

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



İKİ KOMPLEKSLER ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÜSEYİN BALCI

BALIKESİR, ARALIK - 2015

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



İKİ KOMPLEKSLER ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÜSEYİN BALCI

BALIKESİR, ARALIK - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

HÜSEYİN BALCI tarafından hazırlanan “İKİ KOMPLEKSLER ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 03.12.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy~~ ~~çeldiği~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç. Dr. Fırat ATEŞ


.....

Üye
Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ


.....

Üye
Doç. Dr. İlker İNAM


.....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

ÖZET

**İKİ KOMPLEKSLER ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HÜSEYİN BALCI
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ, FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ.DR. FIRAT ATEŞ)

BALIKESİR, ARALIK - 2015

Bu tezde serbest gruplar, grup sunuşları, graf teorisi, ağaçlar ve iki kompleks konuları ile ilgi temel tanım ve teoremler verilerek bazı uygulamalar yapılmıştır. Tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde grup sunuşları ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde graf teorisi ile ilgili grafların dönüşümleri, bir köşenin yıldızı, yolların taşınması, alt graflar, temel gruplar, indirgenmiş homomorfizma ve grafların gruplar tarafından etiketlenmesi konularına değinilerek bazı tanım ve teoremler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde graf teorisinin önemli bir bölümü olan ağaçlar konusu ile ilgili tanım ve teoremler verilerek temel grupların yapısına değinilmiştir.

Tezin son bölümünde ise iki kompleks konusu ile ilgili teoremler verilerek, uygulamalar yapılmıştır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Serbest grup, Grup sunuşu, Graf teori, Yolların taşınması, Grafların dönüşümü.

ABSTRACT

**MAPPINGS BETWEEN TWO COMPLEXES
MASTER SCIENCE THESIS
HÜSEYİN BALCI
BALIKESİR UNIVERSITY, INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF.DR. FIRAT ATEŞ)

BALIKESİR, DECEMBER - 2015

In this thesis, free groups, group presentations, graph theory, trees and two complex have been performed giving basic definitions and theorems. The thesis consists of five chapters.

Basic definitions and theorems will be used in subsequent chapters have been given in the first chapter.

Some basic definitions and theorems about the group presentations have been given in the second section.

Mapping of graphs related to graph theory, the star of a corner, lifting of paths, sub-graphs, fundemantal groups, reduced homeomorphism and some definitions and theorems have been investigated via discussing the issues of graphs labelling by groups.

Definitions and theorems related to the subject of trees that are an important part of graph theory have been given and some applications have been implemented in the fourth section.

In the last section of the thesis, giving the theorems related to the topic of two complex, some applications have been done.

KEY WORDS: Free group, Group presentation, Graph theory, Lifting of paths, Map of graphs.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	ix
1. BÖLÜM	1
1.1 Giriş.....	1
1.2 Kelimeler.....	1
1.3 Evrensel Dönüşüm Özelliği.....	4
2. GRUP SUNUŞLARI	11
2.1 Giriş.....	11
2.2 Grup Sunuşları.....	11
2.3 Grup Sunuşları ile İlgili Bazı Uygulamalar.....	15
3. GRAF TEORİSİ	17
3.1 Giriş.....	17
3.2 Graf Teorisi.....	17
3.3 Grafların Dönüşümleri.....	19
3.4 Bir Köşenin Yıldızı (Star).....	21
3.5 Yolların Taşınması.....	25
3.6 Alt Graflar.....	27
3.7 Temel Gruplar ve Yolların Eşitliği.....	28
3.8 Yolların Çarpımı.....	30
3.9 İndirgenmiş Homomorfizma.....	33
3.10 Grafların Gruplar Tarafından Etiketlenmesi.....	35
4. TEMEL GRUPLAR	38
4.1 Giriş.....	38
4.2 Ağaçlar.....	38
4.3 Temel Grupların Yapısı.....	41
4.4 Temel Grupların Alt Grupları.....	47

4.5 Yerel Olarak Birebir ve Örtten Dönüşümlerin Özellikleri	48
4.6 Γ_H in Yapısı.....	52
5. İKİ KOMPLEKS	62
5.1 Giriş	62
5.2 İki Kompleks	62
5.3 Yollar Üzerindeki İşlemler	63
5.4 İki Kompleksler Arasındaki Dönüşümler.....	65
5.5 İki Kompleksin Yerel Birebir Örtten Dönüşümleri.....	67
5.6 İki Komplekslerin Temel Gruplarını Hesaplama	68
5.7 İki Kompleksin Gruplarla Etiketlenmesi.....	71
6. KAYNAKLAR	72

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: Basit bir graf çizimi.....	18
Şekil 3.2: Graf örneği	18
Şekil 3.3: Birbirini takip eden e_1, e_2, \dots, e_n kenarlarından oluşan bir yol örneği.....	19
Şekil 3.4: Graf dönüşümü.....	20
Şekil 3.5: Graf dönüşümü örneği.....	20
Şekil 3.6: Graf dönüşümü örneği.....	24
Şekil 3.7: Graf dönüşümü örneği.....	24
Şekil 3.8: Graf dönüşümünde yolların taşınması.....	25
Şekil 3.9: Graf dönüşümü örneği.....	26
Şekil 3.10: Graf dönüşümü örneği.....	27
Şekil 3.11: Graf örneği	28
Şekil 3.12: Alt graf örneği	28
Şekil 3.13: Graf örneği	29
Şekil 3.14: Birbirini takip eden yollar	30
Şekil 3.15: Tek bir köşeye sahip graf örneği	30
Şekil 3.16: Graf örneği	31
Şekil 3.17: u dan v ye bir yol	31
Şekil 3.18: İndirgenmiş graf dönüşümü	33
Şekil 3.19: Graf örneği	35
Şekil 4.1: Ağaç örneği	39
Şekil 4.2: Kapalı bir yol.....	39
Şekil 4.3: Graf örneği	40
Şekil 4.4: Graf örneği	40
Şekil 4.5: Graf ve ağaç örneği	42
Şekil 4.6: $\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ yolu.....	43
Şekil 4.7: Graf örneği	46
Şekil 4.8: Ağaç örneği	46
Şekil 4.9: Graf dönüşümü örneği.....	47

Şekil 4.10: Grafların yıldızları.....	48
Şekil 4.11: Graf dönüşümü örneği.....	49
Şekil 4.12: Graf dönüşümünde yolların taşınması.....	49
Şekil 4.13: Birbirini takip eden yolların taşınması	50
Şekil 4.14: Γ_H graf örneği	56
Şekil 4.15: Γ_H graf örneği	61
Şekil 5.1: Tanımlı bir yolun alt yolu.....	63

SEMBOL LİSTESİ

w	Kelime
w^{-1}	w kelimesinin tersi
$w \sim v$	w ile v kelimeleri serbest olarak birbirine dektir
\sim	Kelimeler arasındaki denklik bağıntısı
$[w], \bar{w}$	w kelimesinin denklik sınıfı
$i(w)$	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	w kelimesinin bitiş harfi
1_w	Boş kelime
$F(X)$	X ile üretilmiş serbest grup
X	Üreteç kümesi
$ X $	X kümesinin eleman sayısı
1_G	G grubunun birimi
$[G : H]$	G ile H gruplarının indeksi
$\langle x \rangle$	x elemanı ile üretilen sonsuz devirli grup
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$H \cong G$	H grubu G grubuna izomorftur
$H \leq G$	H, G grubunun alt grubudur
$H \triangleleft G$	H, G grubunun normal alt grubudur
H / G	Bölüm grubu
φ	φ dönüşümünün çekirdeği
\wp	Grup sunuşu
$[w]_{\wp}$	\wp sunuşuna bağlı olarak w kelimesinin denklik sınıfı
\sim_{\wp}	\wp sunuşuna bağlı denklik bağıntısı
$[1]_{\wp}$	\wp sunuşuna bağlı grubun birimi
$G(\wp)$	\wp sunuşunun temsil ettiği grup
$\wp = \langle X; R \rangle$	G grubunun sunuşu X üreteç, R bağıntı kümesi
$\prod_1(\Gamma, \nu)$	Γ nin ν deki temel grubu

