,  $M_n^{(\alpha)}$  ve  $\tilde{M}_n^{(\alpha)}$ ,

$$\mu_n^\alpha = \mu_n^\alpha(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ k^\alpha \psi_1(k), & k \geq n, \end{cases} \quad (7.2)$$

ve

$$\tilde{\mu}_n^\alpha = \tilde{\mu}_n^\alpha(k) = \begin{cases} 0, & k \geq n, \\ k^\alpha \psi_2(k), & k < n, \end{cases} \quad (7.2')$$

dizileri ile belirlenen ve herhangi bir  $n \in N$  için  $M_s$ ' ye ait olan, diğer bir ifadeyle  $M_n^{(\alpha)} \in M_s$  ve  $\tilde{M}_n^{(\alpha)} \in M_s$  ifadelerini doğrulayan çarpılan olsun. Eğer  $f \in L^{\bar{\psi}}L_p$  ise, herhangi bir  $n \in N$  için,

$$E_n(f)_s \leq \|\rho_n(f; x)\|_s \leq K_{p,s}^{(n)} \|\rho_n(f\bar{\psi}; x)\|_p \leq C_p K_{p,s}^n E_n(f\bar{\psi})_p \quad (7.3)$$

olur. Burada

$$K_{p,s}^{(n)} \leq C_{p,s} (\|M_n^{(\alpha)}\|_s + \|\tilde{M}_n^{(\alpha)}\|_s \|U\|_s), \quad (7.4)$$

$U$  conjugate operatörü, yani  $U_\varphi = \tilde{\varphi}$  ve  $C_p$  ile  $C_{p,s}$  sırasıyla yalnızca  $p$ ' ye ve  $p$  ve  $s$ ' ye bağımlı sabitlerdir.

**İspat:** (2.4) eşitliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned}
E_n(f)_s &\leq \| \rho_n(f; x) \|_s = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} A_k(f; x) \right\|_s \\
&\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s + \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\mu}(k) \tilde{A}_k(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s
\end{aligned} \tag{7.5}$$

bulunur. Burada  $\mu(k)$  ve  $\tilde{\mu}(k)$  (6.4) bağıntısının tanımladığı dizilerdir. İlk olarak  $s > p$  olduğunu varsayalım. Bu durumda, (bağıntı (6.8) )

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\bar{\psi}}; x) = (MM^{-\alpha}) S \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x+t) D_{\alpha}(t) dt \right]$$

olur.  $(MM^{-\alpha})$  operatörü yerine,  $M_n^{\alpha}$  çarpanını kullanabiliriz. Dolayısıyla, Teorem 5.3' e dayanarak:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s &\leq \| M_n^{\alpha} \|_s \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x+t) D_{\alpha}(t) dt \right\|_s \\
&\leq C_{p,s} \| M_n^{(\alpha)} \|_s \| U \|_s \| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \|_p
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Benzer şekilde, Teorem 5.2' ye dayanarak:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\mu}(k) \tilde{A}_k(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s &= \| M_n^{\alpha} \cup \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x+t) D_{\alpha}(t) dt \right) \|_s \\
&\leq C_{p,s} \| \tilde{M}_n^{(\alpha)} \|_s \| U \|_s \| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \|_p.
\end{aligned} \tag{7.6'}$$

(7.5) ve (7.6') bağıntılarını birleştirerek, (7.3)' teki ara eşitsizlik çıkar. Dolayısıyla,  $s > p$  için Önerme 7.1' in ispatını tamamlamak için (5.7)' deki eşitsizliği uygulamak yeterli olacaktır.

