

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA $h\beta$ -LOKAL FONKSİYONLAR

ABDULHAMİT MAMAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ (Tez Danışmanı)
: Prof. Dr. Fırat ATEŞ
: Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN

BALIKESİR, Haziran-2025

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**İdeal Topolojik Uzaylarda $h\beta$ -Lokal Fonksiyonlar**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Abdulhamit MAMAN

ÖZET

**İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA $h\beta$ -LOKAL FONKSİYONLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ABDULHAMİT MAMAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AHU AÇIKGÖZ)
BALIKESİR, HAZİRAN-2025**

Bu tez çalışmasında, Fadhil Abbas'ın ortaya koyduğu h -açık küme tanımından yararlanılarak $h\beta$ -lokal fonksiyon kavramı oluşturulmuş ve kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır.

Araştırma toplamda beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, tezin giriş kısmına yer verilmiş ve çalışmanın temelini oluşturan kavramlara kısaca değinilmiştir.

İkinci bölümde, araştırma süresince kullanılacak olan ideal topolojik uzaylara ilişkin temel bilgiler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise, tarafımızdan tanımlanan $h\beta$ -açık küme kavramı ortaya konmuş; bu kavramın h -açık ve yarı h -açık kümelerle karşılaştırılması yapılmış ve konu örneklerle desteklenmiştir.

Dördüncü bölümde, $h\beta$ -komşuluk ve $h\beta$ -açık komşuluk kavramları açıklanmış; ayrıca $h\beta$ -lokal fonksiyon kavramı ayrıntılı biçimde incelenmiş ve örnek uygulamalarla somutlaştırılmıştır. Bunun yanı sıra, $Cl^*h\beta$ operatörü tanıtılarak, ilgili teoremler örneklerle birlikte sunulmuştur.

Beşinci bölümde ise, ζ_g - $h\beta$ -kapalı küme ile z_s^*g - $h\beta$ -kapalı küme kavramları tanımlanmış; ayrıca z_s^*g -kapalı kümelerle karşılaştırılması gereken ters örnekler aracılığıyla bu kavramların farkları ve özellikleri açıklığa kavuşturulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: yerel fonksiyon, ideal tabanlı topolojik modeller, $h\beta$ -yaklaşımli yerel fonksiyon, $Cl^*_{h\beta}$ işlemi, ζ_g - $h\beta$ -kapalı küme, ζ_s^*g - $h\beta$ -kapalı küme

ABSTRACT

**$h\beta$ -LOCAL FUNCTIONS IN TOPOLOGICAL SPACES
MSC THESIS ABDULHAMİT MAMAN
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**

**MATHEMATICS EDUCATION
(SUPERVISOR: PROF. DR. AHU AÇIKGÖZ)
BALIKESİR, JUNE - 2025**

This thesis introduces and systematically investigates the concept of the $h\beta$ -local function, drawing upon the definition of h -open sets proposed by Fadhil Abbas.

The thesis is divided into five chapters.

Chapter One provides an introduction to the study, outlining key concepts that serve as the theoretical foundation for the research.

Chapter Two presents the core notions of ideal topological spaces, which are utilized throughout the thesis.

In Chapter Three, the author defines $h\beta$ -open sets and offers a comparative discussion with h -open and semi h -open sets, illustrated by pertinent examples.

Chapter Four explores $h\beta$ -neighborhoods and $h\beta$ -open neighborhoods, offering an in-depth analysis of $h\beta$ -local functions with practical illustrations. The chapter also introduces the $Cl_{h\beta}^*$ operator*, supported by related theorems and examples.

Finally, Chapter Five introduces ζ_g - $h\beta$ -closed sets and ζ_{s^*g} - $h\beta$ -closed sets*, and clarifies their differences from ζ_{s^*g} -closed sets* through the use of counter-examples.

KEYWORDS: Locally defined function, ideal-based topological models, $h\beta$ -approximated function, h -type semi-open set, Cl -star- $h\beta$ function, $h\beta$ -closed set with respect to ζ_g , $h\beta$ -type closed set based on ζ_{s^*g}

Science Code: 20405

Page Number: 19

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TOPOLOJİ ALANINDA İDEAL YAKLAŞIMLARIN ROLÜ.....	2
2.1 Bazı Yapılar Üzerinden Oluşturulan Topolojik Uzaylar	2
2.1.1 Tanım	2
2.2 Lokal Fonksiyonların Kümesel Temeli	2
2.2.1 Tanım	2
2.2.2 Teorem	2
2.2.3 Tanım	3
2.3 Kuratowski Kapanışı Üzerine İncelemeler	3
2.3.1 Tanım	3
2.3.2 Tanım	3
2.4 İdeal Topolojik Uzaylar Kapsamında τ^* Topolojisi	4
2.4.1 Tanım	4
2.4.2 Örnek.....	4
2.5 Bazı Açık Kümelerin İncelenmesi	4
2.5.1 Tanım	5
2.5.2 Tanım	5
2.5.3 Tanım	5
2.5.4 Tanım	5
2.5.5 Tanım	5
3. $h\beta$ -AÇIK KÜMELER	6
3.1 Tanım.....	6
3.2 Tanım.....	6
3.3 Uyarı	6
3.4 Örnek	6
3.5 Uyarı	6
3.6 Örnek	7
4. LOKAL FONKSİYONLARIN $h\beta$ TÜRÜ	8
4.1 $h\beta$ Türünün Lokalite Yapısı.....	8
4.1.1 Tanım	8
4.1.2 Tanım	8
4.1.3 Uyarı.....	8
4.1.4 Uyarı.....	8
4.1.5 Örnek.....	8
4.2 Kümeye İlişkin $h\beta$ -Lokal Fonksiyonel Yapılar	9
4.2.1 Tanım	9
4.2.2 Örnek.....	9

İÇİNDEKİLER (DEVAM)

Sayfa

4.2.3 Tanım	9
4.3 $h\beta$ -Yerel Fonksiyonların Teorik Sonuçları	10
4.3.1 Teorem	10
4.3.2 Örnek	10
4.3.3 Örnek	11
4.3.4 Uyarı	11
4.3.5 Örnek	12
4.3.6 Lemma	12
4.4 $CI^*_{h\beta}$ İşleminin Tanımı ve Özellikleri	12
4.4.1 Tanım	12
4.4.2 Teorem	12
4.4.3 Örnek	13
4.4.4 Teorem	13
4.4.5 Teorem	14
4.4.6 Teorem	14
4.4.7 Teorem	15
5. ζ_s^*g $h\beta$-KÜMELERİN TEMEL KARAKTERİSTİKLERİ	16
5.1 ζ_s^*g – $h\beta$ Tipi Kapalı Kümeler	16
5.1.1 Tanım	16
5.1.2 Teorem	16
5.2 ζ_s^*g $h\beta$ -Kapalı Kümeler	17
5.2.1 Tanım	17
5.2.2 Teorem	17
5.2.3 Uyarı	17
5.2.4 Örnek	17
5.2.5 Örnek	17
5.2.6 Teorem	18
6. KAYNAKLAR	19
ÖZGEÇMİŞ	20

SEMBOL LİSTESİ

\forall	: Her
\exists	: Vardır
\ni	: Öyle ki
\neq	: Eşit değil
\in	: Elemanıdır
\notin	: Elemanı değildir
\Rightarrow	: Gerek koşul
\Leftarrow	: Yeter koşul
\Leftrightarrow	: Gerek ve yeter koşul
\emptyset	: Boş küme
Z	: Evrensel küme
$S \cup G$: S bileşim G
$S \cap G$: S kesişim G
$S \subset G$: S kümesi G kümesinin alt kümesidir
$Z - G$: Z fark G
N	: Pozitif tam sayılar kümesi(sıfır dahil)
$P(Z)$: Kuvvet küme
τ	: Topoloji sistemi
τF	: Kapalılar ailesi
S	: Z kümesinde gelişigüzel alınan ideal
(Z, τ)	: Bir topoloji altında tanımlı uzay
(Z, τ, ζ)	: Ideallerle tanımlı topoloji sistemi
G^c	: G tümleyeni
$Cl(G)$: G'nin kapanışı
$Int(G)$: G'nin içi

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmamın hazırlanma sürecinde engin tecrübesiyle bana yol gösteren danışmanım Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ'e derin teşekkürlerimi iletir, kendisine saygılarımı sunarım. Eğitim hayatım boyunca yanımda olan, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen değerli anne ve babama sonsuz minnet ve sevgi ile teşekkür ederim.