θ_*	θ dönüşümünün indirgenmesi
$Gör\phi$	ϕ dönüşümünün görüntü kümesi
K	İki Kompleks kümesi
\sim_K	K ya bağlı denklik sınıfı
\wp_K	K , iki kompleksinin sunuşu
$[\alpha]_K$	α nın K ya bağlı denklik sınıfı
\square	İspatların sonlarına konur

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda beni yönlendiren, bana zamanını ayırıp ilgisini esirgemeyen, her türlü konuda yardımcı ve örnek olan değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Fırat ATEŞ'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bugünlere kadar gelmemde üzerimde emeği olan tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Tanıştığım günden beri yardımını esirgemeyen, her türlü fedakârlığı ve sabrı gösteren sevgili eşime çok teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olduklarını bildiğim, maddi ve manevi olarak beni destekleyen sevgili aileme sonsuz teşekkürler.

Balıkesir, 2015

Hüseyin BALCI

1. BÖLÜM

1.1 Giriş

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde genel olarak kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bunu yaparken kelime yapısına ve kelimeler arasındaki işlemlere değinilmiş daha sonra da serbest gruplara ait temel tanım ve teoremlere değinilmiştir. Bu bölümle ilgili detaylı bilgilere [1-7, 11, 12, 14, 17, 23, 24, 26, 27] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

1.2 Kelimeler

X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin elemanlarını kullanarak bu kümeye bire-bir karşılık gelen ve bu X kümesinin elemanlarının terslerini temsil eden X^{-1} kümesini tanımlayalım. Ayrıca $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. Burada ki X^{\pm} kümesinin her bir elemanına *harf* denir. Harflerden oluşan

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \quad (x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N})$$

ifadesine X kümesi üzerinde bir *kelime* denir. Bu kelimeyi w ile gösterirsek, w kelimesinin başlangıç harfi $i(w) = x_1^{\varepsilon_1}$ ve bitiş harfi de $\tau(w) = x_n^{\varepsilon_n}$ olur. Eğer $n = 0$ ise *boş kelime* elde edilir ve 1_w ile gösterilir. Boş olmayan bir kelime için, $\varepsilon = +1$ oluyorsa, w kelimesine *pozitif kelime* denir.

Bir $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ kelimesinin tersi,

$$x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1}$$

kelimesi olarak tanımlanır ve w^{-1} ile gösterilir.

X kümesi üzerinde iki kelime w ve v olmak üzere w ve v kelimelerinin çarpımı, w kelimesinin devamı olarak wv şeklinde gösterilir. Verilen bu çarpım altında kelimeler üzerinde aşağıdaki şekilde işlemler tanımlanabilir.

Bir w kelimesi içinde, $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ ($x \in X, \varepsilon = \pm 1$) şeklinde ters harf çiftleri varsa bu çiftler kelimededen silinir. Yapılan bu işleme kelime üzerindeki *indirgeme* (*sadeleştirme*) işlemi denir.

Benzer şekilde bir w kelimesi içine, $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ ($x \in X, \varepsilon = \pm 1$) şeklinde ters harf çiftleri eklenebilir. Yapılan bu işleme de kelime üzerinde *ekleme işlemi* denir.

X kümesi üzerinde herhangi bir kelime, $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ ($x \in X, \varepsilon = \pm 1$) gibi ters harf çifti içermiyorsa bu kelimeye *indirgenmiş kelime* denir.

Ayrıca, $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ şeklinde verilen bir kelime için $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye *devirsel indirgenmiş kelime* denir. $n, m \in \mathbb{N}, x_i, y_j \in X, \varepsilon_i, \delta_j = \pm 1, 1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ olmak üzere, $u = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ ve $w = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$ gibi iki kelime alalım. Bu durumda u ile w arasındaki çarpma işlemi;

$$u \cdot w = (x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n})(y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$$

şeklinde tanımlanır. Tanımlanan bu işlem birleşme özelliğine sahiptir.

X kümesi üzerindeki iki kelime w ve w' olsun. Eğer bu kelimelerden biri diğerinden sadeleştirme veya ekleme işlemlerinin sonlu sayıda uygulanmasıyla elde ediliyorsa, bu iki kelimeye *serbest olarak denk kelimeler* denir ve $w \sim w'$ ile gösterilir. Bu durumun gösterimi

$$w = w_0, w_1, w_2, \dots, w_n = w'$$

şeklindedir.

1.2.1 Örnek: $w = abb^{-1}a^2$, $w' = a^3b^{-1}a^{-1}ab$ kelimelerinin birbirine serbest olarak denk olduğunu gösterelim.

$$w = w_0 = abb^{-1}a^2$$

$$\sim w_1 = a^3 \quad (\text{sadeleştirme})$$

$$\sim w_2 = a^3b^{-1}b \quad (\text{ekleme})$$

$$\sim w' = w_3 = a^3 b^{-1} a^{-1} ab \quad (\text{ekleme}). \quad \square$$

Yukarıdaki " \sim " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Herhangi bir w kelimesini içeren *serbest denklik sınıfı* $[w]$ veya \bar{w} ile gösterilir. Eğer X kümesi üzerindeki tüm kelimelerin serbest denklik sınıflarının kümesini $F(X)$ ile gösterirsek, $F(X)$ üzerindeki çarpma işlemi,

$$[w][u] = [wu] \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır.

1.2.2 Teorem [7] : X kümesi üzerinde u, u', w, w' kelimelerini alalım. Bu durumda

$$u \sim u' \text{ ve } w \sim w' \text{ ise } uw \sim u'w'$$

dir.

İspat : Eğer $u \sim u'$ ise $u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = u'$ ve $w \sim w'$ ise $w = w_0, w_1, w_2, \dots, w_n = w'$ olur. Böylece $uw = u_0w, u_1w, u_2w, \dots, u_nw = u'w$ ve $uw \sim u'w$ olur. Ayrıca $u'w = u'w_0, u'w_1, u'w_2, \dots, u'w_n = u'w'$ den $u'w \sim u'w'$ dir. Böylece $uw \sim u'w$, $u'w \sim u'w'$ ve " \sim " bağıntısı denklik bağıntısı olduğundan $uw \sim u'w'$ elde edilir. \square

1.2.3 Teorem [7] : $F(X)$ kümesi (1.1) de tanımlanan çarpma işlemine göre bir grup oluşturur.

İspat: İlk önce birleşme özelliğinin sağlandığını gösterelim. Burada $[u], [v], [w] \in F(X)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} ([u][v])[w] &= [uv][w] \\ &= [(uv)w] = [u(vw)] \end{aligned}$$

$$= [u][vw] = [u]([v][w])$$

şeklindedir.

Ayrıca, $[w] \in F(X)$ için,

$$[1_w][w] = [1_w w] = [w] \text{ ve } [w][1_w] = [w 1_w] = [w]$$

olacak şekilde $[1_w] \in F(X)$ birim elemanı vardır.

Son olarak, her $[w] \in F(X)$ için,

$$[w^{-1}].[w] = [w^{-1}w] = [1_w] = [ww^{-1}] = [w].[w^{-1}]$$

olacak şekilde $[w^{-1}] \in F(X)$ ters elemanı vardır. \square

1.2.4 Tanım: Yukarıdaki teoremden verilen gruba X üzerindeki *serbest*

grup denir.