Eğer  $p \geq s$  ise, o halde  $\alpha = 0$  demektir ve  $k \geq n$  için,  $\mu_n^\alpha(k) = \mu_n^0(k) = \mu(k)$  eşitliğini elde ederiz. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s &= \left\| M_n^{(0)} \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s \leq \\ &\left\| M_n^{(0)} \right\|_s \left\| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s' \text{ dir.} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Benzer şekilde, Teorem 5.2' den, şunu elde ederiz:

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\mu}(k) \tilde{A}_k(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s \leq \left\| \tilde{M}_n^{(0)} \right\|_s \left\| U \right\|_s \left\| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s' \text{ dir.} \quad (7.7')$$

(7.5), (7.7) ve (7.7') bağıntılarını karşılaştırdığımızda

$$E_n(f)_s \leq \left\| \rho_n(f; x) \right\|_s \leq \left( \left\| M_n^{(0)} \right\|_s + \left\| \tilde{M}_n^{(0)} \right\|_s \left\| U \right\|_s \right) \left\| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \right\|_s.$$

Öte yandan,  $p = s$  için, (7.3) eşitliği doğrudan doğruya (5.7) eşitsizliği uygulanarak elde edilir. Aynı zamanda,  $p > s$  için öncelikle (6.5) eşitsizliği kullanılmalıdır. Böylece Önerme 7.1 ispatlanmıştır.

Herhangi bir  $\alpha \geq 0$  için,  $P_\alpha^n$  terimini, herhangi bir  $n$  doğal sayısı için aşağıdaki koşulları sağlayan,  $P_\alpha$ ' ya ait  $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ ' lerin alt kümesi olarak tanımlayalım.

$$v_\alpha(\psi_{i,n}) = \sup_k |\psi_{i,n}(k)| k^\alpha \leq C_1 v_i(n) n^\alpha, \quad (7.8)$$

$$\sigma_\alpha(\psi_i, n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_{i,n}(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_{i,n}(k)k^\alpha| \leq C_2 v_i(n) n^\alpha. \quad (7.9)$$

Burada,

$$\psi_{i,n} = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \psi_i(k), & k \geq n, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (7.10)$$

$v_i(n) = v(\psi_i; n) = \sup_{k \geq N} |\psi_i(k)|$ ,  $C_1$  ve  $C_2$ ,  $n$ ' ye göre düzgün sınırlı sabitlerdir.

**7.2 Önerme:** Eğer  $\bar{\psi} \in P_\alpha^{(n)}$  ise, bu durumda (7.2) ve (7.2') dizilerinden oluşan  $M_n^{(\alpha)}$  ve  $\tilde{M}_n^{(\alpha)}$  çarpanları herhangi bir  $p \in (1, \infty)$  değeri için  $M_p$ ' ye dahildir ve ayrıca,

$$\| M_n^{(\alpha)} \|_p \leq C_{p,\alpha} v_1(n) n^\alpha, \quad \| \tilde{M}_n^{(\alpha)} \|_p \leq C_{p,\alpha} v_2(n) n^\alpha. \quad (7.11)$$

$C_{p,\alpha}$  sadece  $p$  ve  $\alpha$ ' ya bağımlı bir sabittir.

**İspat:** Önermenin ispatı Teorem 5.1' den gelmektedir. Aslında, (7.8) ve (7.9)' a göre, şu ilişkiler elimizde mevcuttur:

$$v_0(\mu_n^{(\alpha)}) = \sup_k |\mu_n^{(\alpha)}(k)| = \sup_{k \geq n} |\psi_1(k)| k^\alpha \leq C_1 v_1(n) n^\alpha, \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(\mu_n^{(\alpha)}) &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} |\psi_{1,n}(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_{1,n}(k)k^\alpha| \\ &\leq C_2 v_1(n) n^\alpha. \end{aligned} \quad (7.12')$$

Herhangi bir  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$v_1(n) n^\alpha \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |\psi_1(k)| k^\alpha$$

olduğundan,  $\bar{\psi} \in P_0$  kapsamı nedeniyle  $v_1(n) n^\alpha$  nicelikleri sınırlıdır. Bu nedenle, herhangi bir  $p \in (1, \infty)$  için  $M_n^{(\alpha)} \in M_p$ ' dir ve incelenen durumda  $\lambda = \lambda(\mu_n^{(\alpha)}) \leq C v_1(n) n^\alpha$  olduğundan, (7.11)' deki ilk eşitsizlik (5.5)' teki değerlendirmenin devamıdır. Aynı mantık  $\tilde{M}_n^{(\alpha)}$  operatörü için de geçerlidir.

