

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**BAZI DÖNÜŞÜMLER ALTINDA SABİT KALAN EĞRİLERİN
GEOMETRİSİ**

MURAT TAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Özgür EGE
Doç. Dr. Hülya AYTİMUR

BALIKESİR, OCAK - 2025

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Bazı Dönüşümler Altında Sabit Kalan Eğrilerin Geometrisi**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Murat TAŞ

ÖZET

BAZI DÖNÜŞÜMLER ALTINDA SABİT KALAN EĞRİLERİN GEOMETRİSİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MURAT TAŞ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ŞABAN GÜVENÇ)

BALIKESİR, OCAK - 2025

Beş bölümden oluşan bu tezde, metrik uzaylar üzerinde sabit k -elips ve sabit k -Cassini ovali için varlık ve teklik teoremleri verilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar, hem çeşitli örnekler hem de aktivasyon fonksiyonlarına verilen uygulamalar ile desteklenmiştir.

Bu tezin ilk bölümü giriş kısmını oluşturmaktadır.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanılan temel tanımlar ve çeşitli örnekler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, metrik uzaylar üzerinde k -elips kavramı geometrik örnekleri ile tanıtılıp, sabit k -elips kavramı için iki farklı yardımcı fonksiyon ile çeşitli varlık ve teklik teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen bu teoremlerden özdeşlik dönüşümünü dışlayan bir koşul verilmiştir. Teorik sonuçlar, S-Şeklinde Doğrultulmuş Lineer Aktivasyon Ünite (S-Shaped Rectified Linear Activation Unit) aktivasyon fonksiyonuna verilen uygulama ile daha da kuvvetlendirilmiştir.

Dördüncü bölümde, metrik uzaylar üzerinde k -Cassini ovali kavramı şekilsel örnekler ile verilip, bu kavramın sabitliği için çeşitli varlık ve teklik teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar örnekler ile desteklenip, bu sonuçlardan özdeşlik dönüşümünü dışlayan teoremler verilmiştir. Son olarak da, Sızdırılmış rektifiye doğrusal ünite (Leakly rectified linear unit) aktivasyon fonksiyonuna bir uygulama elde edilmiştir.

Beşinci bölüm, sonuç ve öneriler bölümü olup, bu bölümde tezin kısa bir özeti verilip, bazı açık problemler önerilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Metrik uzay, k -elips, sabit k -elips, k -Cassini ovali, sabit k -Cassini ovali.

ABSTRACT

GEOMETRY OF CURVES WHICH ARE FIXED BY SOME TRANSFORMATIONS

MSC THESIS

MURAT TAŞ

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ŞABAN GÜVENÇ)

BALIKESİR, JANUARY - 2025

In this thesis, which consists of five chapters, existence and uniqueness theorems are presented for fixed k -ellipse and fixed k -Cassini oval in metric spaces. The obtained theoretical results are supported by various examples and applications to activation functions.

The first chapter of this thesis constitutes the introduction section.

The second chapter includes the fundamental definitions and various illustrative examples that support the thesis study.

In the third chapter, the concept of k -ellipse on metric spaces is introduced with geometric examples, and various existence and uniqueness theorems for the fixed k -ellipse concept are obtained using two different auxiliary functions. Additionally, a condition excluding the identity transformation is provided from the derived theorems. The theoretical results are further strengthened with an application to the S-Shaped Rectified Linear Activation Unit activation function.

In the fourth chapter, the concept of k -Cassini oval is presented with geometric examples on metric spaces, and various existence and uniqueness theorems for its fixed points are stated and proven. The obtained theoretical results are supported with examples, and theorems excluding the identity transformation are provided. Finally, an application to the Leaky Rectified Linear Unit activation function is presented.

The fifth chapter is the conclusion and recommendations section, where a brief summary of the thesis is provided, and some open problems are suggested.

KEYWORDS: Metric space, k -ellipse, fixed k -ellipse, k -Cassini oval, fixed k -Cassini oval.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	4
3. SABİT k -ELİPS KAVRAMI VE TEOREMLERİ	8
3.1 Sabit k -Elips Kavramı	8
3.2 Sabit k -Elips Varlık ve Teklik Teoremleri	11
3.3 Aktivasyon Fonksiyonlarına Bir Uygulama	21
4. SABİT k -CASSINI OVALİ KAVRAMI VE TEOREMLERİ	23
4.1 Sabit k -Cassini Ovali Kavramı	23
4.2 Sabit k -Cassini Ovali Varlık ve Teklik Teoremleri.....	29
4.3 Aktivasyon Fonksiyonlarına Bir Uygulama	38
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
6. KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,1)$ için 3-elips.....	8
Şekil 3.2: $x_1 = (3,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,4)$ için 3-elips.....	9
Şekil 3.3: $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,1)$ için 3-elips.....	9
Şekil 3.4: $x_1 = (5,0,0)$, $x_2 = (0,2,0)$, $x_3 = (0,0,1)$ için 3-elips.....	10
Şekil 3.5: $x_1 = (-1,0,0)$, $x_2 = (1,0,0)$, $x_3 = (0,1,0)$ için 3-elips.....	11
Şekil 3.6: $x_1 = (2,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,3)$, $x_4 = (-2,0)$ için 4-elips.....	11
Şekil 3.7: <i>SReLU</i> aktivasyon fonksiyonu.....	22
Şekil 4.1: C_1 3-Cassini ovali.....	23
Şekil 4.2: C_2 3-Cassini ovali.....	24
Şekil 4.3: $x_1 = (3,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,4)$ için 3-Cassini ovali.....	24
Şekil 4.5: $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,1)$ için 3-Cassini ovali.....	25
Şekil 4.6: $x_1 = (5,0,0)$, $x_2 = (0,2,0)$, $x_3 = (0,0,1)$ için 3-Cassini ovali.....	26
Şekil 4.7: $x_1 = (-1,0,0)$, $x_2 = (1,0,0)$, $x_3 = (0,1,0)$ için 3-Cassini ovali.....	27
Şekil 4.8: $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,2)$, $x_4 = (-3,1)$ için 4-Cassini ovali.....	27
Şekil 4.9: d_1 metriğine göre $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (-1,1)$, $x_3 = (-1,-1)$, $x_4 = (1,-1)$ için 4-Cassini ovali.....	28
Şekil 4.10: d_2 metriğine göre $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (-1,1)$, $x_3 = (-1,-1)$, $x_4 = (1,-1)$ için 4-Cassini ovali.....	28
Şekil 4.11: <i>LReLU</i> fonksiyonu.....	38

SEMBOL LİSTESİ

(X, d)	: Metrik uzay
$C_{x_0, r}$: Çember
$D_{x_0, r}$: Disk
\mathfrak{F}	: Geometrik figür
$E[x_1, \dots, x_k; r]$: k -elips
$C[x_1, \dots, x_k; r]$: k -Cassini ovali
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
$SReLU$: S-Shaped Rectified Linear Activation Unit
$LReLU$: Leakly Rectified Linear Unit

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca yaptığımız tüm çalışmalarda yardımını, desteğini ve anlayışını esirgemeyen, tüm bilgi ve tecrübelerini aktaran çok değerli hocam ve danışmanım Sayın Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ'e sonsuz teşekkürler sunarım.

Ayrıca, her konuda desteğini esirgemeyen değerli bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Ali GÜVEN'e teşekkür ederim.

Hayatım boyunca aldığım her kararda yanımda olan, beni destekleyen, sevgisini eksik etmeyen eşim Nihal TAŞ'a, dünyalar güzeli biricik kızım Tuana TAŞ'a ve doğacak olan yakışıklı oğlum Celal TAŞ'a en içten dileklerimiz ile teşekkür ederim.

Balıkesir, 2025

Murat TAŞ

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, özellikle analiz, topoloji ve geometri alanlarında matematiğin temel bir konusudur. Temel fikir basittir: Bir T fonksiyonunun sabit noktası, tanım kümesinde,

$$Tx = x$$

olan x noktasıdır.

Bu kavram, matematiğin çeşitli dallarında ve ekonomi, bilgisayar bilimi ve mühendislik gibi uygulamalı alanlarda derinlemesine uygulamalara sahiptir. Sabit nokta teorisinde birkaç önemli teorem, belirli koşullar altında sabit noktaların varlığını garanti eder. Bilinen bazı teoremler:

- Banach sabit nokta teoremi [1],
- Brouwer sabit nokta teoremi [2],
- Schauder sabit nokta teoremi [3],
- Kakutani sabit nokta teoremi [4].

Teorik çalışmaların yanı sıra, sabit nokta teorisinin uygulama alanları da önemlidir. Uygulama alanlarına bazı örnekler şunlardır:

- Matematiksel ekonomi,
- Nümerik metotlar,
- Dinamik sistemler,
- Bilgisayar bilimi,
- Kontrol teori,
- Topoloji ve geometri,
- Optimizasyon.

Sabit nokta teorisi, hem teorik hem de uygulamalı bağlamlarda geniş bir yelpazesi olan geniş ve güçlü bir matematiksel alandır. Diferansiyel denklemlerde çözüm varlığını kanıtlamaktan, ekonomi, bilgisayar bilimi ve kontrol teorisi gibi alanlara kadar sabit nokta sonuçları, birçok karmaşık problemin çözülmesinin temelini sağlar. Banach sabit nokta teoremi, Brouwer sabit nokta teoremi ve Kakutani sabit nokta teoremi gibi ana teoremler, oyun teorisinden sayısal analize kadar birçok alanda derin bir etki yaratmıştır.

Bir $T : X \rightarrow X$ fonksiyonunun birden fazla sabit noktaya sahip olduğu durumlarda, sabit noktalar kümesinin geometrik bir yorumu üzerine yapılan çalışmalar, son dönemlerde sabit nokta teorisine geometrik bir perspektif kazandırmıştır. Bu yaklaşım, ilk olarak sabit çember problemi altında keşfedilmiş [5] ve daha sonra sabit figür problemi çerçevesinde genişletilmiştir ([6] ve ilgili kaynaklar).

Sabit figür problemi altında farklı geometrik şekillerin invariyanlığının incelenmesi, sabit nokta teorisine geometri alanında önemli bir boyut kazandırmıştır. İncelenen her geometrik figür, yeni bir araştırma alanına ışık tutmaktadır. Örneğin, sabit elipsler, sabit hiperboller, sabit Cassini eğrileri ve sabit k -elipsler gibi kavramlar araştırılmış ve bu kavramların yardımıyla, sabit figürlerle ilgili farklı bakış açılarıyla yeni sonuçlar literatüre katkı sağlamıştır [6, 7-9].

Bir k -elips, düzlemdeki, k odaklarına olan mesafelerinin toplamı sabit bir d olan noktaların yer kümesidir. 1-elips bir çemberi, 2-elips ise klasik elipsi temsil eder. k -elipsler, elipslerin genellemesi olarak düşünülebilir. Bu özel eğriler, iki odaktan daha fazlasını mümkün kılar [10]. k -elipsler, n -elips [11], çok odaklı elips [12], polielips [13] ve egglipse [14] gibi birçok isimle anılmaktadır. Bu eğrilerin ilk olarak 1846 yılında İskoç matematikçi ve bilim insanı James Clerk Maxwell tarafından incelendiğini belirtmek önemlidir.

Bir Cassini ovali (veya Cassini eğrisi), iki sabit noktaya (odaklar) olan mesafelere dayalı özel bir denkleme göre tanımlanan bir düzlem eğrisidir. k -Cassini ovaler ailesi, bu kavramın geliştirilmiş bir versiyonudur ve eğrinin şeklini belirleyen k odak sayısına ve odaklara olan uzaklıkların çarpımı olan sabit bir r sayısına bağlıdır. Bir k -Cassini ovali, standart Cassini ovalinin bir genellemesi olarak anlaşılabilir. Özellikle, k -Cassini ovali, orijinal denklemin bir varyasyonu aracılığıyla metrik uzaylara taşınarak tanımlanabilir ve bu da k ve r değerlerine bağlı olarak şeklini sürekli olarak değiştiren bir eğriler ailesi ortaya çıkarır [15-17].