1.3 Evrensel Dönüşüm Özelliği

Aşağıda verilen teoremler serbest grup teorisinde çok önemli bir yere sahip olup, özellikle grup sunularını oluşturmada kullanılan teoremlerdir.

1.3.1 Teorem (Evrensel Dönüşüm Özelliği) [7, 14]: G bir grup, X_0 bir $F(X)$ serbest grubunun üreteç kümesi olmak üzere herhangi bir $\varphi_0 : X_0 \rightarrow G$ dönüşümü için $\varphi : F(X) \rightarrow G$ olacak şekilde tek bir grup homomorfizması vardır.

İspat: Varsayımımız gereği $F(X)$ bir serbest grup olduğundan $X_0 = \{[x] : x \in X\}$ kümesi tarafından üretilir. $\varphi_0 : X_0 \rightarrow G$ dönüşümü her $x \in X$ için

$$\varphi_0([x]) = g_x \quad (g_x \in G)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Şimdi $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ ($x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n$) şeklinde üreteç kümesinden bir kelime olsun. $F(X)$ serbest grubunun w kelimesine

serbest olarak denk olan elemanların kümesi $[w]$ denklik sınıfı olarak gösterelim. Varsayımımız gereği $[w]$ denklik sınıfının φ altındaki görüntüsü,

$$\varphi([w]) = g_{x_1}^{\varepsilon_1} g_{x_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{x_n}^{\varepsilon_n}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\varphi : F(X) \rightarrow G$ dönüşümünün iyi tanımlı, homomorfizma ve tek olarak belirli olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

Şimdi φ nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Yani $[u], [v] \in F(X)$ için $[u] \sim [v]$ ise $\varphi([u]) = \varphi([v])$ olduğunu gösterelim.

Özel durum, varsayalım ki v kelimesi u kelimesinden indirgeme işlemi ile elde edilmiş olsun. Bu durumda

$$u = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_m^{\varepsilon_m} x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon} x_{m+1}^{\varepsilon_{m+1}} \dots x_n^{\varepsilon_n} = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_m^{\varepsilon_m} x_{m+1}^{\varepsilon_{m+1}} \dots x_n^{\varepsilon_n} = v$$

u kelimesinin φ dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned} \varphi([u]) &= g_{x_1}^{\varepsilon_1} g_{x_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{x_m}^{\varepsilon_m} g_x^{\varepsilon} g_x^{-\varepsilon} g_{x_{m+1}}^{\varepsilon_{m+1}} \dots g_{x_n}^{\varepsilon_n} \\ &\sim g_{x_1}^{\varepsilon_1} g_{x_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{x_m}^{\varepsilon_m} g_{x_{m+1}}^{\varepsilon_{m+1}} \dots g_{x_n}^{\varepsilon_n} = \varphi([v]) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Genel durum, eğer u ve v serbest olarak denk kelimeler ise bu durumda u kelimesini v kelimesine bağlayan, $u = u_0, u_1, \dots, u_r = v$ şeklinde u_{i+1}, u_i 'den ($i = 0, 1, \dots, r-1$) sadeleştirme işlemi ile elde edilen sonlu bir zincir vardır. Özel Durum'dan dolayı bu kelimelerin φ dönüşümü altındaki görüntüleri eşit olmak zorundadır. Yani $\varphi([u_i]) = \varphi([u_{i+1}])$ dir. Böylece

$$\varphi([u]) = \varphi([u_0]) = \varphi([u_1]) = \dots = \varphi([u_r]) = \varphi([v])$$

olur.

Şimdi φ nin homomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için $[w], [v] \in F(X)$ olmak üzere, $\varphi([w][v]) = \varphi([w])\varphi([v])$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Üreteç kümesinden herhangi iki kelime,

$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ ve $v = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$ öyle ki $(x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots, n)$ ve $(y_i \in X, \delta_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots, m)$ şeklinde olsunlar.

Bu kelimelere denk olan kelimelerin denklik sınıfları $[w]$ ve $[v]$ olmak üzere, bu denklik sınıflarının (1.1) de tanımlanan çarpımın φ dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned}\varphi([w][v]) &= \varphi([wv]) \\ &= g_{x_1}^{\varepsilon_1} g_{x_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{x_n}^{\varepsilon_n} g_{y_1}^{\delta_1} g_{y_2}^{\delta_2} \dots g_{y_m}^{\delta_m} \\ &= \varphi[w]\varphi[v]\end{aligned}$$

olur. Böylece φ dönüşümünün φ_0 dönüşümünün genişlemesi olan bir homomorfizma olduğu gösterilmiş olur. \square

Aşağıda verilen önerme yardımıyla φ fonksiyonun tek olduğu kolaylıkla gösterilir.

1.3.2 Önerme [7]: H, A kümesi tarafından üretilen bir grup ve K ise herhangi bir grup olmak üzere $\alpha, \beta: H \rightarrow K$ şeklinde bir homomorfizması için, $\alpha|_A = \beta|_A$ oluyor ise $\alpha = \beta$ dir.

1.3.3 Teorem [14]: Her grup bir serbest grubun homomorfik görüntüsüdür.

İspat: G bir grup, A ise bu grubun üreteç kümesi olmak üzere $X_0 = \{[x_a]: a \in A\}$ kümesini belirleyelim. Bu kümenin elemanları A kümesinin elemanlarıyla ve aynı zamanda X_0 kümesinin üreteceği serbest grubun elemanlarıyla 1-1 eşlenir.

$$\phi_0: X_0 \rightarrow G$$

$$[x_a] \mapsto a$$

dönüşümü için Teorem 1.3.1 gereği genişlemesi olan bir tek homomorfizma vardır. Bu homomorfizmayı

$$\phi: F(X) \rightarrow G$$

olarak gösterelim. Burada $A \subseteq \text{Gör } \phi$ ve $\text{Gör } \phi, G$ grubunun bir alt grubudur. Aynı zamanda $\text{Gör } \phi, A$ kümesini içeren en küçük alt gruptur. Bununla birlikte A kümesi G grubunun üretici olduğundan G grubu da A kümesini içeren en küçük alt gruptur. Dolayısıyla $\text{Gör } \phi = G$ olur. Yani ϕ homomorfizması örtendir. Birinci izomorfizma teoreminden $G \cong \frac{F(X)}{\text{çek}\phi}$ bulunur. \square

1.3.4 Teorem (Normal Form Teoremi) [6] : Her bir serbest denklik sınıfı tek bir indirgenmiş kelime içerir.

1.3.5 Teorem [6]: G bir grup olmak üzere $Z(G)$, G grubunun merkezi olsun. $|X| > 1$ ise $Z(F(X)) = 1$ dir.

1.3.6 Teorem [6]: $|X| = 1$ ise $F(X)$ serbest grubu sonsuz devirli, değişmeli ve $Z(F(X)) = F(X)$ dir.

İspat: $X = \{x\}$ elemanını içeren tek elemanlı bir küme ve C, t tarafından üretilen sonsuz devirli bir grup olsun. Burada

$$\varphi_0 : X \rightarrow C, \varphi_0(x) = t$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\varphi : F(X) \rightarrow C$$

$$\varphi([x]) = \varphi_0(x) = t$$

olacak biçimde tek bir φ genişlemesi vardır.

$F(X)$ serbest grubunun sonsuz devirli olduğunu göstermek için φ homomorfizmasının birebir ve örten yani izomorfizma olduğunu göstermek gereklidir.