Önerme 4.2 ve Önerme 5.1' i birleştirdiğimizde, şu teoreme ulaşırız:

**7.1 Teorem:**  $1 < p, s < \infty$ ,  $\alpha = (p^{-1} - s^{-1})_+$  ve  $\bar{\psi} \in P_\alpha^{(n)}$ ,  $f \in L^{\bar{\psi}} L_p$  ise, bu durumda, herhangi bir  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned} E_n(f)_s &\leq \| \rho_n(f; x) \|_s \leq C_{p,s}^{(1)} v(n) n^\alpha \| \rho_n(f \bar{\psi}; x) \|_p \\ &\leq C_{p,s}^{(2)} v(n) n^\alpha E_n(f \bar{\psi})_p \end{aligned} \quad (7.13)$$

Burada,

$$v(n) = \sup_{k \geq n} \bar{\psi}(k), \quad \bar{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{1/2}$$

ve  $C_{p,s}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $n$  ve  $f$ ' ye göre düzgün sınırlı niceliklerdir.

Aslında, (7.4)' ü (7.3) içerisine yerleştirdiğimizde, Teorem 5.2 ve (7.11) değerlendirmesinden hareketle, şunu buluruz:

$$\begin{aligned} E_n(f)_s &\leq \| \rho_n(f; x) \|_s \leq C_{p,s}^{(1)} (v_1(n) + v_2(n)) n^\alpha \| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \|_p \\ &\leq C_{p,s}^{(2)} (v_1(n) + v_2(n)) n^\alpha E_n(f^{\bar{\psi}})_p \end{aligned}$$

ve, (7.13)' ü elde etmek için, her  $n \in N$  için

$$\frac{1}{2} (v_1(n) + v_2(n)) \leq v(n) \leq v_1(n) + v_2(n) \quad (7.14)$$

kullanmak yeterlidir. Teorem 7.1' in özel bir durumunu ele alalım. Eğer

$|\psi_i(k)|k^\alpha$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha \geq 0$  sayıları artmıyorsa,  $\bar{\psi} \in P_\alpha^{(n)}$  ve

$$v_\alpha(\psi_{i,n}) = |\psi_i(n)|n^\alpha, \quad i = 1, 2, \quad (7.15)$$

ve

$$\sigma_\alpha(\psi_{i,n}) \leq 2|\psi_i(n)|n^\alpha. \quad (7.15')$$

Bu nedenle,

$$v_1(n) = |\psi_1(n)|, \quad v_2(n) = |\psi_2(n)| \text{ ve } v(n) = \bar{\psi}(n).$$

Dolayısıyla şu teorem doğrudur:

**7.2 Teorem:**  $1 < p, s < \infty$ ,  $\alpha = (p^{-1} - s^{-1})_+$  ve  $|\psi_i(k)|k^\alpha$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k \in N$  sayı dizisi artmayam olsun. Eğer  $f \in L^{\bar{\psi}}L_p$  ise, herhangi bir  $n \in N$  için,

$$\begin{aligned} E_n(f)_s &\leq \| \rho_n(f; x) \|_s \leq C_{p,s}^{(1)} \bar{\psi}(n) n^\alpha \| \rho_n(f^{\bar{\psi}}; x) \|_p \\ &\leq C_{p,s}^{(2)} \bar{\psi}(n) n^\alpha E_n(f^{\bar{\psi}})_p \text{ olur.} \end{aligned} \quad (7.13')$$

Burada  $C_{p,s}^{(1)}$  ve  $C_{p,s}^{(2)}$   $n$  ve  $f$ ' den bağımsız sabitlerdir.

Eğer  $f \in L_p^{\bar{\psi}}$  ise, bu durumda, tanım itibarıyla,  $\| f^{\bar{\psi}} \| \leq 1$ ' dir ve dolayısıyla,

$$E_n(f^{\bar{\psi}})_p \leq \| f^{\bar{\psi}}(x) - 0 \|_p \leq \| f^{\bar{\psi}}(x) \|_p \leq 1 \text{ olur.}$$

Bu nedenle, Teorem 7.1 ve Teorem 7.2' den:

**7.3 Teorem:**  $1 < p, s < \infty$ ,  $\alpha = (p^{-1} - s^{-1})_+$  ve  $\bar{\psi} \in P_\alpha^{(n)}$  ise, herhangi bir  $n \in N$  değeri için,

$$E_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq \varepsilon_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq C_{p,s} \nu(n) n^\alpha \quad \text{olur.} \quad (7.16)$$

$|\psi_i(k)| k^\alpha$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k \in N$ ,

$$E_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq \varepsilon_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq C_{p,s} \bar{\psi}(n) n^\alpha \quad (7.16')$$

Burada,  $C_{p,s}$  yalnızca  $p$  ve  $s$ ' ye bağımlı bir sabittir.