Bu tezde, sabit figür problemi ışığında öncelikle k -elips kavramı ile birlikte sabit k -elips için varlık ve teklik teoremleri örnekleri ile birlikte verilmiştir. Daha sonra benzer yaklaşımla, k -Cassini ovali kavramı yardımıyla sabit k -Cassini ovali için varlık ve teklik

teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, çeşitli örnekler ile desteklenip, hem sabit k -elips teoremlerinde hem de sabit k -Cassini ovali teoremlerinde özdeşlik fonksiyonunu dışlayan koşullar araştırılmıştır. Ana teoremleri ve özdeşliği dışlayan teoremin oluşturulmasında iki farklı yardımcı fonksiyona ihtiyaç duyulmuştur. Son olarak, elde edilen teorik sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için iki farklı aktivasyon fonksiyonuna uygulama elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak bazı temel kavram ve örneklere yer verilecektir.

Tanım 2.1. X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan d fonksiyonuna bir metrik denir:

$$(d1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(d2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri),}$$

$$(d3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği).}$$

Ayrıca, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [18-19].

Literatürde çok sık kullanılan bazı metrik uzay örnekleri ise aşağıdaki gibidir:

Örnek 2.2. $X = \mathbb{R}$ ve $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = |x - y|$$

biçiminde tanımlansın. Böylece, d fonksiyonu \mathbb{R} üzerinde bir metrik olup, bu metrik alışılmış metrik olarak adlandırılır. (\mathbb{R}, d) ikilisine de alışılmış metrik uzay denir [18-20].

Örnek 2.3. X boştan farklı bir küme ve $d_A : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için

$$d_A(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Böylece, d_A fonksiyonu X üzerinde bir metrik olup, bu metrik ayrık metrik olarak adlandırılır. (X, d_A) çiftine ayrık metrik uzay adı verilir [18-20].

Tanım 2.4. X boş olmayan bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon verilsin. Eğer

$$Tx = x$$

denklemine uyan bir x noktası varsa, bu nokta T fonksiyonunun sabit noktası olarak adlandırılır [19, 21]. Bir T fonksiyonunun tüm sabit noktalarının kümesi

$$Fix(T) = \{x \in X : Tx = x\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5. (\mathbb{R}, d) alışılmış metrik uzayını düşünelim. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Tx = x + 100$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, T fonksiyonunun hiçbir sabit noktası yoktur, yani

$$Fix(T) = \emptyset$$

elde edilir.

Örnek 2.6. (\mathbb{R}, d) alışılmış metrik uzayını düşünelim. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Tx = 3x + 90$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır ve bu sabit nokta $x = -45$ noktasıdır, yani

$$Fix(T) = \{-45\}$$

elde edilir.

Örnek 2.7. (\mathbb{R}, d) alışılmış metrik uzayı verilsin. Bu uzayda bir $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Tx = x^2 + 3x - 8$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, T fonksiyonunun iki farklı sabit noktası vardır ve bu sabit noktalar $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ noktalarıdır, yani

$$Fix(T) = \{-4, 2\}$$

elde edilir.

Örnek 2.8. (\mathbb{R}, d) alışılmış metrik uzayı ve bu uzayda bir $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Tx = \begin{cases} x & , x \geq 4 \\ 0 & , x < 4 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. Bu durumda, T fonksiyonunun sonsuz sayıda sabit noktası vardır ve bu sabit noktaların kümesi

$$Fix(T) = \{0\} \cup [4, \infty)$$

olarak elde edilir.

Uyarı 2.9. Yukarıdaki örnekler dikkate alındığında, verilen bir fonksiyonun sabit nokta sayısının değişkenlik gösterebildiği görülmektedir. Bu durumda, sabit noktanın varlığının ve tekliğinin araştırılmasının yanı sıra sabit nokta sayısı birden fazla olduğu durumda geometrisinin araştırılması da önem kazanmıştır. Bu amaç için, öncelikle aşağıdaki şekilde sabit çember kavramı tanımlı ve devamında da sabit disk kavramı ve daha genel bir tanım olarak sabit figür kavramı verilmiştir.

Tanım 2.10. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve

$$C_{x_0, r} = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

X kümesi üzerinde x_0 merkezli r yarıçaplı bir çember olsun. Eğer her $x \in C_{x_0, r}$ için

$$Tx = x$$

sağlanıyorsa, $C_{x_0, r}$ çemberine T fonksiyonunun bir sabit çemberi denir [5].

Örnek 2.11. (\mathbb{R}, d) alışılmış metrik uzayı ve bu uzayda bir $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \in \{-1, 1\} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \end{cases}$$

olacak şekilde verilsin. Bu fonksiyon $C_{0,1} = \{-1, 1\}$ birim çemberini sabit bırakır. Ayrıca, dikkat edilirse T fonksiyonu birim çemberin merkezini de sabit bırakır. O halde,

$$C_{0,1} = \{-1, 1\} \subseteq \text{Fix}(T) = \{-1, 0, 1\}$$

elde edilir.

Örnek 2.12. (\mathbb{R}, d) alışılmış metrik uzayı ve bu uzayda bir $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in (0, \infty) \\ -1 & , \quad x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda, T fonksiyonu $C_{0,1} = \{-1, 1\}$ birim çemberini sabit bırakır. Ayrıca, dikkat edilirse T fonksiyonu birim çemberin merkezini sabit bırakmaz ve T fonksiyonunun sabit çemberi tek değildir. Örneğin, $C_{3,1} = \{2, 4\}$ çemberi de bu fonksiyon altında sabit kalır. O halde,

$$C_{0,1} = \{-1, 1\} \subseteq \text{Fix}(T) = \{-1\} \cup (0, \infty)$$

ve

$$C_{3,1} = \{2, 4\} \subseteq \text{Fix}(T) = \{-1\} \cup (0, \infty)$$

elde edilir. Sonuç olarak, T fonksiyonunun sonsuz sayıda sabit çemberi vardır.

Tanım 2.13. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzayda, bir $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu ve X kümesi üzerindeki x_0 merkezli r yarıçaplı disk olan

$$D_{x_0, r} = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesi verilsin. Eğer her $x \in D_{x_0, r}$ için

$$Tx = x$$

sağlanıyorsa, $D_{x_0, r}$ çemberine T fonksiyonunun bir sabit diski denir [22].

Örnek 2.14. (\mathbb{R}, d) alışılmış metrik uzayı verilsin. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in [-2, 2] \\ \frac{2}{x} & , \quad x \in \mathbb{R} - [-2, 2] \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. T fonksiyonu $D_{0,2} = [-2, 2]$ diskini sabit bırakır. O halde,

$$D_{0,2} = [-2, 2] \subseteq \text{Fix}(T) = [-2, 2]$$

elde edilir. Ayrıca, dikkat edilirse T fonksiyonu yarıçapı ikiden küçük eşit olan her çemberi sabit bırakır ve dolayısıyla yarıçapın sıfır olduğu durumda çember sadece merkezden oluşan tek noktalı küme olacağı için diskin (çemberin) merkezini de sabit bırakır. Sonuç olarak, T fonksiyonu sonsuz sayıda sabit çembere ve diske sahiptir.

Tanım 2.15. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve \mathfrak{F} bir geometrik figür (çember, disk, elips, Cassini eğrisi, hiperbol, v.b.) olsun. Eğer

$$\mathfrak{F} \subseteq \text{Fix}(T)$$

ise bu durumda \mathfrak{F} geometrik figürüne T fonksiyonunun bir sabit figürü (sabit çember, sabit disk, sabit Cassini eğrisi, sabit hiperbol, v.b.) denir [6].

Uyarı 2.16. Örnek 2.11, Örnek 2.12 ve Örnek 2.14 aynı zamanda sabit figür için de örneklerdir.

3. SABİT k -ELİPS KAVRAMI VE TEOREMLERİ

Bu bölümde, metrik uzaylarda k -elips kavramı örnekleri ile tanıtılıp, yeni sabit figür teoremleri verilecektir.

3.1 Sabit k -Elips Kavramı

Tanım 3.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun. k -elips kavramı

$$E[x_1, \dots, x_k; r] = \left\{ x \in X : \sum_{i=1}^k d(x, x_i) = r \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [7].

Eğer Tanım 3.1.1 de $k=1$ alınırsa bir metrik uzay üzerinde çember kavramı, $k=2$ alınırsa bir metrik uzay üzerinde elips kavramı elde edilir [11].

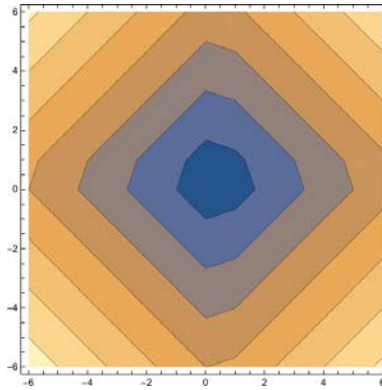
Örnek 3.1.2. (\mathbb{R}^2, d) uzayı her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(a, b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 1)$ için 3-elips aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 3.1):

$$E[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| + |y| + |x| + |y| + |x| + |y-1| = r \right\} [7].$$



Şekil 3.1. $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 1)$ için 3-elips.

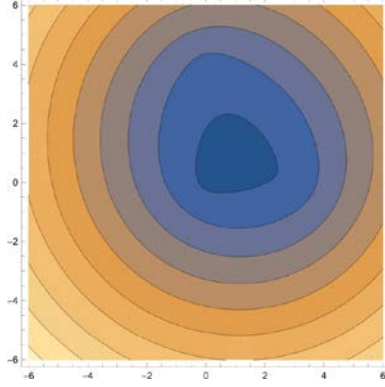
Örnek 3.1.3. (\mathbb{R}^2, d) uzayı her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (3,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,4)$ için 3-elips aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 3.2):

$$E[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = r \right\} [7].$$



Şekil 3.2. $x_1 = (3,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,4)$ için 3-elips.

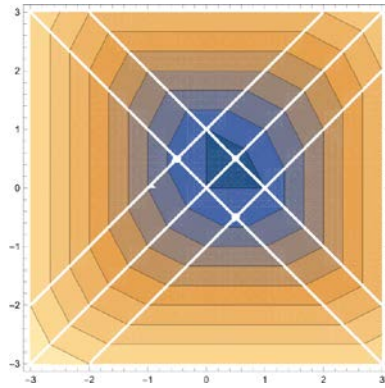
Örnek 3.1.4. (\mathbb{R}^2, d) uzayı her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(a, b) = \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,1)$ için 3-elips aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 3.3):

$$E[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max \{ |x-1|, |y| \} + \max \{ |x|, |y| \} + \max \{ |x|, |y-1| \} = r \right\} [7].$$



Şekil 3.3. $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,1)$ için 3-elips.

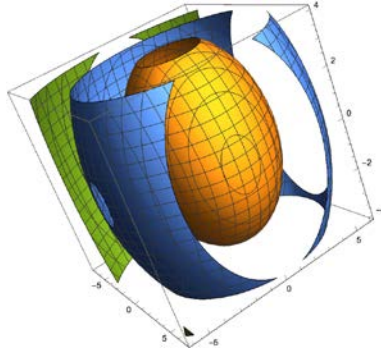
Örnek 3.1.5. (\mathbb{R}^3, d) uzayı her $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için

$$d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (5, 0, 0)$, $x_2 = (0, 2, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1)$ için 3-elips aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 3.4):

$$E[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ \begin{array}{l} p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \\ + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = r \end{array} \right\} [7].$$



Şekil 3.4. $x_1 = (5, 0, 0)$, $x_2 = (0, 2, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1)$ için 3-elips.