İlk olarak φ homomorfizmasının birebirliğini inceleyelim. Burada $[w_1], [w_2] \in F(X)$ olmak üzere, $\varphi[w_1] = \varphi[w_2]$ ise $[w_1] = [w_2]$ koşulunu araştıralım. Bunun için $\varphi[w_1] = \varphi[w_2]$ olsun. Eğer $w_1 = x^{b_1}$ ve $w_2 = x^{b_2}$ olarak seçilirse $t^{b_1} = t^{b_2}$ olur. Buradan da $t^{b_1-b_2} = 1$ den ve $\langle t \rangle$ sonsuz devirli olduğundan, $b_1 - b_2 = 0$ dir. Dolayısıyla $b_1 = b_2$ olup $x^{b_1} = x^{b_2}$ dir. Böylece $[w_1] = [w_2]$ sonucuna ulaşılır. Buda bize φ nin bire birliğini verir.

Herhangi bir $[x] \in F(X)$ için $\varphi_0(x) = t$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ var olduğundan, φ örtendir.

Tüm bu sonuçlar doğrultusunda φ homomorfizması bir izomorfizmadır. Buna bağlı olarak $F(X)$ serbest grubu C devirli grubuna izomorftur. Aynı zamanda değişmelidir. Dolayısıyla $Z(F(X)) = F(X)$ olur. \square

1.3.7 Teorem [7]: X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanan serbest gruplar $F(X)$ ve $F(Y)$ olmak üzere,

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow F(X) \cong F(Y)$$

dir.

İspat: İlk olarak $|X| = |Y| = n$ iken $F(X) \cong F(Y)$ olduğunu gösterelim.

$X_0 = \{[x] : x \in X\}$ ve $Y_0 = \{[y] : y \in Y\}$ olmak üzere,

$$\phi_0 : X_0 \rightarrow F(Y)$$

$$x_i \mapsto [y_i] \quad (x_i \in X, y_i \in Y, i = 1, \dots, n)$$

dönüşümü için Teorem 1.3.1 den,

$$\phi : F(X) \rightarrow F(Y)$$

$$\phi([x_i]) = \phi_0(x_i) \mapsto [y_i]$$

şeklinde ϕ_0 dönüşümünün genişlemesi olan bir tek grup homomorfizması vardır.

Benzer şekilde,

$$\varphi_0 : Y_0 \rightarrow F(X)$$

$$y_i \mapsto [x_i] \quad (y_i \in Y, x_i \in X, i = 1, \dots, n)$$

dönüşümü için Teorem 1.3.1 den,

$$\varphi : F(Y) \rightarrow F(X)$$

$$\varphi([y_i]) = \varphi_0(y_i) \mapsto [x_i]$$

şeklinde φ_0 dönüşümünün genişlemesi olan bir tek grup homomorfizması vardır.

Burada

$$\varphi \circ \phi : F(X) \rightarrow F(X) \text{ ile } \phi \circ \varphi : F(Y) \rightarrow F(Y)$$

fonksiyonlarının birim dönüşümler olduğu gösterilirse, $\phi = \varphi^{-1}$ ve $\varphi = \phi^{-1}$ sonucuna ulaşırız. Böylece ϕ ve φ birebir ve örten homomorfizma olur, dolayısıyla izomorfizma olurlar. Buda bize $F(X) \cong F(Y)$ sonucunu verir.

Ayrıca $[x_i] \in F(X)$ olmak üzere,

$$\varphi(\phi[x_i]) = \varphi[\phi_0(x_i)] = \varphi([y_i]) = \varphi_0(y_i) = [x_i] \in F(X)$$

olur. Genel olarak $[x] \in F(X)$ için $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi(\phi[w]) &= \varphi(\phi([x_1^{\varepsilon_1}][x_2^{\varepsilon_2}] \dots [x_n^{\varepsilon_n}])) \\ &= \varphi(\phi([x_1]^{\varepsilon_1}[x_2]^{\varepsilon_2} \dots [x_n]^{\varepsilon_n})) \\ &= \varphi(\phi([x_1])^{\varepsilon_1} \phi([x_2])^{\varepsilon_2} \dots \phi([x_n])^{\varepsilon_n}) \\ &= \varphi([y_1]^{\varepsilon_1}[y_2]^{\varepsilon_2} \dots [y_n]^{\varepsilon_n}) \\ &= [x_1]^{\varepsilon_1}[x_2]^{\varepsilon_2} \dots [x_n]^{\varepsilon_n} \\ &= [w] \end{aligned}$$

olduğundan ve benzer şekilde $[w] \in F(Y)$ için $\phi(\varphi[w]) = [w]$ eşitliği de kolayca gösterilebilir.

İspatın diğeri için varsayalım ki $F(X) \cong F(Y)$ olsun. Burada $C = \langle t \rangle$ olmak üzere mertebesi 2 olan C devirli grubunu alalım. Burada

$$\varphi_0 : X \rightarrow C = \{1, t\}$$

için $x_i \rightarrow 1$ veya $x_i \rightarrow t$ olacak biçimde $2^{|X|}$ tane dönüşüm olup Teorem 1.3.1 den,

$$\varphi : F(X) \rightarrow C$$

için $\varphi([x_i]) = \varphi_0(x_i) = 1$ veya $\varphi([x_i]) = \varphi_0(x_i) = t$ olacak biçimde $2^{|X|}$ tane homomorfizma vardır.

Benzer şekilde,

$$\psi_0 : Y \rightarrow C$$

için $y_i \rightarrow 1$ veya $y_i \rightarrow t$ olacak biçimde $2^{|Y|}$ tane dönüşüm olup Teorem 1.3.1 den,

$$\psi : F(Y) \rightarrow C$$

için $\psi([y_i]) = \psi_0(y_i) = 1$ veya $\psi([y_i]) = \psi_0(y_i) = t$ olacak biçimde $2^{|Y|}$ tane homomorfizma bulunur.

Varsayımımız gereği $F(X) \cong F(Y)$ olduğundan $2^{|X|} = 2^{|Y|}$ olur. Dolayısıyla $|X| = |Y|$ bulunur. \square

2. GRUP SUNUŞLARI

2.1 Giriş

Grup sunuşları, gruplar ile ilgili birçok önemli problemlerin çözümünde kolaylık sağladığından, bu bölümde grup sunuşları detaylı olarak incelenip gerekli temel kavramlar verilerek bazı örnekler çözülecektir. Grup sunuşları ile ilgili daha detaylı bilgilere [1, 2, 6, 10, 12, 14, 16, 19, 20, 21, 22, 28, 29] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

2.2 Grup Sunuşları

2.2.1 Tanım: X bir küme ve R ise X kümesi üzerinde devirsel indirgenmiş kelimelerin bir kümesi olmak üzere, herhangi bir G grubunun sunuşu,

$$\wp = \langle X, R \rangle$$

biçiminde tanımlanır. Burada X kümesine *üreteç kümesi*, R kümesine ise *bağıntı kümesi* denir. Eğer X ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise bu durumda \wp sunuşu sonludur denir.

2.2.2 Tanım: X kümesi üzerinde aldığımız iki kelime w_1 ve w_2 olmak üzere w_1 kelimesinden w_2 kelimesine ekleme ve indirgeme işlemlerinin sonlu sayıda uygulanmasıyla ulaşılabiliriyorsa w_1 ve w_2 kelimelerine \wp sunuşuna göre *denk kelimeler* denir.

Bu denklik,

$$w_1 \sim_{\wp} w_2$$

ile gösterilir. Buradaki \sim_{\wp} bağıntısı X kümesi üzerindeki bütün kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. w kelimesini içeren denklik sınıfı $[w]_{\wp}$ ile gösterilir. Bazı durumlarda \bar{w} ile de gösterilir. Bu denklik sınıfı üzerinde çarpma işlemi,

$$[w_1]_{\wp} [w_2]_{\wp} = [w_1 w_2]_{\wp}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpma işlemi altında tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup oluşturur. Bu grup $G(\wp)$ ile gösterilir ve birimi $[1]_{\wp}$ dir.