$\alpha = 0$  için (7.16) ve (7.16') değerlendirmelerinin herhangi bir  $\alpha > 0$  için,  $|\psi_i(k)|$  fonksiyonları çok hızlı artmamak kaydıyla, doğru olduğunu gösterelim.

Öncelikle  $p = s$  ve dolayısıyla  $\alpha = 0$  eşitliklerini oluştururuz. Buradan,  $\bar{\psi} \in P_0^{(n)}$  olduğu takdirde,

$$E_n(L_p^{\bar{\psi}})_p \geq C_p \nu(n) \quad (7.17)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi belirli bir  $\bar{\psi}(k)$  fonksiyonu ve  $n \in N$  sayısı için, (2.15) bağıntısı doğrulayan bir  $k_n$  sayısı olduğunu varsayalım. Şu fonksiyona bakalım:

$$f_n(x) = a^{-1}(\psi_1(k_n) \cos k_n x + \psi_2(k_n) \sin k_n x), \quad a = \|\cos\|_p. \quad (7.18)$$

$f_n(x)$  fonksiyonu,  $a^{-1} \cos k_n x$  fonksiyonunun  $\bar{\psi}$  integralidir ve dolayısıyla,  $L_p^{\bar{\psi}}$  ye aittir. Keza,

$$\|\rho_n(f_n; x)\|_p = \|f_n(x)\|_p = a^{-1} \bar{\psi}(k_n) \|\cos(k_n x - \theta_{k_n})\|_p = \bar{\psi}(k_n) = \nu(n).$$

Dolayısıyla, (2.15) bağıntısı (7.17)' yi vermektedir. Mantık yürütmeyi takip ettiğimizde, (7.17) eşitsizliğinin genel durumda geçerli olduğu sonucuna ulaşırız.  $f_{n_i}(x)$  fonksiyonunun rolünü bu durumda

$$f_{n_i}(x) = a^{-1}(\psi_1(n_i) \cos n_i x + \psi_2(n_i) \sin n_i x) \quad (7.19)$$

oyun. (7.16) ve (7.16') eşitsizliklerinin  $s < p$  için merteye anlamında iyileştirilemediğini ispatlamak için şunun gösterilmesi gereklidir:

$$E_n(L_{p,s}^{\bar{\psi}}) \geq C_{p,s} \nu(n), \quad \forall \bar{\psi} \in P_0^{(n)}. \quad (7.20)$$

$$f_n(x) = b^{-1}(\psi_1(k_n)\cos k_n x + \psi_2(k_n)\sin k_n x), \quad b = (2\pi)^{(s-p)/ps} \|\cos t\|_p,$$

ve dolayısıyla,

$$f_{n_i}(x) = b^{-1}(\psi_1(n_i)\cos n_i x + \psi_2(n_i)\sin n_i x).$$

Bu sonuçlar, şu teoremden özetlenmiştir:

**7.4 Teorem:**  $1 < s \leq p < \infty$  ve  $\bar{\psi} \in P_0^{(n)}$  ise, bu durumda, herhangi bir  $n \in N$  için,

$$C_{p,s}^{(1)} \nu(n) \leq E_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq \varepsilon_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq C_{p,s}^{(2)} \nu(n) \quad (7.21)$$

Özellikle, eğer  $\bar{\psi}(k)$  dizisi artmayan ise, bu durumda,

$$C_{p,s}^{(1)} \bar{\psi}(n) \leq E_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq \varepsilon_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq C_{p,s}^{(2)} \bar{\psi}(n) \quad \text{olur.} \quad (7.21')$$

Burada,  $C_{p,s}^{(1)}$  ve  $C_{p,s}^{(2)}$ , sadece  $p$  ve  $s$ 'ye bağımlı olabilecek sabitlerdir.