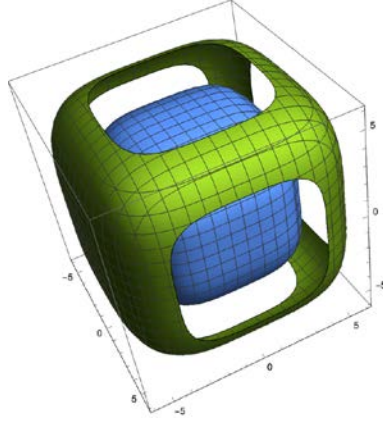
Örnek 3.1.6. (\mathbb{R}^3, d) uzayı her $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için

$$d(a, b) = \sqrt[4]{(x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4 + (z_1 - z_2)^4}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (-1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 0, 0)$, $x_3 = (0, 1, 0)$ için 3-elips aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 3.5):

$$E[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ \begin{array}{l} p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt[4]{(x+1)^4 + y^4 + z^4} + \sqrt[4]{(x-1)^4 + y^4 + z^4} \\ + \sqrt[4]{x^4 + (y-1)^4 + z^4} = r \end{array} \right\} [7].$$



Şekil 3.5. $x_1 = (-1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 0, 0)$, $x_3 = (0, 1, 0)$ için 3-elips.

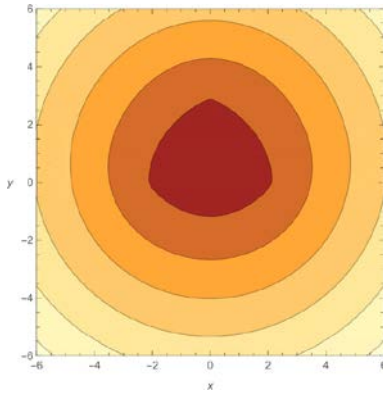
Örnek 3.1.7. (\mathbb{R}^2, d) uzayı her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (2, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 3)$, $x_4 = (-2, 0)$ için 4-elips aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 3.6):

$$E[x_1, x_2, x_3, x_4; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{aligned} &\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \\ &+ \sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = r \end{aligned} \right\} [7].$$



Şekil 3.6. $x_1 = (2, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 3)$, $x_4 = (-2, 0)$ için 4-elips.

3.2 Sabit k -Elips Varlık ve Teklik Teoremleri

Ana sonuçlara başlamadan önce aşağıdaki önermeyi verelim:

Önerme 3.2.1. (X, d) bir metrik uzay ve $E[x_1, \dots, x_k; r]$, $E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ iki k -elips olsun. Bu durumda, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -elipslerini sabit bırakacak şekilde $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu vardır [7].

İspat. $E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $E[x'_1, \dots, x'_k; r']$, X üzerinde herhangi iki k -elips olsun. Her $x \in X$ için α bir sabit olmak üzere, $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^k d(\alpha, x_i) \neq r$$

ve

$$\sum_{i=1}^k d(\alpha, x'_i) \neq r'$$

olacak şekilde

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in E \cup E' \\ \alpha & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

tanımlı olsun. Her $x \in E \cup E'$ için $x \in \text{Fix}(T)$ olduğundan T fonksiyonu E ve E' , k -elipslerini sabit bırakır. \square

Uyarı 3.2.2. [7]

1) Önerme 3.2.1, [5] numaralı kaynakta verilen Önerme 3.1 ve [9] numaralı kaynakta verilen Önerme 4 ü geneller.

2) Önerme 3.2.1 aşağıdaki şekilde daha genel bir hale getirilebilir:

“ (X, d) bir metrik uzay ve $E[x_1, \dots, x_k; r], \dots, E[x_1^n, \dots, x_k^n; r^n]$ herhangi k -elipsler olsun. Bu durumda, $E[x_1, \dots, x_k; r], \dots, E[x_1^n, \dots, x_k^n; r^n]$ k -elipslerini sabit bırakacak şekilde en az bir $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu vardır”.

Önerme 3.2.1 ve Uyarı 3.2.2 dikkate alındığında sabit k -elips için varlık ve teklik teoremlerinin araştırılması önem kazanmaktadır.

Teorem 3.2.3. (X, d) metrik uzayı ve üzerinde herhangi bir $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi verilsin. Her $x \in X$ için $\xi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^k d(x, x_i)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$(E_k 1)$ Her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için $d(x, Tx) \leq \xi(x) - \xi(Tx)$ dir,

$(E_k 2)$ Her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için $\sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) \geq r$ dir,

(E_k3) Her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$, $y \in X - E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve bazı $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ için $d(Tx, Ty) \leq h[d(Tx, x) + d(Ty, y)]$ dir,

koşullarını sağlayacak şekilde bir $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu var ise, bu durumda $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi dışında T fonksiyonunun başka bir sabit k -elipsi yoktur [7].

İspat. İlk olarak, T fonksiyonunun bir sabit k -elipsinin varlığını gösterelim. $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ olsun. (E_k1), (E_k2) koşulları ve $\xi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq \xi(x) - \xi(Tx) = \sum_{i=1}^k d(x, x_i) - \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) \\ &= r - \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) \leq r - r = 0, \end{aligned}$$

yani $x \in \text{Fix}(T)$ elde edilir. Böylece, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir sabit k -elipsidir.

Şimdi, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsinin tekliğini ispatlayalım. Aksine, $E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -elipsinin T fonksiyonu altında bir diğer sabit k -elips olduğunu varsayalım. $x \neq y$ olacak şekilde $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $y \in E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ olsun. (E_k3) koşulu kullanılarak

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \leq h[d(Tx, x) + d(Ty, y)] = h[d(x, x) + d(y, y)] = 0$$

elde edilir, bu ise bir çelişkidir. O halde $x = y$ olmalıdır. Sonuç olarak, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir tek sabit k -elipsidir. \square

Uyarı 3.2.4. [7]

1) Eğer $k = 1$ ise bu durumda $E[x_1; r] = C_{x_1, r}$ elde edilir ve böylece [5] numaralı kaynakta verilen Teorem 2.1 den $E[x_1; r]$, T nin bir sabit 1-elipsidir ya da $C_{x_1, r}$, T nin bir sabit çemberidir.

2) Eğer $k = 2$ ise bu durumda $E[x_1, x_2; r] = E_r(x_1, x_2)$ elde edilir ve böylece [9] numaralı kaynakta verilen Teorem 1 den $E[x_1, x_2; r]$, T nin bir sabit 2-elipsidir ya da $E_r(x_1, x_2)$, T nin bir sabit elipsidir.

3) (E_k3) koşulu $h \in (0, 1)$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq hd(x, y)$$

olacak şekilde uygun bir daralma koşulu ile değiştirilebilir. Bu daralma koşulu Banach tipinde bir daralma koşulu olarak düşünülebilir [1].

4) $(E_k 1)$ koşulu Caristi tipinde bir daralma koşulu [23] ve $(E_k 3)$ koşulu Kannan tipinde bir daralma koşulu [24] olarak düşünülebilir.

5) $(E_k 1)$ koşulu her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için Tx noktasının $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsinin dışında olmadığını ve $(E_k 2)$ koşulu da her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için Tx noktasının $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsinin içinde olmadığını garantiler. O halde,

$$T(E[x_1, \dots, x_k; r]) \subset E[x_1, \dots, x_k; r]$$

olduğu elde edilir.

Örnek 3.2.5. (X, d) bir metrik uzay, $E = E[x_1, \dots, x_k; r]$ herhangi bir k -elips ve z noktası her $x \in E$ ve $y \in X - E$ için

$$2d(x, z) < d(y, z)$$

eşitsizliğini sağlayan bir sabit olsun. Her $x \in X$ için $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in E \\ z & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T fonksiyonunun $(E_k 1)$, $(E_k 2)$ koşullarını sağladığı açıktır ve böylece $E = E[x_1, \dots, x_k; r]$, T fonksiyonunun bir sabit k -elipsidir. Şimdi, T fonksiyonunun $(E_k 3)$ koşulunu sağladığını gösterelim. $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $y \in X - E[x_1, \dots, x_k; r]$ olsun. $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) = d(x, z) \leq h[d(Tx, x) + d(Ty, y)] = h[d(x, x) + d(z, y)] = hd(z, y)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir tek sabit k -elipsidir [7].

Örnek 3.2.6. (X, d) bir metrik uzay, $E_1 = E[x_1, \dots, x_k; r]$, $E_2 = E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ herhangi iki k -elips ve z noktası

$$\sum_{i=1}^k d(z, x_i) \neq r$$

ve

$$\sum_{i=1}^k d(z, x'_i) \neq r'$$

olacak şekilde bir sabit olsun. Her $x \in X$ için $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in E_1 \cup E_2 \\ z & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T fonksiyonunun $x \in E_1$ ve $x \in E_2$ için $(E_k 1)$, $(E_k 2)$ koşullarını sağladığı açıktır ve böylece T fonksiyonu E_1 ve E_2 yi sabit bırakır. Fakat, T fonksiyonu $(E_k 3)$ koşulunu sağlamaz. Gerçekten, $x \neq y$ olmak üzere $x \in E_1$ ve $y \in E_2$ için

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \leq h[d(Tx, x) + d(Ty, y)] = 0$$

elde edilir, bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak, T fonksiyonunun sabit k -elipsi tek değildir [7].

Örnek 3.2.7. $X = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzay olsun.

$E[-1, 0, 1; 9] = \{x \in \mathbb{R} : d(x, -1) + d(x, 0) + d(x, 1) = 9\}$, 3-elipsini ele alalım ve her $x \in \mathbb{R}$ için $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \{-3, 3\} \\ -3 & , \quad x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, T fonksiyonu $(E_k 1)$ koşulunu sağlar fakat $(E_k 2)$ koşulunu sağlamaz. Böylece, $E[-1, 0, 1; 9]$ 3-elipsi T fonksiyonunun bir sabit 3-elipsi değildir.

Diğer taraftan, her $x \in \mathbb{R}$ için $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Sx = \begin{cases} 5 & , \quad x \in \{-3, 3\} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, S fonksiyonu $(E_k 2)$ koşulunu sağlar fakat $(E_k 1)$ koşulunu sağlamaz. Böylece, $E[-1, 0, 1; 9]$ 3-elipsi S fonksiyonunun bir sabit 3-elipsi değildir [7].

Teorem 3.2.8. (X, d) bir metrik uzay ve $E[x_1, \dots, x_k; r]$, X üzerinde herhangi bir k -elips olsun. Her $x \in X$ için $\xi : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Teorem 3.2.3 deki gibi tanımlansın. Eğer

$(E'_k 1)$ Her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için $d(x, Tx) \leq \xi(x) + \xi(Tx) - 2r$ dir,

$(E'_k 2)$ Her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için $\sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) \leq r$ dir,

$(E'_k 3)$ Her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$, $y \in X - E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve bazı $h \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için

$d(Tx, Ty) \leq h[d(Tx, y) + d(Ty, x)]$ dir,

koşullarını sağlayacak şekilde bir $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu var ise, bu durumda $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir tek sabit k -elipsidir [7].

İspat. İlk olarak, T fonksiyonunun bir sabit k -elipsinin varlığını gösterelim. $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ olsun. $(E'_k 1)$, $(E'_k 2)$ koşulları ve $\xi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq \xi(x) + \xi(Tx) - 2r = \sum_{i=1}^k d(x, x_i) + \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) - 2r \\ &= r + \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) - 2r = \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) - r \leq r - r = 0 \end{aligned}$$

yani $x \in \text{Fix}(T)$ elde edilir. Böylece, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir sabit k -elipsidir.