Balıkesir, 2025

Abdulhamit MAMAN

1. GİRİŞ

Topolojik uzaylarda lokal fonksiyonların idealler yardımıyla tanımlanması ilk kez 1933 yılında Kuratowski tarafından gerçekleştirilmiş ve bu kavrama ilişkin temel özellikler detaylı biçimde incelenmiştir. 1960 yılına gelindiğinde ise Vaidyanathaswamy, ideal topolojik uzay kavramını ortaya atmış ve bunu lokal fonksiyonlar temelinde şekillendirmiştir.

1990 yılında Jankovic ve Hamlett, lokal fonksiyon kavramını kullanarak yeni bir kapanış operatörü geliştirmiştir. Bu operatör sayesinde tanımlanan kapalı kümelerden özgün bir topoloji oluşturulabileceği ortaya konmuştur. Ayrıca ideal topolojik uzayların çeşitli karakteristikleri incelenmiş ve ζ -açık kümeler konsepti geliştirilerek, ideallere dayalı yeni topolojik yapılar araştırılmıştır.

1999 yılında Dontchev ve çalışma arkadaşları, ζ_g kapalı kümeleri literatüre kazandırmış; daha sonra Khan ile Hamza, ζ_{s^*g} -kapalı kümeler kavramını tanımlamışlardır. Böylelikle ideal topolojik uzaylar, topolojinin pek çok yapısal unsurunun yeniden yorumlandığı kritik bir araştırma alanı hâline gelmiştir.

Bu çalışmada, öncelikle $h\beta$ -komşuluk ve $h\beta$ -açık komşuluk kavramları tanımlanıp, aralarındaki ilişkiler örnekler yoluyla açıklanmıştır. Sonrasında $h\beta$ -açık kümeler tanıtılmış ve çeşitli örneklerle desteklenmiştir. Bu kavramlar h -açık ve yarı h -açık kümelerle karşılaştırılmıştır. Elde edilen yapılar ışığında $h\beta$ -açık kümelerle bağlantılı $h\beta$ -lokal fonksiyon kavramı ortaya konmuş ve detaylı biçimde incelenmiştir. Bu fonksiyonun getirdiği özellikler örneklerle somutlaştırılmıştır. Ayrıca, $h\beta$ -lokal fonksiyonun özellikleri teoremler biçiminde sunulmuş ve ispatları verilmiştir. Çalışma kapsamında $Cl_{h\beta}^*$ işlemi tanımlanmış ve bu işlemin farklı özellikleri örneklerle tartışılmıştır. $h\beta$ -lokal fonksiyon ile idealler arasındaki ilişkiler değerlendirilmiş, $\tau^{h\beta}$ kavramı tanımlanarak yapısal özellikleri analiz edilmiştir. Ayrıca ζ_g - $h\beta$ -kapalı ve ζ_{s^*g} - $h\beta$ -kapalı kümeler tanımlanmış, ζ_{s^*g} kapalı kümelerle karşılaştırmalar yapılarak ters örneklerle açıklamalar getirilmiştir.

2. TOPOLOJİ ALANINDA İDEAL YAKLAŞIMLARIN ROLÜ

2.1 Bazı Yapılar Üzerinden Oluşturulan Topolojik Uzaylar

Kuratowski, 1933 yılında küme lokal fonksiyonunu tanımlamış ve bu fonksiyonun temel özelliklerini ortaya koymuştur. Bu yaklaşım, zaman içinde araştırmacılar tarafından daha da geliştirilmiş ve topoloji alanında önemli bir ilerleme sağlamıştır.[6]

2.1.1 Tanım

Boştan farklı Z kümesini ele alındığımızda, bu kümenin tüm alt kümelerinden oluşan güç kümesi $P(Z)$ ile gösterilsin. ζ ailesi, $P(Z)$ içerisinde yer alan ve boş olmayan bir alt aile olarak tanımlansın.

1) Her $S, G \in \zeta$ kümeleri için $S \cup G \in \zeta$ (Sonlu toplama koşulu)

2) Her $S \in \zeta$ kümesi ve $G \subset S$ alt kümesinden $G \in \zeta$ (Kalıtımsallık) niteliklerini gerçekleştirsin. Böylece ζ ailesine, Z kümesinde bir ideal denir. (X, τ, ζ) üçlüsü ideal topolojik uzay olarak adlandırılır".[5]

2.2. Lokal Fonksiyonların Kümesel Temeli

2.2.1 Tanım

$S \subseteq Z$ için (Z, τ) topolojik bir uzay olsun. ζ ailesi Z üzerinde tanımlı bir ideal kabul edilsin.

$$S^*(\zeta, \tau) = \{y \in Z : \forall B \in \Theta(x), (B \cap S) \notin \zeta\}$$

kümesi, S kümesinin ζ idealine göre lokal fonksiyonu denir. Bunun yanında $S^*(\zeta, \tau)$ sembolündense S^* şeklinde ifade edilecek".[4], [11]

2.2.2 Teorem

[5] Z kümesinde S_1, S_2 idealleriyle sunulan (Z, τ) topolojik uzayı ve $S, G \subset Z$ alt kümeleri verilsin. Böylelikle;

1. $S \subset G \Rightarrow S^* \subset G^*$
2. $S_1 \subset S_2 \Rightarrow B^*(S_2) \subset S^*(S_1)$
3. $S^* \subset CI(S^*) \subset CI(S)$, (S^* kümesi kapalıdır)
4. $(S^*)^* \subset S^*$
5. $(S \cup G)^* = S^* \cup G^*$

$$6. S^* - G^* = (S-G)^* - G \subseteq (S-G)^*$$

$$7. U \in \tau \Rightarrow U \cap S^* = U \cap (U \cap S)^* \subseteq (U \cap S)^*$$

$$8. F \in S \Rightarrow (S \cup F)^* = S^* = (S-F)^*$$

2.2.3 Tanım

(Z, τ, ζ) ideal topolojik bir uzay olarak kabul edilsin ve S, Z kümesinin bir alt kümesi olarak tanımlansın. Bunun yanı sıra, ζ ailesi Z üzerinde ideal yapısına sahip olsun.

$$S^{*S}(\zeta, \tau) = \{x \in Z : \forall V \in \text{SO}(Z, x), (V \cap T) \notin \zeta\}$$

kümesi, S kümesinin ζ ideali semi lokal fonksiyon denir, bunun yanında $S^{*S}(\zeta, \tau)$ sembolündense kısaca S^{*S} şeklinde ifade edilecek. [4], [8]

2.3 Kuratowski Kapanışı Üzerine İncelemeler

2.3.1 Tanım

Z kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan güç kümesi $P(Z)$ verilsin. Bu kümeden yine $P(Z)$ kümesine tanımlı olan d dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edilir: $d:P(Z) \rightarrow P(Z)$. 1. $d(\emptyset) = \emptyset$

$$2. S \in P(Z) \Rightarrow S \subset d(S)$$

$$3. d(S \cup G) = d(S) \cup d(G)$$

$$4. d(d(S)) \subseteq d(S)$$

Bu koşullar sağlandığında, $(S)^c = S \cup d(S)$ formunda tanımlanan ve $(\)^c = P(Z) \rightarrow P(Z)$ dönüşüm, $P(Z)$ Kuratowski kapanış operatörü olarak kabul edilir. [6]

2.3.2 Tanım

(Z, τ) topolojik uzay ve Z küme üstünde ζ ideal verilsin. Gelişigüzel $M \subset Z$ alt kümesine, $CI^*(M) = M \cup M^*$ şeklinde sunulan $CI^* = P(Z) \rightarrow P(Z)$ dönüşümü 2.3.1 Tanımdaki koşulları teyit ediyorsa bu fonksiyona Kuratowski Kapanışı denir. [5] Bu sebeple,

$$1. CI^*(\emptyset) = \emptyset \cup \emptyset^* = \emptyset \text{ olur.}$$

$$2. CI^*(M) = M \cup M^* \text{ olduğu bilindiğinden, } M \subset CI^*(M) \text{ elde edilir.}$$

$$3. CI^*(M \cup H) = (M \cup H) \cup (M \cup H)^*$$

$$\begin{aligned}
&= (M \cup H) \cup (M^* \cup H^*) \\
&= (M \cup M^*) \cup (H \cup H^*) \\
&= CI^*(M) \cup CI^*(H)
\end{aligned}$$

ortaya çıkar.