Eğer $G \cong G(\wp)$ ise G grubu \wp ile *sunuluyor* ya da *tanımlanıyor* denir. Aslında \wp sunuşu ile tanımlanan $G(\wp)$ grubunun elemanları denklik sınıfları olup her $r \in R$ için, $[r] \in F(X)$ biçimindedir. $N = \{[r]: r \in R\}$ kümesi $[r]$ denklik sınıfını içeren en küçük normal alt grup olan normal kapanış kümesidir.

2.2.3 Teorem [14]: N kümesi, $F(X)$ grubunun elemanlarını içeren en küçük normal alt grup olmak üzere,

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

dir.

İspat: \wp sunuşu ile tanımlanan $G(\wp)$ grubu ve X kümesi için,

$$\varphi_0 : X \rightarrow G(\wp)$$

$$x \mapsto [x]_{\wp}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Teorem 1.3.1 den bu dönüşümün genişlemesi,

$$\varphi : F(X) \rightarrow G(\wp)$$

$$[w] \mapsto [w]_{\wp}$$

olacak şekilde tek bir homomorfizma vardır ve $\varphi|_X = \varphi_0$ dir. Buradaki φ homomorfizması örten olup $\wp = N$ dir. Dolayısıyla Birinci İzomorfizma Teoremi'ne göre,

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

olur. \square

2.2.4 Örnek: $\wp = \langle x; x^n \rangle$ ise $G(\wp)$ nin n mertebeli, sonlu sunuşlu devirli bir grup olduğunu gösterelim.

Burada $C = \langle c \rangle$, n mertebeli devirli bir grup ve F , $\{x\}$ ile üretilen serbest grup olsun. Bu durumda

$$[x] \mapsto C$$

dönüşümü için Teorem 1.3.1 de tanımlanan Evrensel Dönüşüm özelliğinden

$$\varphi : F(X) \rightarrow C$$

şeklinde tek bir grup homomorfizması vardır. Normal kapanış kümesi olan N , $[x^n]$ şeklinde denklik sınıflarını içersin. Dolayısıyla Teorem 2.2.3 den,

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

dir. İspatın tamamlanması için $N = \wp$ olduğunu göstermeliyiz. Burada

$\varphi([x^n]) = \varphi([x])^n = c^n = 1$ olduğundan $[x^n] \in \wp$ dir. Dolayısıyla \wp , $[x^n]$ denklik sınıfını içeren bir normal alt gruptur ve N grubunun tanım gereği $N \subseteq \wp$ dir. Şimdi $[x^k] \in \wp$ olsun. Bu durumda, $\varphi([x^k]) = \varphi([x])^k = c^k = 1$ olduğundan $n|k \Rightarrow k = n \cdot m$ ($m \in \mathbb{Z}^+$) dir.

Buradan da $[x^k] = [x^{nm}] = [x^n]^m \in N$ elde edilir. Bu ise bize $\wp \subseteq N$ olduğunu verir. Böylece

$$G(\varphi) \cong F(X)/N = F(X)/\text{çek } \varphi \cong \text{Gör } \varphi = C$$

Diğer bir deyişle $G(\varphi)$, istendiği gibi n mertebeli devirli bir gruptur. Ayrıca $G(\varphi)$ sonlu sunuşludur. \square

2.2.5 Teorem [16]: X üreteçlerin kümesi, A ise herhangi bir grup olmak üzere,

$$\theta : X \rightarrow A$$

$$x \mapsto a_x$$

dönüşümü için,

$$\varphi : G(\varphi) \rightarrow A$$

$$[x]_{\varphi} \mapsto a_x$$

şeklinde bir homomorfizmanın var olması için gerek ve yeter koşul her $r \in R$ için $\theta(r) = 1_A$ olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki her $r \in R$ için $\theta(r) = 1_A$ olsun. Evrensel Dönüşüm Özelliği'nden,

$$\varphi : F(X) \rightarrow A$$

$$[w] \mapsto a_x$$

olacak biçimde bir tek grup homomorfizması vardır. Burada, $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ olmak üzere $\varphi([w]) = \theta(w) = a_{x_1}^{\varepsilon_1} a_{x_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{x_n}^{\varepsilon_n}$ dir. $N = \{[r] : r \in R\} \subseteq \text{çek } \varphi$ olarak bulunur. Çünkü $\varphi([r]) = \theta(r) = 1_A$ dir. Ayrıca $\{[r] : r \in R\}$ kümesini içeren en küçük normal alt grup N olduğundan, $N \subseteq \text{çek } \varphi$ yazabiliriz. Şimdi,

$$\psi : F(x)/N \rightarrow A \text{ öyle ki } \psi([w]N) = \varphi([w])$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca $[w_1]N = [w_2]N$ için $[w_1]^{-1}[w_2] \in N \subseteq \ker \varphi$ olduğundan, $\varphi([w_1]^{-1}[w_2]) = 1_A$ bulunur. Dolayısıyla $\varphi([w_1]) = \varphi([w_2])$ eşitliğinden de $\psi([w_1]N) = \psi([w_2]N)$ bulunur. Bu ise bize ψ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu verir. Ayrıca ψ dönüşümünün bir grup homomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece,

$$\psi([x]_\varphi) = \psi([x]N) = \varphi([x]) = \theta(x) = a_x$$

eşitliğide sağlanmış olur.

Şimdi de ispatın diğer tarafı için, böyle bir φ homomorfizmasının olduğunu kabul edelim. Her $r \in R$ için $[r]N = 1_G$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $r = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ olmak üzere,

$$[r]N = [x_1]^{\varepsilon_1} N [x_2]^{\varepsilon_2} N \dots [x_n]^{\varepsilon_n} N = [x_1^{\varepsilon_1}]_\varphi [x_2^{\varepsilon_2}]_\varphi \dots [x_n^{\varepsilon_n}]_\varphi$$

olduğunda $\varphi([x_1^{\varepsilon_1}]_\varphi [x_2^{\varepsilon_2}]_\varphi \dots [x_n^{\varepsilon_n}]_\varphi) = a_{x_1^{\varepsilon_1}} a_{x_2^{\varepsilon_2}} \dots a_{x_n^{\varepsilon_n}} = \theta(r)$ elde edilir.

Buda bize her $r \in R$ için $\theta(r) = 1_A$ olduğunu verir. \square

2.3 Grup Sunuşları İle İlgili Bazı Uygulamalar

Bu kısımda bir önceki bölümde verdiğimiz teorem ve sonuçların bazı örneklemelerini yapacağız.

2.3.1 Örnek: $\varphi = \langle x, y; x^2, y^3, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ sunuşunun temsil ettiği $G(\varphi)$ grubunun 6 mertebeli $C = \langle c \rangle$ devirli grubuna izomorf olduğunu gösterelim.

$\theta(x) = c^p$, $\theta(y) = c^q$ olacak biçimde bir homomorfizma tanımlayalım. θ bir grup homomorfizması olduğundan $\theta(x^2) = 1$, $\theta(y^3) = 1$ ve $\theta(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$ dir.