Şimdi, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsinin T fonksiyonunun bir tek sabit k -elipsi olduğunu gösterelim. Bunun için, tersine, $E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -elipsi T fonksiyonunun bir diğer sabit k -elipsi olsun. $x \neq y$ olacak şekilde $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $y \in E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ olsun. $(E'_k 3)$ koşulu kullanılarak

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \leq h[d(Tx, y) + d(Ty, x)] = h[d(x, y) + d(y, x)] = 2hd(x, y)$$

elde edilir, bu ise bir çelişkidir. O halde $x = y$ olmalıdır. Sonuç olarak, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir tek sabit k -elipsidir. \square

Uyarı 3.2.9. [7]

1) Eğer $k = 1$ ise bu durumda $E[x_1; r] = C_{x_1, r}$ elde edilir ve böylece [5] numaralı kaynakta verilen Teorem 2.2 den $E[x_1; r]$, T nin bir sabit 1-elipsidir ya da $C_{x_1, r}$, T nin bir sabit çemberidir.

2) Eğer $k = 2$ ise bu durumda Teorem 3.2.8 bir sabit elips teoremi olarak ele alınabilir.

3) $(E'_k 3)$ koşulunun tanımlanışı tek türlü değildir.

4) $(E'_k 3)$ koşulu Chatterjea tipinde bir daralma koşulu [25] olarak düşünülebilir.

5) $(E'_k 1)$ koşulu her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için Tx noktasının $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsinin içinde olmadığını ve $(E'_k 2)$ koşulu da her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için Tx noktasının $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsinin dışında olmadığını garantiler. O halde,

$$T(E[x_1, \dots, x_k; r]) \subset E[x_1, \dots, x_k; r]$$

olduğu elde edilir.

Örnek 3.2.10. $X = \{-4, -1, 0, 1, 2, 18\}$ alışılmış metrik uzay olsun. $E[-1, 0, 1, 2; 18]$ 4-elipsini

$$E[-1, 0, 1, 2; 18] = \{x \in X : |x+1| + |x| + |x-1| + |x-2| = 18\} = \{-4\}$$

olacak şekilde ele alalım. Her $x \in X$ için $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} -4 & , \quad x \in X - \{-1\} \\ 0 & , \quad x = -1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T fonksiyonunun $(E'_k 1)$, $(E'_k 2)$ koşullarını sağladığı açıktır ve böylece $E[-1, 0, 1, 2; 18]$, T fonksiyonunun bir sabit 4-elipsidir. Ayrıca, T fonksiyonu $h = \frac{4}{9}$ ile $(E'_k 3)$ koşulunu sağlar. Sonuç olarak, $E[-1, 0, 1, 2; 18]$, T fonksiyonunun bir tek sabit 4-elipsidir [7].

Teorem 3.2.11. (X, d) metrik uzayı ve üzerinde herhangi bir $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi verilsin. Her $x \in X$ için $\xi : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Teorem 3.2.3 deki gibi tanımlansın. Eğer $(E_k 1)$, $(E_k 3)$ ve

$$(E''_k 2) \text{ Her } x \in E[x_1, \dots, x_k; r] \text{ ve bazı } \mu \in [0, 1) \text{ için } \mu d(x, Tx) + \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) \geq r \text{ dir,}$$

koşullarını sağlayacak şekilde bir $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu var ise, bu durumda $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir tek sabit k -elipsidir [7].

İspat. Teorem 3.2.3 ün ispatında verilen yaklaşımlar kullanılarak, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsinin T fonksiyonunun bir tek sabit k -elipsi olduğu kolayca görülür. \square

Uyarı 3.2.12. [7]

1) Eğer $k = 1$ ise bu durumda $E[x_1; r] = C_{x_1, r}$ elde edilir ve böylece [5] numaralı kaynakta verilen Teorem 2.3 den $E[x_1; r]$, T nin bir sabit 1-elipsidir ya da $C_{x_1, r}$, T nin bir sabit çemberidir.

2) Eğer $k = 2$ ise bu durumda $E[x_1, x_2; r] = E_r(x_1, x_2)$ elde edilir ve böylece [9] numaralı kaynakta verilen Teorem 2 den $E[x_1, x_2; r]$, T nin bir sabit 2-elipsidir ya da $E_r(x_1, x_2)$, T nin bir sabit elipsidir.

3) $(E''_k 2)$ koşulu Tx noktasının $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsinin ya üzerinde ya dışında ya da içinde olduğunu gösterir.

Uyarı 3.2.13. Eğer Örnek 3.2.6 ele alınırsa, bu durumda T fonksiyonunun $(E'_k 1)$ ve $(E'_k 2)$ koşullarını sağladığı, fakat $(E'_k 3)$ koşulunu sağlamadığı açıktır. Ayrıca, Örnek 3.2.7 düşünüldüğünde, T fonksiyonunun $(E'_k 2)$ koşulunu sağladığı, fakat $(E'_k 1)$ koşulunu

sağlamadığı görülür. Benzer yaklaşımla, aynı örnek altında, her $x \in \mathbb{R}$ için $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Hx = \begin{cases} 10 & , \quad x \in \{-3, 3\} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, H fonksiyonu $(E'_k 1)$ koşulunu sağlar, fakat $(E'_k 2)$ koşulunu sağlamaz [7].

Aşağıdaki teoremdede, elde edilen sabit k -elips teoremlerinde kullanılan yardımcı fonksiyonun seçiminin tek türlü olmadığı görülür.

Teorem 3.2.14. (X, d) bir metrik uzay ve $E[x_1, \dots, x_k; r]$, X üzerinde herhangi bir k -elips olsun. Her $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ için $\psi: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$\psi(x) = \begin{cases} x-r & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer

$(E''_k 1)$ Her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için $\sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) = r$ dir,

$(E''_k 2)$ $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için $d(Tx, Ty) > r$ dir,

$(E''_k 3)$ Her $x, y \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \psi(d(x, Tx))$ dir,

$(E''_k 4)$ Her $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$, $y \in X - E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve bazı $h \in (0, 1)$ için $d(Tx, Ty) \leq h \max\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx), d(x, y)\}$ dir,

koşullarını sağlayacak şekilde bir $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu var ise, bu durumda $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun sabit k -elipsi olarak tektir [7].

İspat. T fonksiyonunun bir sabit k -elipsinin varlığını göstermek için, $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ herhangi bir nokta olsun. $(E''_k 1)$ koşulundan $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ için $Tx \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ olduğu söylenebilir. Şimdi $x \in \text{Fix}(T)$ olduğunu ispatlayalım. Tersine, $x \notin \text{Fix}(T)$, yani $x \neq Tx$ olsun. $(E''_k 2)$ koşulundan

$$d(Tx, T^2x) > r$$

elde edilir ve $(E''_k 3)$ koşulundan

$$d(Tx, T^2x) \leq d(x, Tx) - \psi(d(x, Tx)) = d(x, Tx) - d(x, Tx) + r = r$$

olur, bu ise bir çelişkidir. Böylece, $x \in \text{Fix}(T)$ dir ve $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir sabit k -elipsidir.

Son olarak, T fonksiyonunun sabit k -elipsinin tekliğini gösterelim. Tersine, $E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -elipsi T fonksiyonunun bir diğer sabit k -elipsi olsun. $x \neq y$ olacak şekilde $x \in E[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $y \in E[x'_1, \dots, x'_k; r']$ alalım. ($E_k'''4$) koşulundan

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= d(x, y) \leq h \max \{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx), d(x, y)\} \\ &= h \max \{0, 0, d(x, y), d(y, x), d(x, y)\} = hd(x, y) \end{aligned}$$

çelişkinine ulaşılır. O halde, $x = y$ olmalıdır. Dolayısıyla, $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi T fonksiyonunun bir tek sabit k -elipsidir. \square

Uyarı 3.2.15. [7]

- 1) Eğer $k = 1$ ise bu durumda $E[x_1; r] = C_{x_1, r}$ elde edilir ve böylece [26] numaralı kaynakta verilen Teorem 3 den $E[x_1; r]$, T nin bir sabit 1-elipsidir ya da $C_{x_1, r}$, T nin bir sabit çemberidir.
- 2) Eğer $k = 2$ ise Teorem 3.2.14 yeni bir sabit elips sonucu olarak ele alınabilir.
- 3) ($E_k'''4$) koşulu Ciric tipinde daralma koşulu [27] olarak düşünülebilir ve bu seçim tek türlü değildir.
- 4) Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.2.11 in tersi de doğrudur, fakat Teorem 3.2.14 için aynısı söylenemez.

Örnek 3.2.16. $X = \{-1, 0, 1, 4, 12\}$ alışılmış metrik uzay olsun.

$$E[-1, 0, 1; 12] = \{x \in X : |x+1| + |x| + |x-1| = 12\} = \{4\}$$

3-elipsi dikkate alınsın. Her $x \in X$ için $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$Tx = 4$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, T fonksiyonu Teorem 3.2.14 ün koşullarını sağlar ve sonuç olarak $E[-1, 0, 1; 12]$ 3-elipsi T fonksiyonunun bir tek sabit 3-elipsidir [7].

Örnek 3.2.17. $X = \{-2, -1\} \cup [0, \infty)$ alışılmış metrik uzay olsun.

$$E[-2, 0, 2; 21] = \{x \in X : |x+2| + |x| + |x-2| = 21\} = \{7\}$$

3-elipsi dikkate alınsın. $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in [0, \infty) \\ 0 & , \quad x \in \{-2, -1\} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda, T fonksiyonu (E_k^m1) , (E_k^m2) ve (E_k^m3) koşullarını sağlar. Böylece, $E[-2,0,2;21]$ 3-elipsi T fonksiyonunun bir sabit 3-elipsidir. Fakat, T fonksiyonu $x \in [0, \infty) - \{7\}$ için (E_k^m4) koşulunu sağlamaz. Gerçekten,

$$d(7, x) \leq h \max \{0, 0, d(7, x), d(x, 7), d(x, 7)\} = hd(7, x)$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $E[-2,0,2;21]$ 3-elipsi T fonksiyonunun bir tek sabit 3-elipsi değildir. Örneğin, $E[-1,0,1;21]$ 3-elipsi T fonksiyonunun bir diğer sabit 3-elipsidir [7].

Örnek 3.2.18. $X = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzay olsun.

$$E[-2,0,2;27] = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x| + |x-2| = 27\} = \{-9, 9\}$$

3-elipsi dikkate alınsın. Her $x \in \mathbb{R}$ için $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in \{-9, 9\} \\ \frac{1}{x+1} & , \quad x \in \mathbb{R} - \{-9, 9\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, T fonksiyonu $E[-2,0,2;27]$ 3-elipsini sabit bırakır, fakat (E_k^m2) koşulunu sağlamaz [7].

Aşağıdaki teorem, her $x \in X$ için

$$I_x(x) = x$$

şeklinde tanımlı $I_x : X \rightarrow X$ özdeşlik fonksiyonunu Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.8, Teorem 3.2.11 ve Teorem 3.2.14 den dışlayan daralma koşulunu verir.

Teorem 3.2.19. (X, d) metrik uzayı ve üzerinde herhangi bir $E[x_1, \dots, x_k; r]$ k -elipsi verilsin. Her $x \in X$ için $\xi : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Teorem 3.2.3 deki gibi tanımlansın.

$$(I_k) \quad d(x, Tx) \leq \frac{|\xi(x) - \xi(Tx)|}{k+1}$$

olmak üzere T fonksiyonunun her $x \in X$ için (I_k) eşitsizliğini sağlaması için gerek ve yeter şart T nin özdeşlik dönüşümü olmasıdır [7].

İspat. T fonksiyonunun her $x \in X$ için (I_k) koşulunu sağladığını kabul edelim ve $x \notin \text{Fix}(T)$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki durumlar ele alınabilir:

Durum 1: $\xi(x) \geq \xi(Tx)$ ise

$$\begin{aligned}
d(x, Tx) &\leq \frac{|\xi(x) - \xi(Tx)|}{k+1} = \frac{\xi(x) - \xi(Tx)}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1} \left[\sum_{i=1}^k d(x, x_i) - \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) \right] \\
&\leq \frac{1}{k+1} \left[kd(x, Tx) + \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) - \sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) \right] \\
&= \frac{k}{k+1} d(x, Tx) < d(x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir.