$$\begin{aligned}
4. CI^*(CI^*(M)) &= CI^*(M \cup M^*) \\
&= (M \cup M^*) \cup (M \cup M^*)^* \\
&= (M \cup M^*) \cup (M^* \cup (M^*)^*) \\
&\subseteq (M \cup M^*) \cup (M^* \cup M^*) \\
&\subseteq (M \cup M^*) \cup (M^*) \subseteq (M \cup M^*) \subseteq CI^*(M)
\end{aligned} \tag{1}$$

olur. Diğer yandan, $CI^*(M) = M \cup M^*$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
CI^*(CI^*(M)) &= CI^*(M) \cup (CI^*(M))^* \text{ olur ve böylelikle birleşim işlemi gereği} \\
CI^*(M) &\subseteq CI^*(CI^*(M))
\end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. (1) ve (2) den $CI^*(CI^*(M)) = CI^*(M)$ kanısında bulunulur.

2.4 İdeal Topolojik Uzaylar Kapsamında τ^* Topolojisi

2.4.1 Tanım

Bir topolojik uzay olan (Z, τ) ve Z kümesi üzerinde tanımlı ζ ideali verilsin.

$$\tau^*(\zeta) = \{L \subset Z : CI^*(Z-L) = (Z-L)\}$$

elde edilen $\tau^*(\zeta)$ ailesi, Z kümesinde bir topolojidir. Bunun yanında τ topolojisinden de daha geneldir.[5]

2.4.2 Örnek

N doğal sayılar küme olmasıyla beraber; N kümesinde $\beta = \{\{2n-1, 2n\}, n \in N\}$ tabanı tarafınca ortaya çıkarılan sonlu τ topolojisini oluşturup ζ_f ideali ele alındığında $N^*(\zeta_f) = \emptyset$ elde edilir. Bundan dolayı $CI^*(N) = N$ elde edilir. Bu çıktı $\tau^*(\zeta)$ de yerine yazıldığında $\tau^*(\zeta) = P(N)$ neticesine varılır.[5]

2.5 Bazı Açık Kümelerin İncelenmesi

Topoloji alanında açık kümelerin tanımı kritik bir yer tutar. Şimdiye kadar çeşitli açık kümeler tanımlanmıştır; bu bölümde ise özellikle gereksinim duyduğumuz açık kümeleri inceleyeceğiz.

2.5.1 Tanım

(X, τ) olarak verilen topolojik uzayda, Z kümesinin bir alt kümesi olan S için, eğer S , kapanışının iç kümesiyle $(\text{Int}(\text{cl}(S)))$ eşit oluyorsa, bu S kümesine regüler açık küme adı verilir. Regüler açık kümelerden oluşan tüm aile $RO(Z)$ sembolüyle ifade edilir. [10]

2.5.2 Tanım

(Z, τ) bir topolojik uzay ve $S \subseteq Z$ bir alt küme olmak üzere, eğer $S \subseteq \text{cl}(\text{Int}(S))$ koşulu sağlanıyorsa, S kümesi yarı açık küme olarak adlandırılır. Bu tür kümelerin oluşturduğu tüm koleksiyon $SO(Z)$ biçiminde gösterilmektedir [9].

2.5.3 Tanım

(Z, τ) topolojik uzayı altında, $S \subset Z$ olacak şekilde bir küme ele alınsın. S kümesinin içerdiği tamamen semi açık kümeler bileşimine, S kümesine ait semi içi ve $\text{slnt}(S)$ ile ifade edilir.[9] τ^h

2.5.4 Tanım

(Z, τ) bir topolojik uzay ve $S \subseteq Z$ bir alt küme olmak üzere, boş küme ile Z 'den farklı bir açık küme L için eğer $S \subseteq \text{Int}(S \cup L)$ şartı sağlanıyorsa, S kümesine h -açık küme denir. Bu kümelerin tümleyenleri ise h -kapalı kümeler olarak adlandırılır. (Z, τ) uzayındaki tüm h -açık kümelerin oluşturduğu küme ailesi τ^h ile gösterilir ve bu aile aynı zamanda $hO(Z)$ biçiminde de ifade edilmektedir [1]. Bu tür kümeler, klasik açık kümelerden farklı olarak daha zayıf koşulları sağlamakla birlikte, çeşitli topolojik özelliklerin genellenmesinde önemli bir rol oynar.[1]

2.5.5 Tanım

(Z, τ) topolojik uzayı ve $S \subset Z$ alt küme verilsin. Z kümesi üzerinde S kümesini içeren tüm h -kapalı kümelerin kesişimine S kümesine ait h -kapanışı denir ve $\text{Cl}_h(S)$ şeklinde gösterilir.

3. $h\beta$ -AÇIK KÜMELER

3.1 Tanım

(Z, τ) topolojik uzayında $S \subset Z$ verilsin. Boş küme ve evrensel kümeden farklı bir L açık kümesi için $S \subseteq \beta\text{Int}(SUL)$ sağlıyorsa S kümesine $h\beta$ -açık küme denir. $h\beta$ -açık kümenin tümleyeni $h\beta$ -kapalı kümedir. (Z, τ) topolojik uzayında tüm $h\beta$ -açık kümeler ailesi $\tau^{h\beta}$ şeklinde ifade edilir. Bunun yanında $\tau^{h\beta} = h\beta O(Z)$ şeklinde de ifade edilir.

3.2 Tanım

(Z, τ) bir topolojik uzay ve $S \subseteq Z$ bir alt küme olmak üzere, L kümesi evrensel küme Z ve boş küme dışında bir açık küme olmak kaydıyla, $S \subseteq s\text{Int}(SUL)$ şartı sağlanıyorsa, S kümesine yarı h -açık küme (semi h -open set) denir. Bu tür kümelerin tümleyeni ise yarı h -kapalı küme (semi h -closed set) olarak adlandırılır.[2]. Bu kümeler, klasik açık kümelerin bir genellemesi niteliğindedir ve topolojik yapılar üzerinde daha esnek analizlere olanak tanır. Özellikle ideal-topoloji bağlamında, bu tür kümeler yardımıyla yeni topolojik kavramların geliştirilmesi mümkün hâle gelmiştir.

3.3 Uyarı

Her h -açık kümenin aynı zamanda bir $h\beta$ -açık küme olduğu bilinmektedir. Ancak, bunun tersi genellikle geçerli değildir.

3.4 Örnek

$Z = \{y, v, r, k\}$ evrensel kümesine ve $\tau = \{\emptyset, Z, \{t\}, \{y, r\}, \{y, r, k\}\}$ topolojisi alınsın. 2.5.4 Tanım gereği $\tau^h = \{\emptyset, X, \{t\}, \{y, r\}, \{y, r, k\}\}$ bulunur. 3.1.1 Tanım gereği $\tau^{h\beta} = \{\emptyset, Z, \{y\}, \{r\}, \{k\}, \{y, v\}, \{y, r\}, \{y, k\}, \{v, r\}, \{v, k\}, \{r, k\}, \{y, v, r\}, \{y, r, k\}, \{y, v, t\}, \{v, r, k\}\}$ olduğunu kolaylıkla bulabiliriz. Buradan $\{y\}, \{v, k\}, \{y, v, r\}$ kümeleri $h\beta$ -açık kümeler ancak h -açık değildirler.

3.5 Uyarı

Bir $h\beta$ -açık küme, yarı h -açık küme olma koşulunu doğal olarak sağlar; ancak yarı h -açık kümeleri için aynı durum söz konusu değildir.