Burada $c^{2p} = 1$, $c^{3q} = 1$ ve $c^p c^q c^{-p} c^{-q} = 1$ olduğundan $p = 3$ ve $q = 2$ olarak bulunur. Evrensel Dönüşüm Özelliğinden,

$$\varphi : G(\wp) \rightarrow C$$

$$\bar{x} \mapsto c^3$$

$$\bar{y} \mapsto c^2$$

olacak biçimde bir tek grup homomorfizması vardır. Burada her $r \in R$ için $\theta(r) = 1$ olduğundan $Gör \varphi$, C nin alt grubu ve $c^3 c^{-2} = c \in Gör \varphi$, c üreteç olduğundan $c, c^2, c^3, c^4, c^5, 1 \in Gör \varphi = C$ dir. \square

2.3.2 Örnek: $\wp = \langle x, y; x^2, y^3, (xy)^2 \rangle$ sunuşunun temsil ettiği $G(\wp)$ grubunun S_3 grubuna örten bir homomorfizma olduğu gösterelim.

$X = \{x, y\}$ ile üretilen $F(X)$ serbest grubunu göz önüne alalım. Ayrıca dönüşümü

$$\theta : X \rightarrow S_3$$

$$\theta(x) = \sigma \text{ ve } \theta(y) = \tau$$

olacak biçimde tanımlayalım. Burada $\sigma^2 = 1$, $\tau^3 = 1$, $(\sigma\tau)^2 = 1$ eşitliğini sağlayacak $\sigma = (12)$, $\tau = (123)$ permütasyonlarını alalım. Böylece $(\sigma\tau)^2$ için $\sigma\tau = (12)(123) = (23)$ ise $(\sigma\tau)^2 = 1$ dir. Evrensel Dönüşüm Özelliğinden ψ homomorfizmasına genişletebiliriz. Burada

$$\psi : G(\wp) \rightarrow S_3$$

$$\bar{x} \mapsto (12)$$

$$\bar{y} \mapsto (123)$$

homomorfizması örtendir. Çünkü her $\sigma \in S_3$ için en az bir $[z] \in G(\wp)$ vardır. Öyleki $\psi([z]) = \sigma$ olur. \square

3. GRAF TEORİSİ

3.1 Giriş

Graf teorisi 1736 yılında Leonhard Euler tarafından ilk defa kullanılmış bir kavramdır. Ayrıca Euler kendisinin yazdığı Königsberg köprüleri sorusunu graflar yardımıyla çözümlenerek yeni bir matematik dalı ortaya çıkarmıştır.

Bu bölümde graflar ile ilgili gerekli temel kavramlar, grafların özellikleri ve bazı teoremler ve ispatlara yer verilecektir. Bu bölümdeki bilgilere [6, 7, 8, 9, 11, 13, 18, 19, 23, 24, 30] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

3.2 Graf Teorisi

V ve E boştan farklı kümeler olmak üzere ve $i, \tau, {}^{-1}$ fonksiyonları, her $e \in E$ için,

$$i : E \rightarrow V$$

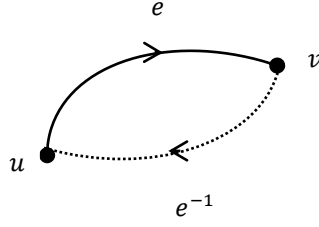
$$\tau : E \rightarrow V$$

$${}^{-1} : E \rightarrow V$$

$$i(e^{-1}) = \tau(e) \quad (\Leftrightarrow \tau(e^{-1}) = i(e)), \quad (e^{-1})^{-1} = e$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $\Gamma = (V, E, i, \tau, {}^{-1})$ ye bir *graf* denir. Burada V kümesi köşelerin kümesi, E kümesi kenarların kümesidir. Graflar köşelerin uç noktaları gösterilerek çizilir. e bir kenar olmak üzere, $i(e) = u$, $\tau(e) = v$ için e

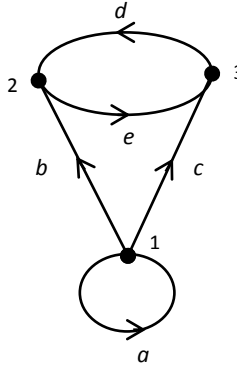
kenarı u dan başlayıp v de biten doğrudan bir çizgi ile çizilir. Ayrıca e^{-1} , v den başlar ve u da biter.



Şekil 3.1: Basit bir graf çizimi

Graflar çizilirken genellikle e veya e^{-1} den biri kullanılır.

3.2.1 Örnek:



Şekil 3.2: Graf örneği

$V = \{1,2,3\}$, $E = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}, d, d^{-1}, e, e^{-1}\}$ kümeleri veriliyor. Şekil 3.2 de çizilmiş olan graf örneğine göre bazı kenarların i ve τ fonksiyonları,

$$i(d) = 3, \tau(d) = 2$$

$$i(a) = \tau(a) = 1$$

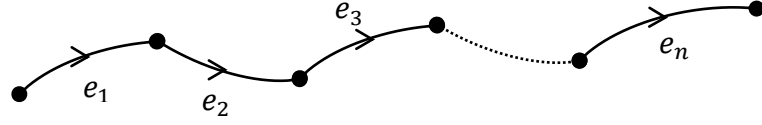
$$i(c^{-1}) = 3, \tau(c^{-1}) = 1$$

şeklindedir.

α birbirini takip eden e_1, e_2, \dots, e_n kenarlarından oluşan bir yol ise

$$\tau(e_i) = i(e_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

dir.



Şekil 3.3: Birbirini takip eden e_1, e_2, \dots, e_n kenarlarından oluşan bir yol örneği

Burada Şekil 3.3 deki α yolu $i(\alpha) = i(e_1)$, $\tau(\alpha) = \tau(e_n)$ olarak ifade edilir.

3.2.2 Tanım: Graf üzerinde alınan herhangi bir α yolu için $i(\alpha) = \tau(\alpha)$ ise α ya *kapalı bir yol* denir.

3.2.3 Örnek: Şekil 3.2 deki graf üzerinde alınan $\alpha = a^{-1}bd^{-1}c^{-1}ac$ yolu için $i(\alpha) = 1$, $\tau(\alpha) = 3$ tür. Bu durumda α kapalı bir yol değildir. Ayrıca, $\alpha^{-1} = c^{-1}a^{-1}cdb^{-1}a$ dir.

3.2.4 Tanım: α bir yol olmak üzere, $\tau(\alpha^{-1}) = i(\alpha)$, $i(\alpha^{-1}) = \tau(\alpha)$ ise α *boş yoldur* denir. v herhangi bir köşe olarak alınırsa boş yolu 1_v olarak gösteririz. Boş yolun hiç kenarı yoktur. Ayrıca, $i(1_v) = \tau(1_v) = v$ ve $1_v^{-1} = 1_v$ dir.

3.3 Grafların Dönüşümleri

3.3.1 Tanım: $\Gamma = (V, E, i, \tau, ^{-1})$ ve $\Gamma^1 = (V^1, E^1, i, \tau, ^{-1})$ grafları verilsin.

Buna göre;