Durum 2: $\xi(x) \leq \xi(Tx)$ ise

$$\begin{aligned}
d(x, Tx) &\leq \frac{|\xi(x) - \xi(Tx)|}{k+1} = \frac{\xi(Tx) - \xi(x)}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1} \left[\sum_{i=1}^k d(Tx, x_i) - \sum_{i=1}^k d(x, x_i) \right] \\
&\leq \frac{1}{k+1} \left[kd(Tx, x) + \sum_{i=1}^k d(x, x_i) - \sum_{i=1}^k d(x, x_i) \right] \\
&= \frac{k}{k+1} d(x, Tx) < d(x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. O halde her $x \in X$ için $Tx = x$ olmalıdır ve $T = I_x$ olur. Terside, kolayca görülür. \square

Uyarı 3.2.20. Eğer $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu Teorem 3.2.3 (sırasıyla, Teorem 3.2.8, Teorem 3.2.11 ve Teorem 3.2.14) koşullarını sağlıyor fakat (I_k) koşulunu sağlamıyorsa T fonksiyonu özdeşlik dönüşümü olamaz [7].

3.3 Aktivasyon Fonksiyonlarına Bir Uygulama

Bu bölümde, [7] numaralı kaynakta verilen, sabit k -elips kavramı kullanılarak aktivasyon fonksiyonlarına verilen bir uygulamayı araştırıyoruz. Neden bir aktivasyon fonksiyonu seçiyoruz? Aktivasyon fonksiyonları, bir nöronun aktive edilip edilmeyeceğine karar verdikleri için sinir ağlarında yaygın olarak kullanılır ve önemli bir rol oynar. Literatürde aktivasyon fonksiyonlarına ilişkin pek çok örnek bulunmaktadır. Örneğin, bu aktivasyon fonksiyonlarından biri t_l, a_l, t_r, a_r parametreler olmak üzere

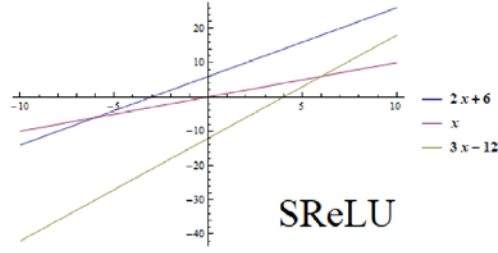
$$SReLU(x) = \begin{cases} t_l + a_l(x - t_l) & , \quad x \leq t_l \\ x & , \quad t_l < x < t_r \\ t_r + a_r(x - t_r) & , \quad x \geq t_r \end{cases}$$

şeklinde tanımlı S-Şeklinde Doğrultulmuş Lineer Aktivasyon Ünitesi ($SReLU$) aktivasyon fonksiyonudur [28].

$X = \mathbb{R}$, $t_l = -6$, $t_r = 6$, $a_l = 2$ ve $a_r = 3$ alalım. Bu durumda, her $x \in \mathbb{R}$ için $SReLU$ fonksiyonu

$$SReLU(x) = \begin{cases} 2x+6 & , \quad x \leq -6 \\ x & , \quad -6 < x < 6 \\ 3x-12 & , \quad x \geq 6 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır (Şekil 3.7).



Şekil 3.7. $SReLU$ aktivasyon fonksiyonu.

Bu $SReLU$ aktivasyon fonksiyonu \mathbb{R} de en az bir k -elips sabit bırakır.

$$E[-1, 0, 1; 15] = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| + |x| + |x-1| = 15\} = \{-5, 5\},$$

$$E[-2, 0, 2; 6] = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x| + |x-2| = 6\} = \{-2, 2\}$$

ve

$$E[-\alpha, 0, \alpha; 9] = \{x \in \mathbb{R} : |x+\alpha| + |x| + |x-\alpha| = 9, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{-3, 3\}$$

3-elipslerini dikkate alalım. Bu 3-elipsler $SReLU$ aktivasyon fonksiyonunun sabit 3-elipsleridir. Ayrıca, $SReLU$ aktivasyon fonksiyonu $(E_k 1)$ ve $(E_k 2)$ (sırasıyla, $(E'_k 1)$ ve $(E'_k 2)$, $(E''_k 2)$) koşullarını sağlar. Böylece, $SReLU$ aktivasyon fonksiyonunun en az bir sabit k -elipsi vardır. Fakat, $SReLU$ aktivasyon fonksiyonu $(E_k 3)$ ve $(E'_k 3)$ koşullarını sağlamaz. O halde, $SReLU$ aktivasyon fonksiyonunun sabit k -elips sayısı tek değildir, yani bu fonksiyonunun sonsuz sayıda sabit k -elipsi vardır. Bu durum, sabit nokta sayısındaki artıştan dolayı sinir ağlarında önemli bir noktaya sahiptir.

4. SABİT k -CASSINI OVALİ KAVRAMI VE TEOREMLERİ

Bu bölümde, metrik uzaylarda k -Cassini ovali kavramı örnekleri ile tanıtılıp, yeni sabit figür teoremleri verilecektir.

4.1 Sabit k -Cassini Ovali Kavramı

Tanım 4.1.1. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, k -Cassini ovali kavramı

$$C[x_1, \dots, x_k; r] = \left\{ x \in X : \prod_{i=1}^k d(x, x_i) = r \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [29].

Eğer Tanım 4.1.1 de $k = 1$ alınırsa bir metrik uzay üzerinde çember kavramı, $k = 2$ alınırsa bir metrik uzay üzerinde Cassini ovali kavramı elde edilir.

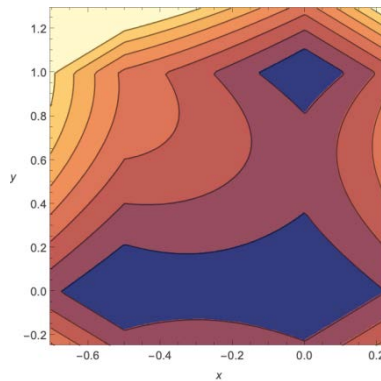
Örnek 4.1.2. (\mathbb{R}^2, d) uzayı her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(a, b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 1)$ için 3-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.1):

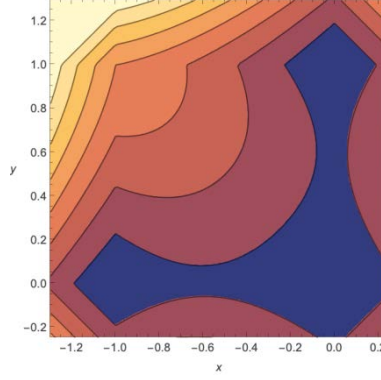
$$C_1[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x + 1/2| + |y|)(|x| + |y|)(|x| + |y - 1|) = r \right\}.$$



Şekil 4.1. C_1 3-Cassini ovali.

$x_1 = (-1, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 1)$ için 3-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.2):

$$C_2[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x + 1| + |y|)(|x| + |y|)(|x| + |y - 1|) = r \right\} [29].$$



Şekil 4.2. C_2 3-Cassini ovali.

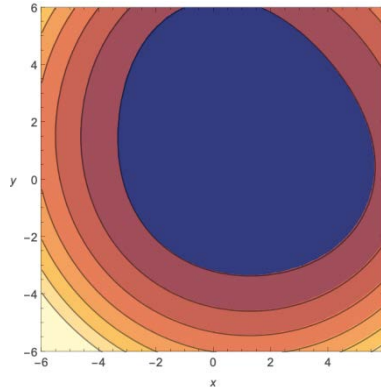
Örnek 4.1.3. (\mathbb{R}^2, d) uzayı her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (3, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 4)$ için 3-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.3):

$$C[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = r \right\} [29].$$



Şekil 4.3. $x_1 = (3, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 4)$ için 3-Cassini ovali.

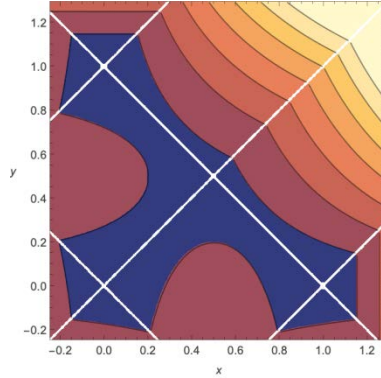
Örnek 4.1.4. (\mathbb{R}^2, d) uzayı her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(a, b) = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 1)$ için 3-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.4):

$$C[x_1, x_2, x_3; r] = \{p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-1|, |y|\} \cdot \max\{|x|, |y|\} \cdot \max\{|x|, |y-1|\} = r\} \quad [29].$$



Şekil 4.4. $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,0)$, $x_3 = (0,1)$ için 3-Cassini ovali.

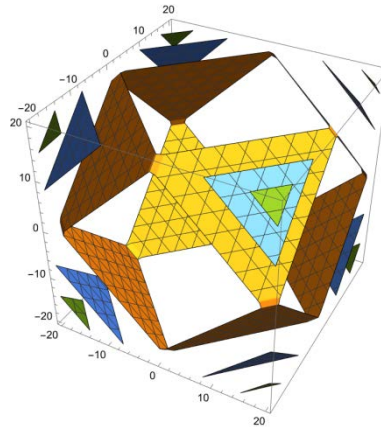
Örnek 4.1.5. (\mathbb{R}^3, d) uzayı her $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için

$$d(a, b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (0,0,1)$ için 3-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.5):

$$C[x_1, x_2, x_3; r] = \{p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (|x-1| + |y| + |z|) \cdot (|x| + |y-1| + |z|) \cdot (|x| + |y| + |z-1|) = r\} \quad [29].$$



Şekil 4.5. $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (0,0,1)$ için 3-Cassini ovali.

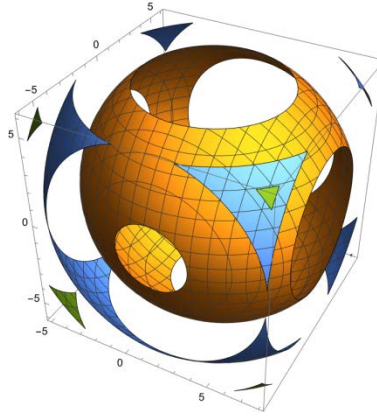
Örnek 4.1.6. (\mathbb{R}^3, d) uzayı her $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için

$$d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (5,0,0)$, $x_2 = (0,2,0)$, $x_3 = (0,0,1)$ için 3-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.6):

$$C[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ \begin{array}{l} p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = r \end{array} \right\} [29].$$



Şekil 4.6. $x_1 = (5,0,0)$, $x_2 = (0,2,0)$, $x_3 = (0,0,1)$ için 3-Cassini ovali.

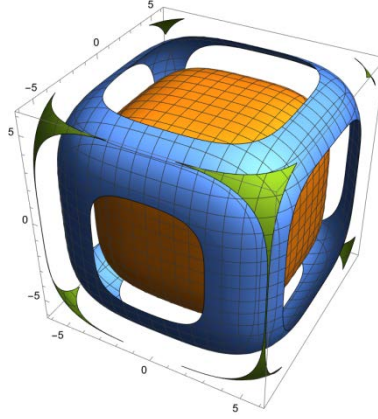
Örnek 4.1.7. (\mathbb{R}^3, d) uzayı her $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için

$$d(a, b) = \sqrt[4]{(x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4 + (z_1 - z_2)^4}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (-1,0,0)$, $x_2 = (1,0,0)$, $x_3 = (0,1,0)$ için 3-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.7):

$$C[x_1, x_2, x_3; r] = \left\{ \begin{array}{l} p(x, y) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt[4]{(x+1)^4 + y^4 + z^4} \cdot \sqrt[4]{(x-1)^4 + y^4 + z^4} \\ \sqrt[4]{x^4 + (y-1)^4 + z^4} = r \end{array} \right\} [29].$$



Şekil 4.7. $x_1 = (-1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 0, 0)$, $x_3 = (0, 1, 0)$ için 3-Cassini ovali.