3.6 Örnek

$Z = \{y, v, r, k\}$ evrensel kümesi ve $\tau = \{\emptyset, Z, \{k\}, \{y, r\}, \{y, r, k\}\}$ topolojisi verilsin. Tanım 3.1.1'den $\tau^{h\beta} = \{\emptyset, Z, \{y\}, \{r\}, \{k\}, \{y, v\}, \{y, r\}, \{y, k\}, \{v, r\}, \{v, t\}, \{r, t\}, \{y, v, r\}, \{y, r, k\}, \{y, v, k\}, \{v, r, k\}\}$ bulunur. Tanım 3.1.2'den $S_h O = \{\emptyset, Z, \{v\}, \{k\}, \{y, r\}, \{v, k\}, \{y, v, r\}, \{y, r, k\}\}$ olduğu kolaylıkla elde edilir. Bununla birlikte $\{y\}, \{r\}, \{y, k\}, \{y, v, k\}$ kümeleri $h\beta$ -açık kümelerdir ama semi h -açık küme değildirler.

4. Lokal Fonksiyonların $h\beta$ Türü

4.1 $h\beta$ Türünün Lokalite Yapısı

4.1.1 Tanım

Bir $(Z, \tau^{h\beta})$ topolojik uzayı ele alındığında, $y \in Z$ olmak üzere bir nokta seçilsin. Bu bağlamda, y noktasını kapsayan her $h\beta$ -açık küme, z noktasının $h\beta$ türünde bir açık komşuluğu olarak adlandırılır. Buna göre, bir M kümesi, y noktasının $h\beta$ -açık bir komşuluğu olur ancak ve ancak $y \in Z$ ve $M \in \tau^{h\beta}$ olmakla birlikte $y \in M$ olmasıdır.

4.1.2 Tanım

Bir $(Z, \tau^{h\beta})$ topolojik uzayı ele alındığında, $y \in Z$ olmak üzere bir nokta seçilsin. Şayet $L \subset Z$ $h\beta$ -açık alt kümesini içeren $V \subset Z$ alt küme varsa, V alt kümesine y noktasının $h\beta$ -komşuluğu denir.

Kısacası, V kümesi y noktasının $h\beta$ -komşuluğudur $\Leftrightarrow \exists L \in \tau^{h\beta} \ni y \in L \subseteq V$

4.1.3 Uyarı

Her $h\beta$ -açık küme, yarı h -açıklık özelliğini kendiliğinden taşır; ancak tüm yarı h -açık kümeler için aynı durum geçerli değildir.

4.1.4 Uyarı

4.1.3. Uyarının aksi, genel koşullar altında her zaman sağlanmayabilir.

4.1.5 Örnek

$Z = \{y, v, r\}$ üzerinde, $\tau = \{ \emptyset, Z, \{y\}, \{y, v\} \}$ topolojisiyle (Z, τ) topolojik uzayı göz önüne alınsın 3.1.1 tanımdan dolayı

$\tau^{h\beta} = \{ \emptyset, Z, \{y\}, \{r\}, \{k\}, \{y, v\}, \{y, r\}, \{y, k\}, \{v, r\}, \{v, k\}, \{r, k\}, \{y, v, r\}, \{y, r, k\}, \{y, v, k\}, \{v, r, k\} \}$ olarak elde edilir.

Z evrensel kümesinde bulunan z noktasının $h\beta$ -açık komşulukları: $Z, \{y\}, \{y, v\}$ dir.

Z evrensel kümesinde bulunan z noktasının $h\beta$ -komşulukları: $Z, \{y\}, \{y, v\}, \{y, r\}, \{y, v, r\}$ bulunur.

4.2 Kümeye İlişkin $h\beta$ -Lokal Fonksiyonel Yapılar

4.2.1 Tanım

(Z, τ, ζ) uzayı ve $S \subset Z$ alınsın. ζ ideali ve τ topolojisiyle beraber

$$S^*_{h\beta}(\zeta, \tau) = \{ x \in Z : (S \cap L) \notin \zeta, \text{ her } L \in h\beta O(Z, x) \text{ için} \}$$

bu şekilde tanımını verdiğimiz $S^*_{h\beta}(\zeta, \tau)$ kümesine S kümesinin $h\beta$ -lokal fonksiyonu denir ve $S^*_{h\beta}(\zeta, \tau)$ simgesindense $S^*_{h\beta}$ ile ifade edilir.

4.2.2 Örnek

$Z = \{z, v, r\}$ evrensel kümesi ve $\tau = \{ \emptyset, Z, \{z\}, \{z, v\} \}$ topolojisi ile (Z, τ) topolojik uzayı alınsın.

$\zeta = \{ \emptyset, \{r\} \}$ idealini ve $T = \{z, v\}$ alt kümesi ele alınsın. Böylece

$$\tau^{h\beta} = \{ \emptyset, Z, \{z\}, \{z, v\}, \{v\}, \{v, r\} \} \text{ olarak bulunur ve } \tau^t = \{ \emptyset, Z, \{v, r\}, \{r\} \} \text{ dır. 4.2.1}$$

Tanımdan

$$T^*_{h\beta} = \{z, v, r\} = Z \text{ elde edilir.}$$

4.2.3 Tanım

(Z, τ, ζ) uzayı ve $S \subseteq Z$ alt kümesi verilsin. ζ idealine ve τ topolojisine bağlı olarak,

$$S^{*s}_{h\beta}(\zeta, \tau) = \{ x \in Z : (S \cap L) \notin \zeta, \text{ her } L \in S_{h\beta} O(Z, x) \text{ için} \}$$

şeklinde tanımlanan küme, S kümesinin semi $h\beta$ -lokal fonksiyonu olarak isimlendirilir. Bu yapı, $S^{*sh\beta}(\zeta, \tau)$ sembolüyle gösterilmekle beraber, daha pratik bir kullanım için kısaca $S^{*sh\beta}$ olarak ifade edilir.

Bu tanım, ideal topolojik uzaylarda lokal fonksiyonların yarı $h\beta$ -topolojik özellikler taşıyan özel bir sınıfını belirtir. Özellikle, her $x \in S^{*sh\beta}$ için, x 'in etrafındaki tüm $h\beta$ -açık komşuluklarda S ile kesişen kümelerin ideal ζ 'ye ait olmaması koşulu sağlanmaktadır. Bu durum, söz konusu fonksiyonun yerel davranışını ideal yapılar bağlamında kontrol etmeyi mümkün kılar.

Bu kavram, ideal topolojik uzaylarda fonksiyonların ve kümelerin lokal özelliklerini incelemek için önemli bir araçtır ve topolojik analizlerde geniş uygulama alanı bulur.

4.3 $h\beta$ -Yerel Fonksiyonların Teorik Sonuçları

4.3.1 Teorem

(Z, τ, ζ) bir ideal topolojik uzay ve $S, G \subseteq Z$ kümeleri verilsin.

- 1-) $S \subset G \Rightarrow S^*_{h\beta} \subset G^*_{h\beta}$,
- 2-) $(S \cup G)^*_{h\beta} = S^*_{h\beta} \cup G^*_{h\beta}$,
- 3-) $(S \cap G)^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta} \cap G^*_{h\beta}$,
- 4-) $(S^*_{h\beta})^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta}$,
- 5-) $S^*_{h\beta} = h\beta cl(S^*_{h\beta}) \subset h\beta cl(S)$ ve $S^*_{h\beta}$ $h\beta$ -kapalıdır.

İspat:

1) Varsayalım ki $x \notin G^*_{h\beta}$ verilsin. Böylece, en az bir tane $L \in hO(Z, y)$ olduğu görülür ve buradan $(L \cap G) \in \zeta$ sonucuna varılır. $S \subset G$ olduğundan, $(L \cap S) \in \zeta$ olduğunu buluruz. Buradan $y \notin S^*_{h\beta}$ elde edilir. Böylelikle $S^*_{h\beta} \subset G^*_{h\beta}$ olduğu görülür.

2) 4.2.1 Tanımdan;

$$S^*_{h\beta}(S, \tau) = \{y \in Z: (S \cap H) \notin S, \text{ her } H \in hO(Z, x) \text{ için}\}$$

$$G^*_{h\beta}(S, \tau) = \{y \in Z: (G \cap H) \notin S, \text{ her } H \in hO(Z, x) \text{ için}\}$$

olur birleşim işleminden faydalanılarak,

$$(S \cup G)^*_{h\beta} = S^*_{h\beta} \cup G^*_{h\beta}.$$

3) $(S \cap G) \subset S$ olduğundan, 1)'den dolayı $(S \cap G)^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta}$ elde edilir. Bunun yanında $(S \cap G) \subset G$ olduğundan $(S \cap G)^*_{h\beta} \subset G^*_{h\beta}$ elde ederiz. Kesişim işlemi sayesinde, $(S \cap G)^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta} \cap G^*_{h\beta}$ olur.