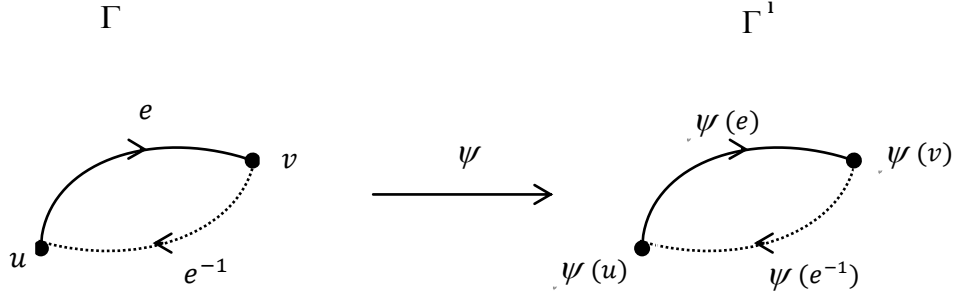
$\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma^1$ köşeyi köşeye, kenarı kenara gönderen ve her $e \in E$ için,

$$\psi(i(e)) = i(\psi(e))$$

$$\psi(\tau(e)) = \tau(\psi(e))$$

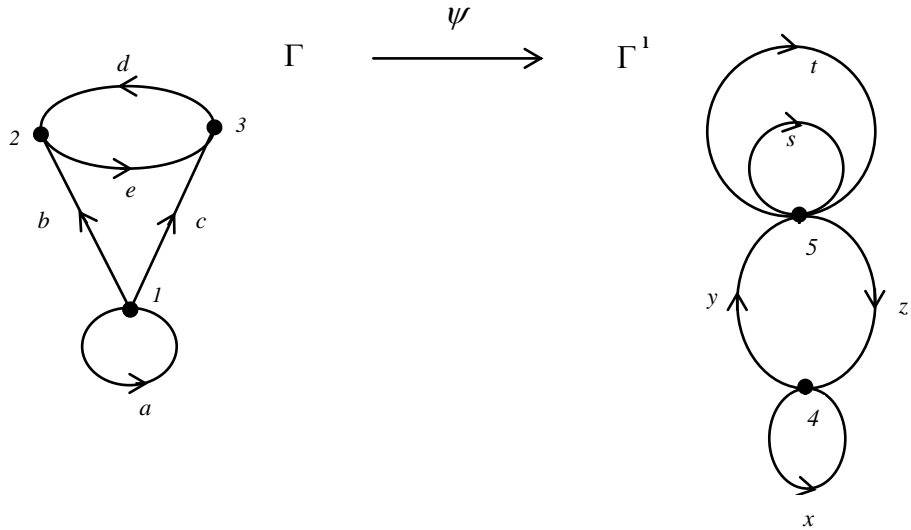
$$\psi(e^{-1}) = \psi(e)^{-1}$$

özelliklerini sağlayan dönüşümüne graf dönüşümü adı verilir.



Şekil 3.4: Graf dönüşümü

3.3.2 Örnek:



Şekil 3.5: Graf dönüşümü örneği

Şekil 3.5 de verilen Γ ve Γ^1 grafları için $\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma^1$ fonksiyonu,

$$\begin{array}{ll}
 l \mapsto 4 & c \mapsto z^{-1} \\
 2,3 \mapsto 5 & c^{-1} \mapsto (z^{-1})^{-1} = z \\
 a \mapsto x & d \mapsto s \\
 a^{-1} \mapsto x^{-1} & e \mapsto t^{-1} \\
 b \mapsto y & d^{-1} \mapsto s^{-1} \\
 b^{-1} \mapsto y^{-1} & e^{-1} \mapsto t
 \end{array}$$

olarak tanımlanabilir. Bu bir graf dönüşümüdür.

Eğer $\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ Γ de bir yol ise $\psi(e_1) \psi(e_2) \dots \psi(e_n)$ Γ^1 de bir yoldur. Bunu kolayca şöyle gösterebiliriz;

$$\tau(\psi(e_i)) = \psi(\tau(e_i)) = \psi(i(e_{i+1})) = i(\psi(e_{i+1})) \quad (i=1,2,\dots,n-1) \quad \text{ve}$$

$\psi(\alpha^{-1}) = \psi(\alpha)^{-1}$ dir. Ayrıca boş yol için $\psi(1_v) = 1_{\psi(v)}$ olarak tanımlanır.

3.3.3 Not: Eğer α kapalı ise $\psi(\alpha)$ kapalıdır. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin, Şekil 3.5 den aldığımız $\alpha = ede$ yolu kapalı değildir. Ancak $\psi(\alpha) = t^{-1}st^{-1}$ yolu kapalıdır.

3.4 Bir Köşenin Yıldızı (Star)

$\Gamma = (V, E, i, \tau, ^{-1})$ grafi verilsin. Buna göre

$$\text{star}(v) = \{e: e \in E, i(e) = v\}$$

kümesine v köşesinin yıldızı (starı) denir.

3.4.1 Örnek: Şekil 3.5 deki Γ grafının köşelerinin starları,

$$\text{star}(1) = \{b, c, a, a^{-1}\}$$

$$\text{star}(2) = \{d^{-1}, e, b^{-1}\}$$

$$\text{star}(3) = \{d, e^{-1}, c^{-1}\}$$

$$\text{star}(4) = \{y, z^{-1}, x, x^{-1}\}$$

$$\text{star}(5) = \{y^{-1}, z, s, s^{-1}, t, t^{-1}\}$$

dır.

3.4.2 Tanım: $\text{star}(v)$ deki kenarların sayısına v nin derecesi denir. $d(v)$ olarak gösterilir.

3.4.3 Önerme [8]: Γ ve Γ^1 grafları verilsin. $\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma^1$ bir graf dönüşümü olmak üzere Γ nin herhangi bir v köşesi için,

$$\psi(\text{star}(v)) \subseteq \text{star}(\psi(v))$$

dir.

İspat: v ve v^1 sırasıyla Γ ve Γ^1 de iki köşe e , Γ de bir kenar olmak üzere, $\psi(v) = v^1$ ve $e \in \text{star}(v)$ olsun. Buna göre $i(\psi(e)) = \psi(i(e)) = \psi(v) = v^1$ ve böylece $\psi(e) \in \text{star}(v^1)$ dir. \square

3.4.4 Örnek: Şekil 3.5 deki Γ grafını incelediğimizde,

$$\psi(\text{star}(1)) = \psi\{b, c, a, a^{-1}\} = \{y, z^{-1}, x, x^{-1}\} = \text{star}(4) = \text{star}(\psi(1))$$

$$\psi(\text{star}(2)) = \psi\{d^{-1}, e, b^{-1}\} = \{s^{-1}, t^{-1}, y\} \subseteq \text{star}(5) = \text{star}(\psi(2))$$

$$\psi(\text{star}(3)) = \psi\{d, e^{-1}, c^{-1}\} = \{z, s, t\} \subseteq \text{star}(5) = \text{star}(\psi(3))$$

elde edilir.

3.4.5 Tanım: $\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma^1$ bir graf dönüşümü olsun. Γ nin herhangi bir v köşesi için, $v \in V$

- (i) eğer ψ dönüşümü, her bir köşenin yıldızı üzerinde birebir ise ψ yerel birebirdir denir. Yani, her $v \in V$ için

$$\psi \Big|_{\text{star}(v)} : \text{star}(v) \rightarrow \text{star}(\psi(v))$$

birebir ise ψ de yerel birebirdir.

- (ii) eğer ψ dönüşümü, her bir köşenin yıldızı üzerinde örten ise ψ yerel örtendir denir. Yani, her $v \in V$ için

$$\psi \Big|_{\text{star}(v)} : \text{star}(v) \rightarrow \text{star}(\psi(v))$$

örten ise ψ yerel örtendir.

- (iii) eğer ψ dönüşümü, her bir köşenin yıldızı üzerinde birebir ve örten ise ψ yerel birebir ve örtendir denir. Yani, her $v \in V$ için

$$\psi \Big|_{\text{star}(v)} : \text{star}(v) \rightarrow \text{star}(\psi(v))$$

birebir ve örten ise ψ yerel birebir ve örtendir.