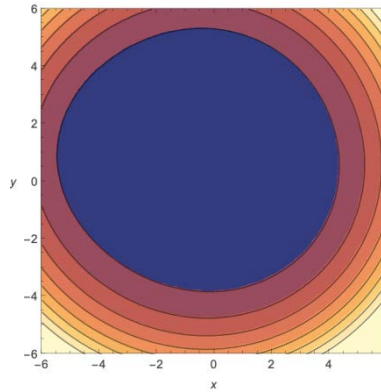
Örnek 4.1.8. (\mathbb{R}^2, d) uzayı her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun.

$x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 2)$, $x_4 = (-3, 1)$ için 4-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.8):

$$C[x_1, x_2, x_3, x_4; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \cdot \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = r \right\} [29].$$



Şekil 4.8. $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (0, 2)$, $x_4 = (-3, 1)$ için 4-Cassini ovali.

Örnek 4.1.9. (\mathbb{R}^2, d_1) ve (\mathbb{R}^2, d_2) uzayları her $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_1(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

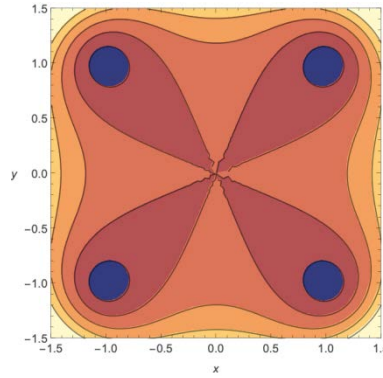
ve

$$d_2(a,b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlı $d_1, d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ile birer metrik uzay olsun.

d_1 metriğine göre $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (-1,1)$, $x_3 = (-1,-1)$, $x_4 = (1,-1)$ için 4-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.9):

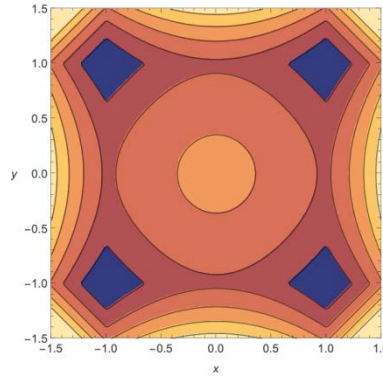
$$C_1[x_1, x_2, x_3, x_4; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{aligned} &\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \\ &\cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = r \end{aligned} \right\} \quad [29].$$



Şekil 4.9. d_1 metriğine göre $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (-1,1)$, $x_3 = (-1,-1)$, $x_4 = (1,-1)$ için 4-Cassini ovali.

d_2 metriğine göre $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (-1,1)$, $x_3 = (-1,-1)$, $x_4 = (1,-1)$ için 4-Cassini ovali aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.10):

$$C_2[x_1, x_2, x_3, x_4; r] = \left\{ p(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{aligned} &(|x-1| + |y-1|) \cdot (|x+1| + |y-1|) \\ &\cdot (|x+1| + |y+1|) \cdot (|x-1| + |y+1|) = r \end{aligned} \right\} \quad [29].$$



Şekil 4.10. d_2 metriğine göre $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (-1,1)$, $x_3 = (-1,-1)$, $x_4 = (1,-1)$ için 4-Cassini ovali.

4.2 Sabit k -Cassini Ovalı Varlık ve Teklik Teoremleri

Ana sonuçlara başlamadan önce aşağıdaki önermeyi verelim:

Önerme 4.2.1. (X, d) bir metrik uzay ve $C[x_1, \dots, x_k; r]$, $C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ iki k -Cassini ovali olsun. Bu durumda, $C = C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $C' = C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -Cassini ovalerinin her ikisini de sabit bırakan $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu her zaman bulunabilir [29].

İspat. $C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $C[x'_1, \dots, x'_k; r']$, X üzerinde herhangi iki k -Cassini ovali olsun. Her $x \in X$ için α bir sabit olmak üzere, $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$\prod_{i=1}^k d(\alpha, x_i) \neq r$$

ve

$$\prod_{i=1}^k d(\alpha, x'_i) \neq r'$$

olacak şekilde

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in C \cup C' \\ \alpha & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

tanımlansın. Her $x \in C \cup C'$ için $x \in \text{Fix}(T)$ olduğundan T fonksiyonu C ve C' , k -Cassini ovalerini sabit bırakır. \square

Önerme 4.2.1 aşağıdaki şekilde daha genel bir hale getirilebilir:

Önerme 4.2.2. (X, d) bir metrik uzay ve $C[x_1, \dots, x_k; r], \dots, C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ herhangi k -Cassini ovaleri olsun. Bu durumda, $C[x_1, \dots, x_k; r], \dots, C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -Cassini ovalerini sabit bırakacak şekilde en az bir $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu vardır [29].

İspat. Önerme 4.2.1 in ispatına benzer şekilde elde edilir. \square

Önerme 4.2.1 ve Önerme 4.2.2 dikkate alındığında sabit k -Cassini ovali için varlık ve teklik teoremlerinin araştırılması önem kazanmaktadır.

Teorem 4.2.3. (X, d) metrik uzayında $C[x_1, \dots, x_k; r]$ bir k -Cassini ovali olsun. Her $x \in X$ için $\mu: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu

$$\mu(x) = \prod_{i=1}^k d(x, x_i)$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer

$(C_k 1)$ Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ için $d(x, Tx) \leq \mu(x) - \mu(Tx)$ dir,

$(C_k 2)$ Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ için $\prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) \geq r$ dir,

(C_k3) Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$, $y \in X - C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve bazı $h \in (0,1)$ için $d(Tx, Ty) \leq hd(x, y)$ dir,

koşullarını sağlayacak şekilde bir $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu var ise, bu durumda $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir [29].

İspat. İlk olarak, T fonksiyonunun bir sabit k -Cassini ovalinin varlığını gösterelim. $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ olsun. (C_k1) , (C_k2) koşulları ve $\mu: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq \mu(x) - \mu(Tx) = \prod_{i=1}^k d(x, x_i) - \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) \\ &= r - \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) \leq r - r = 0 \end{aligned}$$

yani $x \in \text{Fix}(T)$ elde edilir. Böylece, $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir sabit k -Cassini ovalidir.

Şimdi, $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovalinin tekliğini ispatlayalım. Aksine, $C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir diğer sabit k -Cassini ovali olsun. $x \neq y$ olacak şekilde $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $y \in C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ olsun. (C_k3) koşulu kullanılarak

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \leq hd(x, y)$$

elde edilir, bu ise bir çelişkidir. O halde $x = y$ olmalıdır. Sonuç olarak, $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir. \square

Uyarı 4.2.4. [29]

1) Theorem 4.2.3, [5] numaralı kaynakta verilen sabit çember teoremini ve [8] numaralı kaynakta verilen sabit Cassini eğrisi sonucunu geneller.

2) (C_k1) koşulu her $x \in C = C[x_1, \dots, x_k; r]$ için Tx noktasının C k -Cassini ovalinin dışında olmadığını ve (C_k2) koşulu da her $x \in C$ için Tx noktasının C k -Cassini ovalinin içinde olmadığını garantiler. O halde,

$$T(C) \subset C$$

olduğu elde edilir.

3) (C_k3) koşulu Banach tipinde daralma koşulu [1] olarak düşünülebilir.

Örnek 4.2.5. (X, d) bir metrik uzay, $C_1 = C[x_1, \dots, x_k; r]$, $C_2 = C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ herhangi iki k -Cassini ovali ve z noktası

$$\prod_{i=1}^k d(z, x_i) \neq r$$

ve

$$\prod_{i=1}^k d(z, x'_i) \neq r'$$

özelliklerini sağlayan belli bir nokta olsun. Her $x \in X$ için $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in C_1 \cup C_2 \\ z & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T fonksiyonu $(C_k 1)$, $(C_k 2)$ koşullarını sağlar, fakat $(C_k 3)$ koşulunu sağlamaz. Sonuç olarak, T fonksiyonu C_1, C_2 k -Cassini ovalerini sabit bırakır, yani, sabit k -Cassini ovali tek değildir [29].

Örnek 4.2.6. (X, d) bir metrik uzay, $C = C[x_1, \dots, x_k; r]$ herhangi bir k -Cassini ovali ve z noktası her $x \in C$ ve $y \in X - C$ için

$$3d(x, z) < d(y, z)$$

eşitsizliğini sağlayan bir sabit olsun. Her $x \in X$ için $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in C \\ z & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T fonksiyonu $(C_k 1)$, $(C_k 2)$ ve $(C_k 3)$ koşullarını sağlar. Böylece, C k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir [29].

Teorem 4.2.7. (X, d) metrik uzayı ve üzerinde bir $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali verilsin. Her $x \in X$ için $\mu : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu Teorem 4.2.3 deki gibi tanımlansın. Eğer

$(C'_k 1)$ Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ için $d(x, Tx) \leq \mu(x) + \mu(Tx) - 2r$ dir,

$(C'_k 2)$ Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ için $\prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) \leq r$ dir,

$(C'_k 3)$ Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$, $y \in X - C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve bazı $h \in [0, 1)$ için $d(Tx, Ty) \leq h \max\{d(x, y), d(Tx, x), d(Ty, y)\}$ dir,

koşullarını sağlayacak şekilde bir $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu var ise, bu durumda $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir [29].

İspat. İlk olarak, T fonksiyonunun bir sabit k -Cassini ovalinin varlığını gösterelim. $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ olsun. (C'_k1) , (C'_k2) koşulları ve $\mu: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq \mu(x) + \mu(Tx) - 2r = \prod_{i=1}^k d(x, x_i) + \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) - 2r \\ &= r + \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) - 2r = \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) - r \leq r - r = 0, \end{aligned}$$

yani $x \in \text{Fix}(T)$ elde edilir. Böylece, $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir sabit k -Cassini ovalidir.

Şimdi, $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali için teklik ispatı yapalım. Aksine, $C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir diğer sabit k -Cassini ovali olsun. $x \neq y$ olacak şekilde $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $y \in C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ olsun. (C'_k3) koşulu kullanılarak

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \leq h \max\{d(x, y), d(Tx, x), d(Ty, y)\} = hd(x, y)$$

elde edilir, bu ise bir çelişkidir. O halde $x = y$ olmalıdır. Sonuç olarak, $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir. \square

Uyarı 4.2.8. [29]

1) Theorem 4.2.7, [5] numaralı kaynakta verilen sabit çember teoremini ve [8] numaralı kaynakta verilen sabit Cassini eğrisi sonucunu geneller.

2) (C'_k1) koşulu her $x \in C = C[x_1, \dots, x_k; r]$ için Tx noktasının C k -Cassini ovalinin içinde olmadığını ve (C'_k2) koşulu da her $x \in C$ için Tx noktasının C k -Cassini ovalinin dışında olmadığını garantiler. O halde,

$$T(C) \subset C$$

olduğu elde edilir.

Örnek 4.2.9. (X, d) bir metrik uzay, $C = C[x_1, \dots, x_k; r]$, X üzerinde herhangi bir k -Cassini oval ve α sayısı her $x \in C$ ve $y \in X - C$ için

$$d(y, \alpha) < d(x, y)$$

ve

$$2d(x, \alpha) < d(x, y)$$

eşitsizliklerini sağlayan bir sabit olsun. Her $x \in X$ için $T: X \rightarrow X$ fonksiyonunu

$$Tx = \begin{cases} x & , \quad x \in C \\ \alpha & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T fonksiyonu Teorem 4.2.7 nin koşullarını sağlar ve sonuç olarak C, T fonksiyonunun bir tek k -Cassini ovalidir [29].