4.3.2 Örnek

$Z = \{y, v, r, k\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{y\}, \{y, v\}\}$ ile (Z, τ) topolojik uzayı alınsın. $\zeta = \{\emptyset, \{r\}\}$ ideali ortaya koyulduğunda 2.5.4 Tanım'dan $h\beta$ -açık kümeler ailesi $\tau^{h\beta} = \{\emptyset, Z, \{y\}, \{y, v\}, \{v\}, \{v, r\}\}$ bulunur. $S = \{y, v\} \subset Z$ ve $G = \{r\} \subset X$ alt kümelerine istinaden 4.2.1 Tanım'dan ;

$$(S \cap G) = \emptyset \text{ ve } (S \cap G)^*_{h\beta} = \emptyset^*_{h\beta} = \emptyset \text{ bulunur.}$$

$S^*_{h\beta} = \{z, v, r\}$ ve $E^*_{h\beta} = \{r\}$ verildiğinden $S^*_{h\beta} \cap G^*_{h\beta} = \{r\}$ elde edilir. Netice olarak

$$(S \cap G)^*_{h\beta} = \emptyset \subset S^*_{h\beta} \cap G^*_{h\beta} = \{r\} \text{ sonucuna varılır.}$$

$$4) (S^*_{h\beta})^*_{h\beta} = \{ x \in X : (S^*_{h\beta} \cap L) \notin \zeta, \text{ her } L \in h\beta O(Z, x) \text{ için} \}$$

$$(S^*_{h\beta})^*_{h\beta} = \{ x \in X : S^*_{h\beta} \notin \zeta \text{ ve } L \notin \zeta, \text{ her } L \in h\beta O(Z, x) \text{ için} \}$$

$$(S^*_{h\beta})^*_{h\beta} = \begin{array}{l} \rightarrow \subseteq \{ x \in Z : L \notin \zeta, \text{ her } L \in h\beta O(Z, x) \text{ için} \} \\ \rightarrow \subseteq \{ x \in Z : S^*_{h\beta} \notin \zeta, \text{ her } L \in h\beta O(Z, x) \text{ için} \} \\ \subseteq \{ x \in Z : (S \cap L) \notin \zeta, \text{ her } h\beta O(Z, x) \text{ için} \} = S^*_{h\beta} \end{array}$$

$\Rightarrow (S^*_{h\beta})^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta}$ elde edilir.

4.3.3 Örnek

$Z = \{z, v, r, t\}$ ve $\tau = \{ \emptyset, X, \{y\}, \{y, v\} \}$ ile (Z, τ) topolojik uzay alınsın. $\zeta = \{ \emptyset, \{r\} \}$ ideal verildiğinde 2.5.4 Tanım'dan $h\beta$ -kümeler ailesi $\tau^{h\beta} = \{ \emptyset, Z, \{y\}, \{y, v\}, \{v\}, \{v, r\} \}$ bulunur. $T = \{z, v\} \subset Z$ olarak seçildiğinde; 4.2.1 Tanım'dan , $T^*_{h\beta} = Z$ evrensel kümesi olarak bulunur. Böylece $(T^*_{h\beta})^*_{h\beta} = \{v, r, k\}$ ve böylece $(T^*_{h\beta})^*_{h\beta} \subset T^*_{h\beta}$ elde edilir. Ama örneğimizden de bulduğumuz ifadeyle de $T^*_{h\beta} \not\subset (T^*_{h\beta})^*_{h\beta}$ olmadığı görülür.

5) 2.5.5 Tanım gereği $S^*_{h\beta} \subset Clh\beta(S^*_{h\beta})$ olur. Bir $x \in Clh\beta(S^*_{h\beta})$ noktası alınsın. Buradan, her $L \in h\beta O(Z, x)$ için $(S^*_{h\beta} \cap L) \neq \emptyset$ elde edilir. $y \in (S^*_{h\beta} \cap L)$ alınsın. Böylelikle her $L \in h\beta O(Z, x)$ için $y \in S^*_{h\beta}$ ve $y \in L$ bulunur. $(S \cap L) \notin \zeta$ ve böylelikle $x \in S^*_{h\beta}$ olduğu görülür.

Buradan $Clh\beta(S^*_{h\beta}) \subset S^*_{h\beta}$ olduğundan $Clh\beta(S^*_{h\beta}) = S^*_{h\beta}$ elde edilir ki $S^*_{h\beta}$ $h\beta$ -kapalılığı açıktır.

Varsayalımki $x \notin Clh\beta(S)$ verilsin. Böylelikle , $L \cap S = \emptyset \in \zeta$ olduğundan $x \notin S^*_{h\beta}$ sonucuna varılır. Böylelikle $S^*_{h\beta} \subset Clh\beta(S)$ sonucuna varılır.

4.3.4 Uyarı

(Z, τ, ζ) uzayı ve $S \subset Z$ alınsın.

- 1) $\zeta = \{ \emptyset \}$ olduğunda, $S^*_{h\beta} = clh\beta(S)$ olur.
- 2) Şayet $S \in \zeta$ olduğunda $S^*_{h\beta} = \emptyset$ ve $\emptyset^*_{h\beta} = \emptyset$ elde edilir.
- 3) $S \subset S^*_{h\beta}$ veya $S^*_{h\beta} \subset S$ şart değil.
- 4) Şayet $SO(Z) = h\beta O(Z)$ ise $S^*_{h\beta}(\zeta, h\beta O(Z)) = S^{*s}(\zeta, \tau)$ elde edilir.

5) Şayet $h\beta O(Z) = \tau(Z)$ ise $S^*_{h\beta}(\zeta, h\beta O(Z)) = S^*(\zeta, \tau)$ elde edilir.

4.3.5 Örnek

(Z, τ) uzayda $Z = \{y, v, r, k\}$ evrensel kümesi olmak üzere $\tau = \{ \emptyset, Z, \{y\}, \{y, v\} \}$ topolojisi ve $\zeta = \{ \emptyset, \{r\}, \{y, r\} \}$ alınsın. Ayrıca 2.5.4 Tanımdan, $\tau^h = \{ \emptyset, Z, \{t\}, \{y, r\}, \{y, r, k\} \}$ elde edilir. $T = \{z, v\}$ ve $P = \{z, r\}$ iken 4.2.1 Tanım'dan $T^*_{h\beta} = Z$, $P^*_{h\beta} = \emptyset$ sonucuna ulaşılır.

4.3.6 Lemma

(Z, τ, ζ) ideal topolojik uzay verilsin. Böylelikle alttaki nitelikler sağlanır.

- 1) $RO(Z) \subset \tau \subset S_{h\beta}O(Z) \subset h\beta O(Z) = \tau^{h\beta}$
- 2) $S^{*s}_{h\beta} \subset S^*_{h\beta} \subset S^*$

İspat:

- 1) Tüm düzenli açık kümeler açık küme olarak değerlendirilir ve her açık kümenin h-açık küme özelliği taşıdığı bilinmektedir olduğundan
- 2) $y \in S^{*s}_{h\beta}$ noktası verilsin. Böylece 4.2.3 Tanımdan dolayı her $L \in S_{h\beta}O(Z)$ için $(S \cup L) \notin \zeta$ olur. Bundan dolayı her $L \in h\beta O(Z)$ kümesi için $(S \cup L) \notin \zeta$ bulunur. Böylelikle $x \in S^*_{h\beta}$, $S^{*s}_{h\beta} \subset S^*_{h\beta}$ dir. $y \in S^*_{h\beta}$ nokta verildiğinde her L h-açık kümesi için $(S \cap L) \notin \zeta$ elde edilir. Açıklık niteliğine sahip her küme h-açık kabul edildiğinden, herhangi bir L açık kümesi için $(S \cap L) \notin \zeta$ olduğu görülür (2.2.1 Tanım). Böylelikle $y \in S^*$ sonucuna ulaşılır ve $S^*_{h\beta}$ kümesinin S^* kümesinin bir alt kümesi olduğu ifade edilir.