Şimdi herhangi bir  $\alpha > 0$  değeri için (7.16) ve (7.16') değerlendirmelerinin isabetli olduğu bir  $\bar{\psi}$  çift kümesi seçelim. Bu kümeyi  $P_B$  olarak tanımlayalım ve

$$\max_{n \leq k \leq 2n} \frac{\nu(n)}{\bar{\psi}(k)} \leq K \quad \forall n \in N, \quad \nu(n) = \sup_{k \geq n} \bar{\psi}(k) \quad (7.22)$$

$$\sup_{m \in N} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |h_i(k+1) - h_i(k)| \leq K, \quad i = 1, 2, \quad (7.23)$$

olsun. Burada,

$$h_i(k) = h_i(k, n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-1, \quad k > 2n, \\ \frac{\nu(n)\psi_i(k)}{\bar{\psi}^2(k)}, & n \leq k \leq 2n. \end{cases} \quad (7.24)$$

Varsayalım  $\bar{\psi} \in P_\alpha^{(n)} \cap P^B$  olsun. Bu durumda,  $L_p^{\bar{\psi}}$  sınıfında aşağıdaki ifadeyi

herhangi bir  $n \in N$  için geçerli kılan bir  $f^*(\cdot)$  fonksiyonu var olduğunu gösterelim.

$$E_n(f^*)_s \geq C_{p,s} \nu(n) n^\alpha, \quad \alpha = p^{-1} - s^{-1}, \quad \alpha > 0. \quad (7.25)$$

Bunu gerçekleştirmek için, aşağıdaki fonksiyonu sabit  $n \in N$  değerleri için inceleyelim.

$$f_n(t) = \nu(n) g_n(t), \quad g_n(t) = \sum_{k=n}^{2n} \cos kt \quad (7.26)$$

ve  $\bar{\psi}$  türevini bulalım. Elimizde şu ilişki mevcuttur:

$$\begin{aligned} f_n^{\bar{\psi}}(t) &= \nu(n) \sum_{k=n}^{2n} \left( \frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \cos kt - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \sin kt \right) \\ &= (H_n^{(1)} - H_n^{(2)} U) g_n(t) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Burada  $H_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , (7.24) dizilerinin ürettiği çarpanlar ve  $U$  yukarıda olduğu gibi, conjugate operatördür. (7.22) ve (7.23) koşulları ile Teorem 5.1 ve Teorem 5.2' den hareketle ulaştığımız sonuç, herhangi bir  $p \in (1, \infty)$  için,

$$\| H_n^{(1)} - H_n^{(2)} U \|_p \leq C_p \quad (7.28)$$

olduğudur. Burada  $C_p$  yalnızca  $p$ ' ye bağımlı bir sabittir. Bu nedenle, (7.27) bağıntısı şunu ifade etmektedir:

$$\| f_n^{\bar{\psi}} \|_p \leq C_p \| g_n \|_p. \quad (7.29)$$

Şu önermeye ihtiyaç duymaktayız:

**7.3 Önerme:**  $n, q \in N$ ,  $q > n$  ve  $p \in (1, \infty)$  olsun. Bu durumda

$$C_p^1 (q - n)^{(p-1)/p} \leq \| \sum_{k=n}^q \cos kt \|_p \leq C_p^{(2)} (q - n)^{(p-1)/p} \quad (7.30)$$

Formülde  $C_p^{(1)}$  ve  $C_p^{(2)}$  sadece  $p$ ' ye bağımlı pozitif sabitlerdir.

**İspat:** Her zaman olduğu gibi, Dirichlet çekirdeği  $D_m(t)$  şeklinde ifade edilecek. Şunu elde ederiz:

$$\sum_{k=n}^q \cos kt = D_q(t) - D_{n-1}(t) = \frac{\sin((q-n+1)t/2)\cos((q+n)t/2)}{\sin t/2} \quad (7.31)$$

$t \in (0, \pi/2)$  değerleri için  $\sin t > 2t/\pi$  bağıntısından yararlanabiliriz. Dolayısıyla:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^q \cos kt \right\|_p &\leq \left( 2 \int_0^\pi \left| \frac{\sin((q-n+1)t/2)}{\sin t/2} \right|^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \frac{\pi^p}{2^{2(p-1)}} (q-n+1)^{p-1} \int_0^{(q-n+1)\pi/2} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq C_p (q-n+1)^{(p-1)/p} \leq C_p^{(2)} (q-n)^{(p-1)/p} \end{aligned}$$

olur ve böylece (7.30)'daki ikinci eşitlik sağlanır.