Teorem 4.2.10. (X, d) metrik uzayı ve üzerinde bir $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali verilsin. Her $x \in X$ için $\mu: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu Teorem 4.2.3 deki gibi tanımlansın. Eğer $(C_k 1), (C_k 3)$ ve

$(C_k'' 2)$ Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve bazı $\beta \in [0, 1)$ için $\beta d(x, Tx) + \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) \geq r$ dir,

koşullarını sağlayacak şekilde bir $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu var ise, bu durumda $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir [29].

İspat. İlk olarak, T fonksiyonunun bir sabit k -Cassini ovalinin varlığını gösterelim. $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ olsun. Hipotez kullanılarak,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq \mu(x) - \mu(Tx) = \prod_{i=1}^k d(x, x_i) - \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) \\ &= r - \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) \leq r - r + \beta d(x, Tx) = \beta d(x, Tx) \end{aligned}$$

elde edilir ve $\beta \in [0, 1)$ olduğundan $Tx = x$ olmalıdır. Böylece, $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir sabit k -Cassini ovalidir.

Teorem 4.2.3 de kullanılan benzer yaklaşımlar ile $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovali olduğu kolayca görülür. \square

Uyarı 4.2.11. [29]

1) Theorem 4.2.7, [5] numaralı kaynakta verilen sabit çember teoremini ve [8] numaralı kaynakta verilen sabit Cassini eğrisi sonucunu geneller.

2) $(C_k'' 2)$ koşulu Tx noktasının $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovalinin ya üzerinde ya dışında ya da içinde olduğunu gösterir.

3) Eğer Örnek 4.2.6 yı ele alırsak, Teorem 4.2.10 un koşullarının sağlandığı görülür.

Teorem 4.2.12. (X, d) metrik uzayı ve üzerinde bir $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali verilsin. Her $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ için $\phi: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\phi(x) = \begin{cases} x - r & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$(C_k''' 1)$ Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ için $\prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) = r$ dir,

$(C_k''' 2)$ $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ için $d(Tx, Ty) > r$ dir,

($C_k'''3$) Her $x, y \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi(d(x, Tx))$ dir,

($C_k'''4$) Her $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $y \in X - C[x_1, \dots, x_k; r]$ için

$$d(Tx, Ty) < \max \{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx), d(x, y)\}$$

dir,

koşullarını sağlayacak şekilde bir $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu var ise, bu durumda $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir [29].

İspat. T fonksiyonunun bir sabit k -Cassini ovalinin varlığını göstermek için, $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ herhangi bir nokta olsun. ($C_k'''1$) koşulundan $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ için $Tx \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ olur. Şimdi $x \in \text{Fix}(T)$ olduğunu ispatlayalım. Tersine, $x \notin \text{Fix}(T)$, yani $x \neq Tx$ olsun. ($C_k'''2$) koşulundan

$$d(Tx, T^2x) > r$$

elde edilir ve ($C_k'''3$) koşulundan

$$d(Tx, T^2x) \leq d(x, Tx) - \phi(d(x, Tx)) = d(x, Tx) - d(x, Tx) + r = r$$

çelişkinine ulaşılır. O halde, $x \in \text{Fix}(T)$ dir ve $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir sabit k -Cassini ovalidir.

Son olarak, T fonksiyonunun sabit k -Cassini ovalinin tekliğini gösterelim. Tersine, $C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir diğer sabit k -Cassini ovali olsun.

$x \neq y$ olacak şekilde $x \in C[x_1, \dots, x_k; r]$ ve $y \in C[x'_1, \dots, x'_k; r']$ alalım. ($C_k'''4$) koşulundan

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= d(x, y) < \max \{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx), d(x, y)\} \\ &= \max \{0, 0, d(x, y), d(y, x), d(x, y)\} = d(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir, bu ise bir çelişkidir. $x = y$ olmalıdır. Sonuç olarak, $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir. \square

Uyarı 4.2.13. [29]

1) Teorem 4.2.12, [26] numaralı kaynakta verilen sabit çember teoremini geneller.

2) ($C_k'''4$) koşulu Rhoades tipinde daralma koşulu [30] olarak düşünülebilir.

Örnek 4.2.14. $X = \{-1, 0, 1, 5, 120, 150\}$ alışılmış metrik uzay olsun.

$$C[-1, 0, 1; 120] = \{x \in X : |x+1| \cdot |x| \cdot |x-1| = 120\} = \{5\}$$

3-Cassini ovali dikkate alınsın. Her $x \in X$ için $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu

$$Tx = 5$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, T fonksiyonu Teorem 4.2.12 nin koşullarını sağlar ve sonuç olarak $C[-1,0,1;120]$ 3-Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit 3-Cassini ovalidir.

Aşağıdaki teorem, her $x \in X$ için

$$I_x(x) = x$$

şeklinde tanımlı $I_x : X \rightarrow X$ özdeşlik fonksiyonunu Teorem 4.2.3, Teorem 4.2.7, Teorem 4.2.10 ve Teorem 4.2.12 den dışlayan bir daralma koşulunu verir [29].

Teorem 4.2.15. (X, d) metrik uzayı ve üzerinde bir $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali verilsin. Her $x \in X$ için $\mu : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu Teorem 4.2.3 deki gibi tanımlansın. Her $x \in X$ için T fonksiyonunun

$$(I_{ex}) \quad d(x, Tx) \leq \frac{k}{k+1} \frac{|\mu(x) - \mu(Tx)|}{\max\{D_1, D_2\}}$$

eşitsizliğini sağlaması için gerek ve yeter şart $T = I_x$ olmasıdır. Burada

$$D_1 = \sum_{m=0}^{k-2} \left\{ [d(x, Tx)]^{k-m-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} [d(Tx, x_{i_1}) \cdot d(Tx, x_{i_2}) \dots d(Tx, x_{i_m})] \right\} \\ + \sum_{\substack{m=k-1 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k}} [d(Tx, x_{i_1}) \cdot d(Tx, x_{i_2}) \dots d(Tx, x_{i_m})]$$

ve

$$D_2 = \sum_{m=0}^{k-2} \left\{ [d(x, Tx)]^{k-m-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} [d(x, x_{i_1}) \cdot d(x, x_{i_2}) \dots d(x, x_{i_m})] \right\} \\ + \sum_{\substack{m=k-1 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k}} [d(x, x_{i_1}) \cdot d(x, x_{i_2}) \dots d(x, x_{i_m})]$$

dir [29].

İspat. T fonksiyonu (I_{ex}) koşulunu sağlasın ve bazı $x \in X$ için $x \neq Tx$ olsun. İlk olarak, x_1, x_2, \dots, x_k farklı noktalar ve $m = k-1$ için D_1 ve D_2 nin son kısımlarının en az bir pozitif terime sahip olduğunu ele alarak $D_1 > 0$ ve $D_2 > 0$ olduğuna dikkat edelim. Bu durumda, sıfıra bölme hatasına yol açmayan $\max\{D_1, D_2\} > 0$ değerine ulaşılır. $a \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için, aşağıdaki terimler doğrudan sol tarafa şu şekilde dağıtılabilir:

$$\prod_{i=1}^k (a + b_i) = \sum_{m=0}^{k-1} a^{k-m} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} b_{i_1} \cdot b_{i_2} \dots b_{i_m} + \prod_{i=1}^k b_i. \quad (4.1)$$

Burada, b_i lerin en fazla bir tanesi 0 ve diğerleri $b_i > 0$ olsun. Aşağıdaki iki durumu incelediğimizde sayı seçimlerimiz netleşecektir:

(i) Eğer $\mu(x) \geq \mu(Tx)$ ise bu durumda (I_{ex}) koşulu kullanılarak, (4.1) eşitliğinde $a = d(x, Tx)$, $b_i = d(Tx, x_i)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} (k+1)d(x, Tx) &\leq k \frac{\mu(x) - \mu(Tx)}{\max\{D_1, D_2\}} \leq k \frac{\prod_{i=1}^k d(x, x_i) - \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i)}{D_1} \\ &\leq k \frac{\prod_{i=1}^k [d(x, Tx) + d(Tx, x_i)] - \prod_{i=1}^k d(Tx, x_i)}{D_1} \\ &= k \frac{d(x, Tx) \cdot D_1}{D_1} = k \cdot d(x, Tx) \end{aligned}$$

çelişkisine ulaşılır. D_1 ve D_2 ifadelerinde $[0^0]$ belirsiz formdan kaçınmak için son terim, toplamda ayrı bir terim olarak ifade edilmiştir.

(ii) Eğer $\mu(x) \leq \mu(Tx)$ ise bu durumda (I_{ex}) koşulu kullanılarak, (4.1) eşitliğinde $a = d(Tx, x)$, $b_i = d(x, x_i)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} (k+1)d(x, Tx) &\leq k \frac{\mu(Tx) - \mu(x)}{\max\{D_1, D_2\}} \leq k \frac{\prod_{i=1}^k d(Tx, x_i) - \prod_{i=1}^k d(x, x_i)}{D_2} \\ &\leq k \frac{\prod_{i=1}^k [d(Tx, x) + d(x, x_i)] - \prod_{i=1}^k d(x, x_i)}{D_2} \\ &= k \frac{d(x, Tx) \cdot D_2}{D_2} = k \cdot d(x, Tx) \end{aligned}$$

elde edilir, bu ise bir çelişkidir. O halde her $x \in X$ için $x = Tx$, yani $T = I_X$ olmalıdır. İspatın diğer yönü açıktır. \square

Uyarı 4.2.16. Eğer $T : X \rightarrow X$ fonksiyonu Teorem 4.2.3 (sırasıyla, Teorem 4.2.7, Teorem 4.2.10 ve Teorem 4.2.12) koşullarını sağlıyor fakat (I_{ex}) koşulunu sağlamıyorsa T fonksiyonu özdeşlik dönüşümü olamaz [29].

Sonuç olarak aşağıdaki son teorem ifade edilebilir:

Teorem 4.2.17. (X, d) metrik uzayı ve üzerinde bir $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali verilsin. Her $x \in X$ için $\mu : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu Teorem 4.2.3 deki gibi tanımlansın. Eğer T fonksiyonu Teorem 4.2.3 (sırasıyla, Teorem 4.2.7, Teorem 4.2.10 ve Teorem 4.2.12) koşullarını ve ek olarak en az bir $x \in X$ için

$$d(x, Tx) > \frac{k}{k+1} \frac{|\mu(x) - \mu(Tx)|}{\max\{D_1, D_2\}}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda T bir özdeşlik dönüşümü olamaz ve $C[x_1, \dots, x_k; r]$ k -Cassini ovali T fonksiyonunun bir tek sabit k -Cassini ovalidir [29].

$k = 2$ için k -Cassini ovali klasik Cassini eğrisine dönüşür ve sonuçlarımız Cassini eğrisi için de geçerli olur. $k = 2$ için aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.18. (X, d) bir metrik uzay ve $C[x_1, x_2; r]$, X üzerinde herhangi bir Cassini eğrisi olsun. Her $x \in X$ için $\mu: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\mu(x) = d(x, x_1)d(x, x_2)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer T fonksiyonu Teorem 4.2.3 (sırasıyla, Teorem 4.2.7, Teorem 4.2.10 ve Teorem 4.2.12) koşullarını ve ek olarak en az bir $x \in X$ için

$$d(x, Tx) > \frac{2}{3} \frac{|\mu(x) - \mu(Tx)|}{\max\{D_1, D_2\}}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda T bir özdeşlik dönüşümü olamaz ve $C[x_1, x_2; r]$ Cassini eğrisi T fonksiyonunun bir tek sabit Cassini eğrisidir. Burada

$$D_1 = d(x, Tx) + [d(Tx, x_1) + d(Tx, x_2)]$$

ve

$$D_2 = d(x, Tx) + [d(x, x_1) + d(x, x_2)]$$

dir.