4.4 $CI^*_{h\beta}$ İşleminin Tanımı ve Özellikleri

4.4.1 Tanım

(Z, τ, ζ) bir ideal topolojik uzay olsun. $cl^*_{h\beta}(S)$ 'yi şu şekilde tanımladık: her $S \subset Z$ için $cl^*_{h\beta}(S) = S \cup S^*_{h\beta}$ dir.

4.4.2 Teorem

(Z, τ, ζ) topolojik uzayı verilsin. X 'in herhangi bir T, S alt kümeleri için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- 1-) $T \subset cl^*_{h\beta}(S)$,

- 2-) $cl^*_{h\beta}(\emptyset) = \emptyset$ ve $cl^*_{h\beta}(Z) = Z$,
- 3-) Eğer $S \subset G$ ise $cl^*_{h\beta}(S) \subset cl^*_{h\beta}(G)$,
- 4-) $cl^*_{h\beta}(S) \cup cl^*_{h\beta}(G) = cl^*_{h\beta}(S \cup G)$,
- 5-) $(cl^*_{h\beta}(S))^*_{h\beta} \subset cl^*_{h\beta}(S) = cl^*_{h\beta}(cl^*_{h\beta}(S))$.

İspat:

- 1) Bu ifade 4.4.1 Tanımı gereği $cl^*_{h\beta}(S) = SUS^*_{h\beta}$ açıkça bulunur.
- 2) $cl^*_{h\beta}(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\}^*_{h\beta} = \emptyset$ ve $cl^*_{h\beta}(Z) = Z \cup Z^*_{h\beta} = Z$ elde edilir.
- 3) $S \subset G$ verilsin. Her $S \subset Z$ alt kümesi için $cl^*_{h\beta}(S) = SUS^*_{h\beta}$ ve tüm $G \subset Z$ alt kümesi için $cl^*_{h\beta}(G) = GUG^*_{h\beta}$ olup 4.3.1. Teoremden $S \subset G$ iken $S^*_{h\beta} \subset G^*_{h\beta}$ sonucuna varılır. Bundan dolayı $cl^*_{h\beta}(S) = SUS^*_{h\beta} \subset cl^*_{h\beta}(G) = GUG^*_{h\beta}$ olduğu görülür.
- 4) 4.4.1 Tanımdan $cl^*_{h\beta}(SUG) = (SUG) \cup (SUG)^*_{h\beta} = (SUG) \cup S^*_{h\beta}UG^*_{h\beta} = (SUS^*_{h\beta}) \cup (GUG^*_{h\beta}) = cl^*_{h\beta}(S) \cup cl^*_{h\beta}(G)$ bulunur.
- 5) 4.3.1 Teorem gereği $(cl^*_{h\beta}(S))^*_{h\beta} = cl^*_{h\beta}(S) \cup (cl^*_{h\beta}(S))^*_{h\beta} = cl^*_{h\beta}(S)$.

4.4.3 Örnek

4.3.5 Örneğindeki S kümesi ele alınsın. $P^*_{h\beta} = \emptyset$ elde edilmişti böylelikle,

$$(cl^*_{h\beta}(P))^*_{h\beta} = ((PUP^*_{h\beta}))^*_{h\beta} = \emptyset \text{ ve } cl^*_{h\beta}(P) = P \text{ bulunur.}$$

Ayrıca $cl^*_{h\beta}(cl^*_{h\beta}(P)) = cl^*_{h\beta}(P) = S$ olduğundan $(cl^*_{h\beta}(P))^*_{h\beta} \subset cl^*_{h\beta}(P) = cl^*_{h\beta}(cl^*_{h\beta}(P))$ dır.

4.4.4 Teorem

(Z, τ, ζ) ideal topolojik uzayın $S, G \subset Z$ alt kümeler verilsin. $h\beta$ -lokal fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Z evrensel kümesinde bir başka $J \supset \zeta$ ideali için, $S^*_{h\beta}(J) \subset S^*_{h\beta}(\zeta)$ dır.
- 2) $S^*_{h\beta} - G^*_{h\beta} = (S-G)^*_{h\beta} - G^*_{h\beta} \subset (S-G)^*_{h\beta}$ dır.
- 3) $L \in \tau^{h\beta}$ iken $L \cap S^*_{h\beta} = L \cap (L \cap S)^*_{h\beta} \subset (L \cap S)^*_{h\beta}$ dır.
- 4) $L \in \zeta$ ise $(S-L)^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta} = (S \cup L)^*_{h\beta}$ dır.

İspat:

- 1) $x \in S^*_{h\beta}(J)$ elemanı verilsin. Böylece 4.2.1. Tanım gereği her $h\beta O(X)$ için $L \cap S \notin J$ elde edilir. Böylece $L \cap S \notin \zeta$ bulunduğundan $x \in S^*_{h\beta}(I)$ bulunur. Buradan $S^*_{h\beta}(J) \subset S^*_{h\beta}(\zeta)$ sonucuna varılır.

2) $S-G \subset S$ verildiğinden, 4.3.1 Teoremden $(S-G)^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta}$ bulunur ve $(S-G)^*_{h\beta} - G^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta} - G^*_{h\beta}$ elde edilir. Öbür yandan $S \subset (S-G) \cup G$ olduğu için, 4.3.1. Teorem gereği $S^*_{h\beta} \subset ((S-G)^*_{h\beta} \cup G^*_{h\beta})$ dır. Buradan $S^*_{h\beta} - G^*_{h\beta} \subset ((S-G)^*_{h\beta} \cup G^*_{h\beta}) - G^*_{h\beta}$ elde edilir. Bu nedenle $S^*_{h\beta} - G^*_{h\beta} \subset (S-G)^*_{h\beta} - G^*_{h\beta}$ olduğu görülür ve böylece $S^*_{h\beta} - G^*_{h\beta} \subset (S-G)^*_{h\beta} - G^*_{h\beta}$

3) $L \in h\beta O(Z)$ ve $x \in L \cap S^*_{h\beta}$ verilsin. Böylece $y \in L$ ve $x \in S^*_{h\beta}$ elde edilir. Her $V \in h\beta O(Z)$ için $L \cap V \in h\beta O(Z)$ olur. Buradan $\forall V (L \cap S) \cap V = (L \cap V) \cap S \neq \emptyset$ olup $x \in (L \cap S)^*_{h\beta}$ bulunur. Böylece $L \cap S^*_{h\beta} \subset (L \cap S)^*_{h\beta}$ ve $L \cap S \subset S$ olup, $L \cap S^*_{h\beta} \subset L \cap (L \cap S)^*_{h\beta}$ dır. 4.3.1. Teoremden dolayı $(L \cap S)^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta}$ ve $L \cap (L \cap S)^*_{h\beta} \subset (L \cap S)^*_{h\beta}$ neticesine varılır.

4) 4.3.1 Teorem gereği ve 4.3.4 Uyarıdan $(L \cap S)^*_{h\beta} = L^*_{h\beta} \cap S^*_{h\beta} = \emptyset \cup S^*_{h\beta} = S^*_{h\beta}$ olur, $S-L \subset S$ verildiğinden, $(S-L)^*_{h\beta} \subset S^*_{h\beta}$ sonucuna varılır.

4.4.5 Teorem

(Z, τ, I) ideal topolojik uzayı, Z kümesindeki idealler ζ_1 ve ζ_2 olsun $S \subset Z$ alt kümesi alınsın. Aşağıdaki şartlar sağlanıır:

- 1) $\zeta_1 \subset \zeta_2$ iken, $S^*_{h\beta}(\zeta_2) \subset S^*_{h\beta}(\zeta_1)$
- 2) $S^*_{h\beta}(\zeta_1 \cap \zeta_2) = S^*_{h\beta}(\zeta_1) \cup S^*_{h\beta}(\zeta_2)$

İspat:

1) $x \in S^*_{h\beta}(\zeta_2)$ noktası verilsin 4.2.1 Tanımdan her $L \in h\beta O(Z, x)$ için $L \cap S \notin \zeta_2$ dir. $\zeta_1 \subset \zeta_2$ verildiğinden $L \cap S \notin \zeta_1$ elde edilir ve buradan $x \in S^*_{h\beta}(\zeta_1)$ olduğu görülür.