Şimdi de alt sınırı bulalım.  $q > n$  olduğu için,  $\sin t \leq t$  eşitsizliği ve (7.31) bağıntısından yararlanarak, şunu buluruz:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^q \cos kt \right\|_p &\geq \left( 4(q-n+1)^{1-p} \int_0^{(q-n+1)\pi/2} \left| \frac{\sin t}{t} \right|^p \left| \cos \frac{q+n}{q-n+1} t \right|^p dt \right)^{1/p} \\ &\geq C_p (q-n)^{1-p/p} \left( \int_0^{\pi/2} \left| \cos \frac{q+n}{q-n+1} t \right|^p dt \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Bu doğrudan doğruya (7.30)'daki ilk eşitliği ifade etmektedir, çünkü, herhangi bir  $a > 1$  için,

$$\int_0^{\pi/2} |\cos at|^p dt = a^{-1} \int_0^{a\pi/2} |\cos t|^p dt \geq a^{-1} [a] \int_0^{\pi/2} \cos^p t dt > C'_p$$

olur. Burada  $[a]$ ,  $a$  sayısının integral kısmı,  $C'_p$  ise sadece  $p$ 'ye bağımlı olan bir sabittir. Önerme 7.3 kanıtlanmış olur.

(7.30) eşitsizliklerinde  $q = 2n$  koyduğumuzda, (7.29)'dan hareketle, şu sonucu elde ederiz:

$$\left\| f_n^{\bar{\psi}} \right\|_p \leq C_p n^{(p-1)/p} \quad (7.32)$$

Bunun anlamı,

$$f^*(t) = f_n^*(t) = C_p^{-1} \nu(n) n^{(1-p)/p} g_n(t)$$

fonksiyonunun,  $C_p$  (7.32) ile aynı olmak kaydıyla,  $L_p^{\bar{\psi}}$  kümesine ait olduğudur.

İncelenen durumda, Teorem 6.2' ye göre, elimizde  $L_p^{\bar{\psi}} \subset L_s$  bulunmaktadır. Dolayısıyla (5.7) ve (7.30) eşitsizliklerinden yararlanarak şunu elde ederiz:

$$E_n(f^*)_s \geq C_s \|\rho_n(f^*; x)\|_s$$

$$C_s \|\rho_n(f^*; x)\|_s = C_s C_p^{-1} \nu(n) n^{(1-p)/p} \|g_n(x)\|_s \geq C_{p,s} \nu(n) n^{p^{-1}-s^{-1}}$$

Bu (7.25) eşitsizliğini ispatlar.

(7.16) ve (7.25) bağıntılarını birleştirdiğimizde, şu teoreme ulaşırız:

**7.5 Teorem:**  $1 < p < s < \infty$ ,  $\alpha = p^{-1} - s^{-1}$  ve  $\bar{\psi} \in P_\alpha^{(n)} \cap P_B$  olsun. Bu durumda, herhangi bir  $n \in N$  için,

$$C_{p,s}^{(1)} \nu(n) n^\alpha \leq E_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq \varepsilon_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq C_{p,s}^{(2)} \nu(n) n^\alpha \quad (7.33)$$

olur. Özellikle  $\bar{\psi}(k)k^\alpha$  artmayan ve  $\bar{\psi} \in P_B$  ise,

$$C_{p,s}^{(1)} \bar{\psi}(n) n^\alpha \leq E_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq \varepsilon_n(L_p^{\bar{\psi}})_s \leq C_{p,s}^{(2)} \bar{\psi}(n) n^\alpha. \quad (7.33')$$

Burada  $C_{p,s}^{(1)}$  ve  $C_{p,s}^{(2)}$   $p$  ve  $s$ ' ye bağımlı pozitif sabitlerdir.