Eğer 3-Cassini ovali ele alınırsa,

$$D_1 = d(x, Tx)^2 + d(x, Tx) \cdot [d(Tx, x_1) + d(Tx, x_2) + d(Tx, x_3)] \\ + [d(Tx, x_1) \cdot d(Tx, x_2) + d(Tx, x_1) \cdot d(Tx, x_3) + d(Tx, x_2) \cdot d(Tx, x_3)]$$

ve

$$D_2 = d(x, Tx)^2 + d(x, Tx) \cdot [d(x, x_1) + d(x, x_2) + d(x, x_3)] \\ + [d(x, x_1) \cdot d(x, x_2) + d(x, x_1) \cdot d(x, x_3) + d(x, x_2) \cdot d(x, x_3)]$$

elde edilir [29].

Gerisi Teorem 4.2.15 teki genel formüllerden üretilir. Açıklığa kavuşturmak için, $m = 0$ için, çarpımsal birim 1 olduğundan, teoremlerimizde

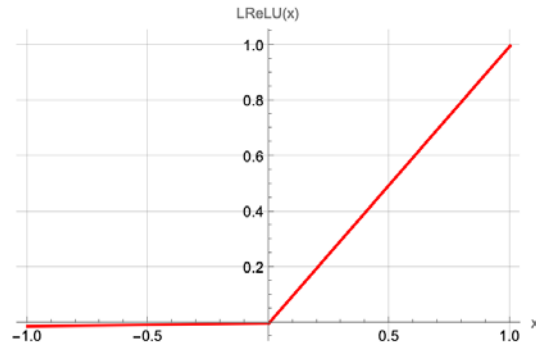
$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} b_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdot \dots \cdot b_{i_m}$$

ifadesi 1 e eşit olacak şekilde yorumlanabilir. $k=1$ için geriye doğru yinelenirse ve $D_1 = D_2 = 1$ alınrsa, sonuçların sabit çember özdeşlik dışlama teoremini de içerdiği görülür.

4.3 Aktivasyon Fonksiyonlarına Bir Uygulama

Bu bölümde, elde edilen sonuçların önemini göstermek için sızdırılmış rektifiye doğrusal ünite aktivasyon fonksiyonuna bir uygulaması verilecektir. Sızdırılmış rektifiye doğrusal ünite aktivasyon fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Şekil 4.11) [31]:

$$LReLU(x) = \begin{cases} 0,01x & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases} .$$



Şekil 4.11. $LReLU$ fonksiyonu.

$X = \mathbb{R}$ alışılmış metrik uzayını alalım. Bu durumda

$$C[1,3,5;15] = \{x \in X : |x-1| \cdot |x-3| \cdot |x-5| = 15\} = \{0,6\}$$

3-Cassini ovali elde edilir.

$LReLU$ fonksiyonu $k=3$, $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$, $r=15$ ve $\mu(x) = |x-1| \cdot |x-3| \cdot |x-5|$ için Teorem 4.2.3 ün (C_k1) ve (C_k2) koşullarını sağlar. Böylece, $C[1,3,5;15]$ 3-Cassini ovali $T = LReLU$ fonksiyonunun bir sabit 3-Cassini ovalidir. Fakat, $T = LReLU$ fonksiyonu (C_k3) koşulunu sağlamaz, bu durumda $C[1,3,5;15]$ 3-Cassini ovali tek değildir.

$LReLU \neq I_X$ olduğu açıktır. Gerçekten, $x = -1 \in X = \mathbb{R}$ için, (I_{ex}) koşulu geçersizdir. $T(-1) = -0,01$ olduğundan

$$d(-1, T(-1)) = |-1 - (-0.01)| = 0,99,$$

$$\mu(x) = \mu(-1) = |-1-1| \cdot |-1-3| \cdot |-1-5| = 48,$$

$$\mu(Tx) = \mu(-0,01) = |-0,01-1| \cdot |-0,01-3| \cdot |-0,01-5| = 15,185501,$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= d(x, Tx)^2 + d(x, Tx) \cdot [d(Tx, x_1) + d(Tx, x_2) + d(Tx, x_3)] \\
&+ [d(Tx, x_1) \cdot d(Tx, x_2) + d(Tx, x_1) \cdot d(Tx, x_3) + d(Tx, x_2) \cdot d(Tx, x_3)] \\
&= (0,99)^2 + (0,99) \cdot [(1,01) + (3,01) + (5,01)] \\
&+ [(1,01) \cdot (3,01) + (1,01) \cdot (5,01) + (3,01) \cdot (5,01)] \\
&= 33,1001,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= d(x, Tx)^2 + d(x, Tx) \cdot [d(x, x_1) + d(x, x_2) + d(x, x_3)] \\
&+ [d(x, x_1) \cdot d(x, x_2) + d(x, x_1) \cdot d(x, x_3) + d(x, x_2) \cdot d(x, x_3)] \\
&= (0,99)^2 + (0,99) \cdot [2 + 4 + 6] + [2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6] \\
&= 56,8601
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{k}{k+1} \frac{|\mu(x) - \mu(Tx)|}{\max\{D_1, D_2\}} = \frac{3}{4} \frac{|48 - 15,185501|}{56,8601} \approx 0,432832$$

elde edilir. Sonuç olarak, $x = -1$ için

$$d(x, Tx) = 0,99 > 0,432832 \approx \frac{k}{k+1} \frac{|\mu(x) - \mu(Tx)|}{\max\{D_1, D_2\}}$$

elde edilir. O halde, $LReLU \neq I_x$ olur [29].

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sabit nokta teorisi, son zamanların en yaygın çalışılan araştırma konularından biridir. Sabit nokta sayısının bir veya birden fazla olma durumu da sabit nokta teorisini farklı alanlara da yönlendirmektedir. Bu tez çalışmasında, sabit nokta sayısının birden fazla olduğu durumlar için çalışılan eğrilerin sabit kalması geometrik bir yaklaşım olarak çalışılmıştır. Bunun için, ilk olarak sabit k -elips kavramı ve sabit k -elips için varlık ve teklik teoremleri verilmiştir. Daha sonra, tez kapsamında elde edilmiş olan k -Cassini ovali kavramı ile birlikte sabit k -Cassini ovali için çeşitli varlık ve teklik teoremleri gerekli örnekler ile ifade ve ispat edilmiştir. Yapılan teorilerin önemini vurgulayan özdeşlik dönüşümünü dışlama teoremi de tez kapsamında elde edilmiştir. Aktivasyon fonksiyonlarına verilen uygulamalar ile de yapılan teorik çalışmaların uygulanabilirliği görülmüştür. Bu tez çalışmasında verilen sonuçların, farklı yaklaşımlar ile genelleştirilmesi ve benzer yaklaşımla çeşitli genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerine uygulanması daha sonraki çalışmalar için açık problem olarak yer almaktadır. Sonuç olarak, bu tez çalışmasının yeni çalışmalara da ışık tutması beklenmektedir.

6. KAYNAKLAR

- [1] S. Banach, “Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals”, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 3, pp. 133-181, 1922.
- [2] L. E. J. Brouwer, “Über die topologie der produktraume [on the topology of product spaces]”, *Mathematische Annalen*, vol. 71, pp. 91-115, 1911.
- [3] J. Schauder, “Zur theorie der topologischen abbildungen [on the theory of topological mappings]”, *Mathematische Annalen*, vol. 102, pp. 169-188, 1930.
- [4] S. Kakutani, “A generalization of Brouwer’s fixed-point theorem”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 8, no. 3, pp. 457-459, 1941.
- [5] N. Y. Özgür and N. Taş, “Some fixed-circle theorems on metric space”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 42, no. 4, pp. 1433-1449, 2019.
- [6] N. Taş and N. Özgür, “New fixed-figure results on metric spaces”, In: P. Debnath, H. M. Srivastava, P. Kumam, B. Hazarika, B. (eds) *Fixed Point Theory and Fractional Calculus, Forum for Interdisciplinary Mathematics, Springer, Singapore*, 2022.
- [7] H. Aytimur, Ş. Güvenç and N. Taş, “New fixed figure results with the notion of k -ellipse”, *Mathematica Moravica*, vol. 27, no. 1, pp. 37-52, 2023.
- [8] G. Z. Erçınar, “Some geometric properties of fixed points”, *Ph.D. Thesis, Eskişehir Osmangazi University*, 2020.
- [9] M. Joshi, A. Tomar and S. K. Padaliya, “Fixed point to fixed ellipse in metric spaces and discontinuous activation function”, *Applied Mathematics. E-Notes*, vol. 21, pp. 225-237, 2021.
- [10] J. Nie, P.A. Parrilo and B. Sturmfels, “Semidefinite representation of the k -ellipse”, *Algorithms in Algebraic Geometry, I.M.A. Volumes in Mathematics and its Applications, Springer, New York*, vol. 146, pp. 117-132, 2008.
- [11] J. Sekino, “ n -ellipses and the minimum distance sum problem”, *American Mathematical Monthly*, vol. 106, no. 3, pp. 193-202, 1999.
- [12] P. Erdos and I. Vincze, István, “On the approximation of convex, closed plane curves by multifocal ellipses”, *Journal of Applied Probability*, vol. 19, pp. 89-96, 1982.
- [13] Z. A. Melzaka and J. S. Forsyth, “Polyconics 1. polyellipses and optimization”, *Quarterly of Applied Mathematics*, pp. 239-255, 1977.
- [14] P. V. Sahadevan, “The theory of eggellipse—a new curve with three focal points”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 18, pp. 29-39, 1987.
- [15] W. Blaschke, “Geometrie der gewebe”, *Springer-Verlag*, 1923.
- [16] H. Brezis, “Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations”, *Springer*, 2010.

- [17] G. Cassini, “Nova methodus pro solvenda propositio in curvis”, *Acta Eruditorum*, 1690.
- [18] S. Willard, “General topology”, *Addison-Wesley Publishing Company*, 1970.
- [19] S. Lipschutz, “General topology”, *Schaum’s Outlines*, 1965.
- [20] S. A. Kılıç and M. Erdem, “Metrik uzaylar ve topoloji”, *Vipaş A. Ş.*, 1999.
- [21] J. R. Munkres, “Topology”, *Prentice Hall*, 2000.
- [22] N. Y. Özgür, “Fixed-disc results via simulation functions”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, pp. 2794-2805, 2019.
- [23] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 215, pp. 241-251, 1976.
- [24] R. Kannan, “Some results on fixed points”, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, vol. 62, pp. 71-76, 1968.
- [25] S. K. Chatterjea, “Fixed point theorems”, *Comptes rendus de l’Academie bulgare des Sciences*, vol. 25, pp. 727-730, 1972.
- [26] N. Özgür and N. Taş, “Some fixed-circle theorems and discontinuity at fixed circle”, *AIP Conference Proceedings*, vol. 1926, 2018.
- [27] Lj. B. Ćirić, “Generalized contractions and fixed-point theorems”, *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 12, no. 26, pp. 19-26, 1971.
- [28] X. Jin, C. Xu, J. Feng, Y. Wei, J. Xiong and S. Yan, “Deep learning with s -shaped rectified linear activation units”, *In Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, vol. 30, no. 1, 2016.
- [29] Ş. Güvenç and M. Taş, “Fixed k -Cassini oval results on metric spaces”, *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, vol. 15, no. 1, pp. 45-63, 2025.
- [30] B. E. Rhoades, “A comparison of various definitions of contractive mappings”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 266, pp. 257-290, 1977.
- [31] A. L. Maas, A. Y. Hannun and A. Y. Ng, “Rectifier nonlinearities improve neural network acoustic models”, *Proceedings of International Conference on Machine Learning*, vol. 30, no. 1, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Murat TAŞ

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Lisans	Ege Üniversitesi / Matematik	2010
Lise	Adem Tolunay Anadolu Lisesi	2003

Yayın Listesi

[1] Ş. Güvenç and M. Taş, “Fixed k -Cassini oval results on metric spaces”, *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, vol. 15, no. 1, pp. 45-63, 2025. [**Tezden türetilmiştir**]