2) $(\zeta_1 \cap \zeta_2) \subset \zeta_1$ ve $(\zeta_1 \cap \zeta_2) \subset \zeta_2$ olduğundan 4.4.4 Teorem 1) gereği $S^*_{h\beta}(\zeta_1) \subset S^*_{h\beta}(\zeta_1 \cap \zeta_2)$ ve $S^*_{h\beta}(\zeta_2) \subset S^*_{h\beta}(\zeta_1 \cap \zeta_2)$ bulunur. Birleşim işleminden $S^*_{h\beta}(\zeta_1) \cup S^*_{h\beta}(\zeta_2) \subset S^*_{h\beta}(\zeta_1 \cap \zeta_2)$. $x \in S^*_{h\beta}(\zeta_1 \cap \zeta_2)$ noktasını alalım. Buradan her $L \in h\beta O(X)$ için, $L \cap S \notin (\zeta_1 \cap \zeta_2)$ vardır. Yani $L \cap S \notin (\zeta_1)$ veya $L \cap S \notin (\zeta_2)$ olmalıdır. Böylece $x \in S^*_{h\beta}(\zeta_1)$ veya $x \in S^*_{h\beta}(\zeta_2)$ olur. Bu ise $S^*_{h\beta}(\zeta_1 \cap \zeta_2) \subset S^*_{h\beta}(\zeta_1) \cup S^*_{h\beta}(\zeta_2)$ olduğu görülür. Neticesinde $S^*_{h\beta}(\zeta_1 \cap \zeta_2) = S^*_{h\beta}(\zeta_1) \cup S^*_{h\beta}(\zeta_2)$ elde edilir.

4.4.6 Teorem

(Z, τ, ζ) uzayını alalım

$$\tau^*_{h\beta} = \{ L \subset Z \ni cl^*_{h\beta}(Z-L) = (Z-L) \}$$

olarak verilen $\tau^*_{h\beta}$ ailesi, Z için topolojidir hatta $\tau^* \subset \tau^*_{h\beta}$ ve $h\beta O(Z) \subset \tau^*_{h\beta}$ dır.

İspat:

4.4.1. Tanımdan $Cl^*_{h\beta}(S) = SUS^*_{h\beta}$, $\tau^*_{h\beta}$ ailesi Z kümesi için $Cl^*_{h\beta}(S)$ tarafınca elde edilmiş bir topolojidir. $\tau^* \subset \tau^*_{h\beta}$ ifadesini bulmalıyız. 4.3.6 Lemma'dan;

$Cl^*_{h\beta}(S) = SUS^*_{h\beta} \subset SUS^* = Cl^*(S)$ dır. A kümesi τ^* kapalı küme olarak verilsin. Böylece $Cl^*(S) = S$ ve $Cl^*_{h\beta} \subset S$ elde edilir. Bu yüzden $Cl^*_{h\beta}(S) = S$ ve S kümesi $\tau^*_{h\beta}$ - kapalıdır. Şimdi $h\beta O(X) \subset \tau^*_{h\beta}$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki S kümesi $h\beta$ -kapalı bir küme olarak verilsin.

Şayet $x \notin S$ ise 4.2.1 Tanımdan her $x \in G \in \tau^{h\beta}$ şeklinde $S \cap G = \emptyset \in \zeta$ bulunur. Buradan $x \notin S^*_{h\beta}$ ve $S^*_{h\beta} \subset S$ olur. $Cl^*_{h\beta}(S) = SUS^*_{h\beta} = S$ ve $Cl^*(S) = S$ olduğundan S kümesi $\tau^*_{h\beta}$ -kapalı kümedir. Bu nedenle $h\beta O(Z) \subset \tau^*_{h\beta}$ bulunur.

4.4.7 Teorem

Verilen ideal topolojik uzay (Z, τ, ζ) için,

$\beta^*(\tau^{h\beta}, \zeta) = \{L - J \mid \exists U \in \tau^{h\beta}, J \in \zeta\}$ ailesi taban görevi görür.

Dolayısıyla, bu aile $\tau^*_{h\beta}$ topolojisi açısından bir baz teşkil eder.

İspat:

$\emptyset \in I$ her zaman sağlandığından, $L - \emptyset = \tau^{h\beta}$ ve $\tau^{h\beta} \subset \beta^*$ olup $Z = \cup \beta^*$ varılır. Bunun yanında $\beta^*_1, \beta^*_2 \in \beta^*$ ve $J_1, J_2 \in I$ ele alındığında $L_1, L_2 \in \tau^{h\beta}$ için $\beta^*_1 = L_1 - J_1$ ve $\beta^*_2 = L_2 - J_2$ yazabiliriz. Kesişimden $(L_1 \cap L_2) \in \tau^{h\beta}$ iken $\beta^*_1 \cap \beta^*_2 = (L_1 - J_1) \cap (L_2 - J_2) = (L_1 \cap (Z - J_1)) \cap (L_2 \cap (Z - J_2)) = (L_1 \cap L_2) - (J_1 \cup J_2) \in \beta^*$ olur ve böylece $(J_1 \cup J_2) \in \zeta$ elde edilir.

5. $\zeta_s * g$ h β -Kapalı Kümelerin Temel Karakteristikleri

5.1 ζ_g – h β Tipi Kapalı Kümeler

5.1.1 Tanım

(Z, τ, I) uzayı verilsin ve $S \subset Z$ kümesi için $L \in h\beta O(Z)$ olmak üzere, $S^*_{h\beta} \subset Z$ ise S kümesi ζ_g -h β -kapalı küme olarak isimlendirilir.

5.1.2 Teorem

(Z, τ, ζ) ideal bir topolojik uzay verilsin. Z 'nin bir S alt kümesi için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- 1-) S kümesi ζ_g -h β -kapalı,
- 2-) $S \subset L$ ve $L \in h\beta$ -açık olduğunda $Cl^*_{h\beta}(S) \subset L$,
- 3-) Her $x \in cl^*_{h\beta}(S)$ için, $h\beta cl(\{x\}) \cap S \neq \emptyset$,
- 4-) $cl^*_{h\beta}(S) - S$ boş kümeden farklı h β -kapalı küme bulundurmaz,
- 5-) $S^*_{h\beta} - S$ boştan farklı hiçbir h β -kapalı küme bulundurmaz.

İspat:

1) \Rightarrow 2) Varsayımdan, S kümesi ζ_g -h β -kapalı kümedir. 5.1.1 Tanım gereği $L \in h\beta O(Z)$ olmasıyla beraber, $S \subset L$ iken $S^*_{h\beta} \subset L$ olur. Buradan $S^*_{h\beta} \cup S \subset L$ elde edilir ve böylece $S \subset L$ ve $L \in h\beta O(X)$ iken $Cl^*_{h\beta}(S) \subset L$ dır.

2) \Rightarrow 3) $y \in cl^*_{h\beta}$ noktası verilsin. Şayet $Clh\beta(\{x\}) \cap B \neq \emptyset$ ise $S \subset (Z - Clh\beta(\{x\}))$ bulunur ve $S \subset (Z - Clh\beta(\{x\}))$ kümesi h β -açıktır. Varsayımdan $cl^*_{h\beta}(S) \subset Clh\beta(\{x\})$ olur. Bundan dolayı $Cl^*_{h\beta}(S) \cap Clh\beta(\{y\}) = \emptyset$ elde edilir. $x \in cl^*_{h\beta}(S)$ verildiğinden bu bir çelişkidir. Her $x \in cl^*_{h\beta}(S)$ için $Clh\beta(\{y\}) \cap S \neq \emptyset$ elde edilir.

3) \Rightarrow 4) K boş kümeden farklı h β -kapalı bir küme ve $x \in K$ iken $K \subset cl^*_{h\beta}(S) - S$ olsun. Böylelikle $K \subset Z - S$ ve $K \cap S = \emptyset$ dır. Bundan dolayı $Clh\beta(\{x\}) \cap S = \emptyset$ elde edilir. Bu ise $Clh\beta(\{x\}) \cap S \neq \emptyset$ hipoteziyle çelişir. $cl^*_{h\beta}(S) - S$ kümesi boş kümeden farklı h β -kapalı barındırmaz.