Daha önce belirtildiği gibi  $|\psi_i(k)|k^\alpha$ ,  $i = 1, 2$ , dizilerinin artmadığı herhangi bir  $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$  çifti  $P_\alpha^{(n)}$ ' e aittir. Aynı zamanda,  $\bar{\psi} \in P_B$  koşulunun bu türden tüm çiftlerce karşılanmasına gerek yoktur. (7.22) eşitsizliğinin örneğin  $\psi_1(k) = \psi_2(k) = \exp(-k)$ ,  $k \in N$  fonksiyonları için geçerli olmadığı kolayca görülebilir. Eğer kendimizi dışbükey dizilerle sınırlarsak, bu durumda  $\bar{\psi} \in P_B$  kapsamının geçerliliğini garantileyen,  $\psi_i(k)$  için yeterli koşulları gösterebiliriz.

Varsayalım ki,  $\psi_i(k)$ ,  $\nu = k$  sürekli argümanının bazı  $\psi_i(\nu)$  fonksiyonlarının değerleridir.

**7.4 Önerme:**  $\bar{\psi} \in \mathfrak{M}_0$  ve  $\lambda$  rastgele seçilmiş bir reel sayı olmak kaydıyla  $\psi_2 = \lambda\psi_1$  olsun. Bu durumda  $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in P_B$  olur.

**İspat:** (7.22) ve (7.23) eşitsizliklerinin önermenin belirttiği koşullar altında geçerliliklerini koruduklarını göstermek gereklidir.  $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$  olduğundan,

$$\bar{\psi}(k) = (\psi_1^2(k) + \lambda^2\psi_1^2(k))^{1/2} = \psi_1(k)\sqrt{1 + \lambda^2}$$

fonksiyonu konkavdır. Dolayısıyla, herhangi bir  $n \in N$  için,

$$\max_{n \leq k \leq 2n} \frac{v(n)}{\bar{\psi}(k)} = \frac{\bar{\psi}(n)}{\bar{\psi}(2n)} \leq K$$

olur. Yani, (7.22) eşitsizliği geçerlidir. (7.23) bağıntısının ispatı da oldukça kolaydır. Zira

$$v(n) = \psi_1(n)\sqrt{1 + \lambda^2} \quad \text{ve} \quad \bar{\psi}_2(k) = \psi_1^2(k)(1 + \lambda^2)$$

olduğundan elimizde

$$h_1(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-1, k > 2n, \\ \frac{\psi_1(n)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \frac{1}{\psi_1(k)}, & n \leq k \leq 2n \end{cases}$$

ve

$$h_2(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-1, k > 2n, \\ \frac{\lambda\psi_1(n)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \frac{1}{\psi_1(k)}, & n \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

bilgileri mevcuttur. Bundan dolayı, herhangi bir  $m \in N$  için, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2m}^{2^{m+1}} |h_1(k+1) - h_1(k)| &\leq h_1(n) + h_1(2n) + \sum_{k=n}^{2n} |h_1(k+1) - h_1(k)| \\ &= \frac{\psi_1(n)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left( \sum_{k=n}^{2n} \left| \frac{1}{\psi_1(k+1)} - \frac{1}{\psi_1(k)} \right| + 1 + \frac{2}{\psi_1(2n)} \right) \\ &\leq \frac{4\psi_1(n)}{\psi_1(2n)} \leq K. \end{aligned}$$

Aynı eşitsizliğin  $h_2(k)$  için de geçerli olduğu aşıkardır. Farz edelim,

$$\psi_1(t) = \psi(t)\cos\beta\pi/2, \quad \psi_2(t) = \psi(t)\sin\beta\pi/2$$

ve  $\psi \in \mathfrak{M}_0$  olsun. Bu durumda, Önerme 7.1' den hareketle,  $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in P_B$  olur. Ayrıca, eğer  $\psi(t) = t^{-r}$ ,  $r > 0$  ve, buna ek olarak,  $r \geq \alpha \geq 0$  ise,  $\bar{\psi} \in P_\alpha^{(n)}$ , yani, bu durumda,  $\bar{\psi} \in P_\alpha^{(n)} \cap P_B$  olur. Dolayısıyla Teorem 7.4 ve Teorem 7.5' ten şu sonuç çıkarılır:

**7.1 Sonuç:**  $1 < p, s < \infty$ ,  $\alpha = (p^{-1} - s^{-1})_+$  ve  $r \geq \alpha$  ise,

$$C_{p,s}^{(1)} n^{\alpha-r} \leq E_n(W_{\beta,p}^r)_s \leq \varepsilon_n(W_{\beta,p}^r)_s \leq C_{p,s}^2 n^{\alpha-r} \quad (7.34)$$

olur. Formülde  $C_{p,s}^{(1)}$  ve  $C_{p,s}^{(2)}$  yalnızca  $p$  ve  $s$  değerlerine bağlı pozitif sabitler,  $W_{\beta,p}^r$  ise:

$$\psi_1(k) = k^{(-r)}\cos\beta\pi/2 \quad \text{ve} \quad \psi_2(k) = k^{-r}\sin\beta\pi/2$$

için  $L_p^{\bar{\psi}}$  sınıfıdır.

Teorem 7.5 ve Önerme 7.4  $\psi(v)$ ' nin  $\mathfrak{M}_0$ ' dan rastgele bir fonksiyon olduğu durumlarda da, çarpım  $\psi(v)v^\alpha$  artmayan olmak kaydıyla,  $E_n(L_{\beta,p}^{\bar{\psi}})_s$  niceliklerinin tam derecesini verir. Ancak,  $\psi_1(k)$  ve  $\psi_2(k)$  fonksiyonları herhangi bir üstel fonksiyondan daha hızlı azalır, (7.33) eşitsizlikleri olanaksız olur

## 8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez toplam ilk giriş bölümü hariç altı bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölüm  $L_2$  uzayında genelleştirilmiş türev anlamında türevlenebilir fonksiyonlara trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemlerini içeren düz ve ters teoremler ve ispatları araştırılır. Üçüncü bölümde benzer problemlerin Tam Ortonormal Sistemler durumuna genellemesinin varlığı ile ilgili önermeler incelenmiştir. Dördüncü bölümde  $L_2$  uzayında Jackson eşitsizliğindeki sabitin iyileştirilemez olduğu araştırılır. Beşinci bölüm Marcinkiewicz, Riesz ve Hardy-Littlewood teoremleri hakkında bilgi verilir. Altıncı bölüm  $L^{\bar{\psi}}L_p$  fonksiyon sınıflarının gömülme özelliklerini içeren teoremler incelenir.

Yedinci bölümde  $L^{\bar{\psi}}L_p$  sınıfına ait fonksiyonlara trigonometrik polinomlarla yaklaşımın temel teoremleri araştırılır.

## 9. KAYNAKLAR

- [1] Korneichuk, N. P., *Extremal Problems in Approximation Theory* [in Russian], Nauka, Moscow, (1976).
- [2] Korneichuk, N. P., *Exact constants in Approximation Theory* [in Russian], Nauka, Moscow, (1987).
- [3] Zygmund, A., *Trigonometric Series* [Russian translation], Vol. 1, Mir, Moscow, (1965).
- [4] Zygmund, A., *Trigonometric Series* [Russian translation], Vol. 2, Mir, Moscow, (1965).
- [5] Stein, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, (1970).
- [6] Butzer, P. and Nessel, J. R., *Fourier Analysis and Approximation*, Basel, (1971).
- [7] Edwards, R., *Fourier Series* [Russian translation], Vol. 1, Mir, Moscow, (1985).
- [8] Edwards, R., *Fourier Series* [Russian translation], Vol. 2, Mir, Moscow, (1985).
- [9] Riesz, M., *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Z., 27, 218–244, (1927).
- [10] Bari, N. K., *Trigonometric Series* [in Russian], Fizmatgiz, Moscow, (1961).
- [11] Hardy, G., and Littlewood, J., *Some properties of fractional integrals*, IMZ, 27, 565–606, (1928).
- [12] Zygmund, A., *Trigonometric Series* [Russian translation], Gontı, Moscow, Leningrad, (1939).