4) \Rightarrow 5) Bu kısım $S^*_{h\beta} \subset Cl^*_{h\beta}(S)$ ifadesinden anlaşılır.

5) \Rightarrow 1) L kümesi, Z kümesinin rastgele bir h β -açık kümesi olsun ve $S \subset L$ verilsin. 4.3.1 Teorem gereği $S^*_{h\beta} \cap (Z - L)$ kümesi h β -kapalı iken $S^*_{h\beta}$ kümesi h β -kapalıdır ve $S^*_{h\beta} \cap (Z - L) \subset S^*_{h\beta} - S$ bulunur. 5) ifadesinden $S^*_{h\beta} \cap (Z - L) = \emptyset$ elde edilir. Bundan dolayı $S^*_{h\beta} \subset L$ ve buradan S kümesi ζ_g -h β -kapalı kümedir.

5.2 $\zeta_{s^*g} h\beta$ -Kapalı Kümeler

5.2.1 Tanım

(Z, τ, ζ) uzayı verilsin ve $S \subset Z$ alt kümesini alalım.

$L \in SO(Z)$ ve $S \subset L$ olduğunda $S^*_{h\beta} \subset L$

oluyorsa, S kümesine $\zeta_{s^*g} h\beta$ – kapalı küme (ardışık olarak ζ_{s^*g} kapalı küme, $L \in SO(Z)$ ve $S \subset L$ iken $S^* \subset L$ [7]) denir. $\zeta_{s^*g} h\beta$ – kapalı kümenin tümleyenine $\zeta_{s^*g} h\beta$ – açık küme denir. $\zeta_{s^*g} h\beta$ – kapalı kümelerin ailesi (sırayla ζ_{s^*g} kapalı kümeler) $\zeta_{s^*g} h\beta C(Z)$ ($\zeta_{s^*g} C(Z)$) ile ifade edilir.

5.2.2 Teorem

(Z, τ, ζ) ideal topolojik uzayındaki $S \subset Z$ kümesi verilsin. S kümesi ζ_{s^*g} kapalı küme olma şartını sağlıyorsa S kümesi $\zeta_{s^*g} h\beta$ – kapalı kümedir.

İspat:

S kümesi ζ_{s^*g} kapalı küme olarak verilsin. S kümesini kapsayan her $L \in SO(Z)$ için $S^* \subset L$ elde edilir ve 4.3.6 Lemma 2) gereği $S^*_{h\beta} \subset S^* \subset L$ olma şartı vardır. Buradan S kümesi ζ_{s^*g} kapalı bir küme olarak bulunur.

5.2.3 Uyarı

5.2.2. Teoremin tersi her zaman sağlanmayabilir.

5.2.4 Örnek

$Z = \{y, v, r, k\}$ evrensel kümesi ve $\tau = \{\emptyset, Z, \{r\}, \{y, v, r\}\}$ topolojisi verilsin. Buradan $\tau_F = \{\emptyset, Z, \{k\}, \{y, v, k\}\}$ ve 2.5.4 Tanım gereği $\tau^{h\beta} = \{\emptyset, Z, \{r\}, \{z, v\}, \{y, v, k\}, \{y, v, r\}\}$ olur. $\zeta = \{\emptyset, \{k\}\}$ idealini alalım ; 5.2.1. Tanım gereği, $\zeta_{s^*g} h\beta C(Z) = \{ \emptyset, Z, \{r\}, \{k\}, \{r, k\}, \{y, v, k\} \}$ ve $\zeta_{s^*g} C(Z) = \{\emptyset, Z, \{k\}, \{y, v, k\}\}$ bulunur. Buradan dikkat edilirse $\{r\}, \{r, k\}$ kümeleri Z evrensel kümesinde $\zeta_{s^*g} h\beta C(Z)$ kümelerdir fakat $\zeta_{s^*g} C(Z)$ ailesine ait küme değildir.

5.2.5 Örnek

5.2.4 Örnekte gösterilen $\emptyset, Z, \{t\}, \{z, v, t\}$ kümeleri kapalı kümeler ve $\zeta_{s^*g} h\beta$ -kapalı küme olurlar. Fakat $\{r\}, \{r, t\}$ kümeleri $\zeta_{s^*g} h\beta$ -kapalı küme değil kapalı küme değildir.

5.2.6 Teorem

(Z, τ, ζ) ideal bir topolojik uzay ve S, G Z 'nin alt kümeleri olsun.

- 1- Eğer S ve G kümeleri ζ_{s*g} $h\beta$ -kapalı küme oluyorsa, $(S \cup G)$ kümesi ζ_{s*g} $h\beta$ -kapalıdır.
- 2- Eğer $S \subset Z$ kapalı küme oluyorsa, S kümesi ζ_{s*g} $h\beta$ -kapalıdır.
- 3- Eğer $L \subset Z$ açık küme ve S kümesi ζ_{s*g} $h\beta$ -açık oluyorsa, o zaman $(L \cap S)$ kümesi ζ_{s*g} $h\beta$ -açıktır.

İspat:

- 1) $L \in \text{SO}(Z)$ ve $(S \cup G) \subset L$ verilsin. İddiamızdan $S \subset L$ ve $G \subset L$ olur. S ve G kümeleri ζ_{s*g} $h\beta$ -kapalı kümeler olarak verildiğinden $S^*_{h\beta} \subset L$ ve $G^*_{h\beta} \subset L$ elde edilir. $S^*_{h\beta} \cup G^*_{h\beta} \subset L$ bulunur. Böylece $(S \cup G)$ ζ_{s*g} $h\beta$ -kapalıdır kümedir.
- 2) $L \in \text{SO}(Z)$ ve $B \subset L$ verilsin. 4.3.6 Lemma gereği, $S^*_{h\beta} \subset S^* \subset \text{Cl}(S) = S \subset L$ olur. Böylelikle S ζ_{s*g} $h\beta$ -kapalı kümedir.
- 3) 1) ve 2) özelliklerinin tümleyeninden rahatlıkla görülür.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Abbas F. (2020).** “On H-open sets and H-continuous functions”, *J. Appl. Comput. Math*, Vol. 9, pp. 1-5.
- [2] **Acikgoz, A., Noiri T. and B. Gölpınar (2023).** “On h-local functions in ideal topological spaces”, *Mathematica*, 65 (88), pp. 3–11.
- [3] **Dontchev J., Ganster M. and Noiri T. (1999).** “Unified operation approach of generalized closed sets via topological ideals”, *Math. Japon*, Vol. 49(3), pp. 395-401.
- [4] **Abd El-Monsef M. E., Lashien E. F. and Nasef A. A. (1992).** “Some topological operators via ideals”, *Kyungpook J. Math.*, Vol. 32(2), pp. 273 – 284.
- [5] **Jankovic D. and Hamlett T.R. (1990).** “New topologies from old via ideals”, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 97, pp. 295-310.
- [6] **Kuratowski K. (1966).**, *Topology*, Vol. I. New York, Academic Press.
- [7] **Khan M. and Hamza M. (2011).** Is*g-closed sets in ideal topological spaces, *Glob. J. PureAppli. Math.*, Vol. 7(1), pp. 89 – 99.
- [8] **Khan M. and Noiri T. (2010).** Semi-local functions in ideal topological spaces, *J. Adv. Res. Pure Math*, Vol. 2(1), pp. 36 – 42.
- [9] **Levine N. (1963).** “Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces”, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 70, pp. 36 – 41.
- [10] **Powar P. L. and Rajak K. (2012).** “Some new concepts of continuity in generalized topological space”, *Int. J. Com. Appl*, Vol. 38(5), pp. 12 – 17.
- [11] **Vaidyanathaswamy R. (1945),** “The localization theory in set-topology”, *Proc. Indian Acad. Sci.*, Vol. 20, pp. 51-61.
- [12] **Vaidyanathaswamy R. (1960).** *Set topology*, Chelsea Publishing Company. .

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Abdulhamit MAMAN

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta : _____

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Topoloji Anabilim Dalı	2022/2025
Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Matematik Bölümü	2015/2020
Lise	Çınar Anadolu Lisesi	2011/2015