3.4.6 Örnek: Şekil 3.5 e göre $\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma^1$ için,

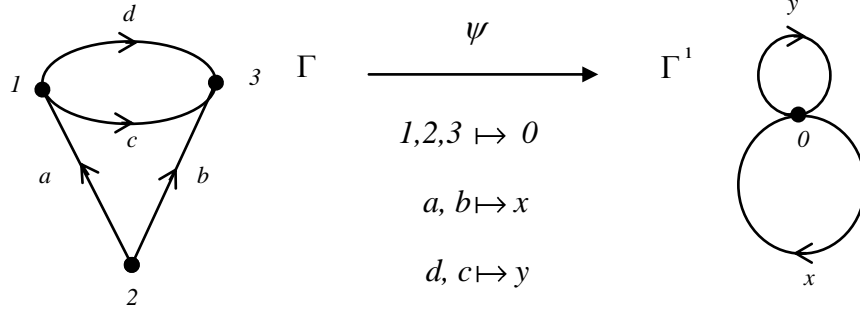
$$\psi_1: \{b, c, a, a^{-1}\} \rightarrow \{y, z^{-1}, x, x^{-1}\} \text{ dönüşümü birebir ve örtendir.}$$

$$\psi_2: \{d^{-1}, e, b^{-1}\} \rightarrow \{y^{-1}, z, s, s^{-1}, t, t^{-1}\} \text{ dönüşümü birebirdir.}$$

$$\psi_3: \{d, e^{-1}, c^{-1}\} \rightarrow \{y^{-1}, z, s, s^{-1}, t, t^{-1}\} \text{ dönüşümü birebirdir.}$$

Böylece ψ_1, ψ_2, ψ_3 dönüşümlerine göre ψ yerel birebirdir fakat yerel örten değildir.

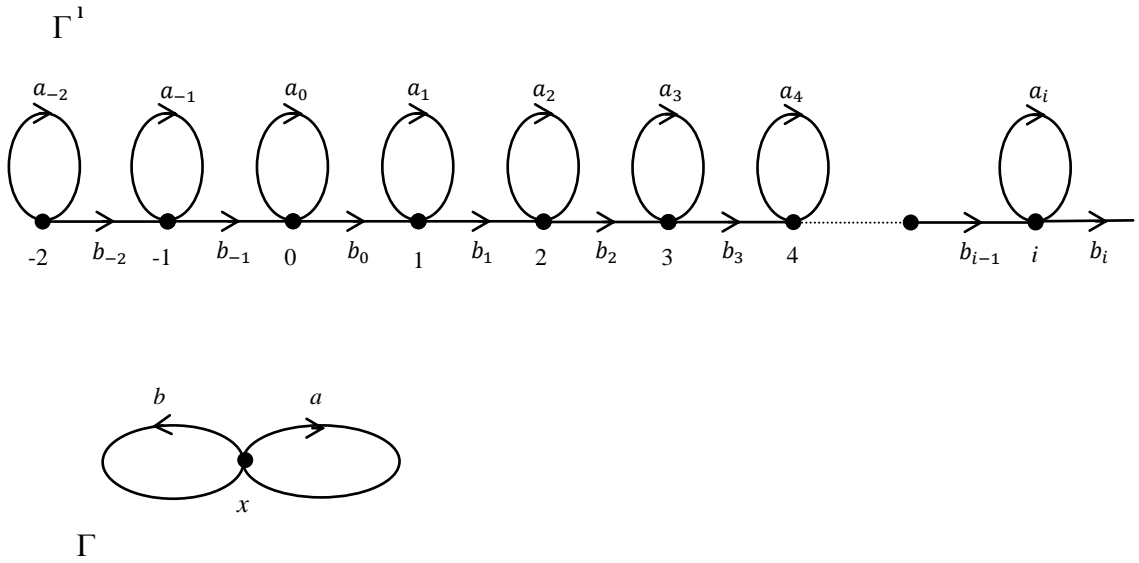
3.4.7 Örnek:



Şekil 3.6: Graf dönüşümü örneği

Yukarıda verilen $\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma^1$ için 1 ve 0 köşelerinin starları, $\text{star}(1) = \{d, c, a^{-1}\}$, $\text{star}(0) = \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$ biçimindedir. Böylece, $\psi_1: \{d, c, a^{-1}\} \rightarrow \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$ birebir ve örten değildir. Bundan dolayı ψ yerel birebir veya yerel örten değildir.

3.4.8 Örnek:



Şekil 3.7: Graf dönüşümü örneği

$$\Gamma^1 \xrightarrow{\phi} \Gamma$$

$$0, 1, -1, \dots \mapsto x$$

$$a_i \mapsto a$$

$$b_i \mapsto b$$

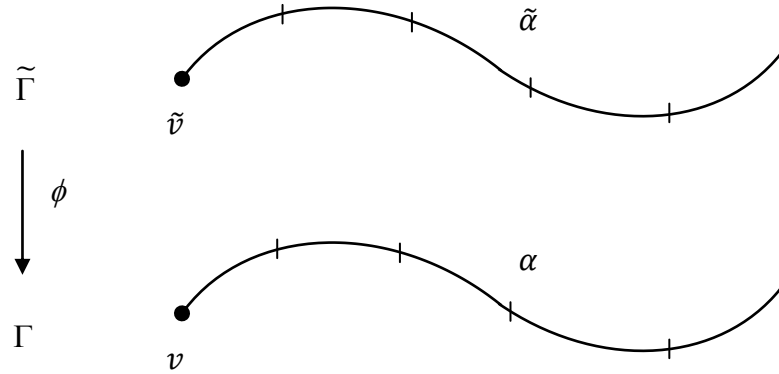
olarak verilsin.

$\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma^1$, Γ ve Γ^1 grafları için ϕ fonksiyonunun birebir ve örtenliğini incelediğimizde, Γ de herhangi bir köşe ve Γ^1 de x köşesinin starı için,

$\text{star}(i) = \{a_i, a_i^{-1}, b_i, b_{i-1}^{-1}\}$, $\text{star}(x) = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ şeklindedir. Burada ϕ yerel birebir ve örtendir.

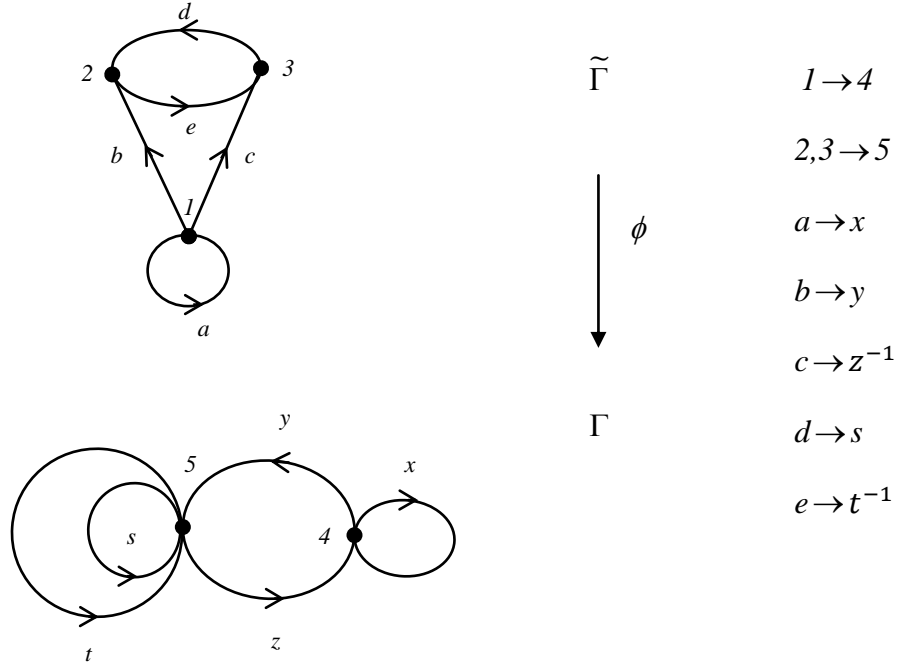
3.5 Yolların Taşınması

Γ ve $\tilde{\Gamma}$ grafları için, $\phi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ graf dönüşümü verilsin. Eğer $\tilde{\Gamma}$ nin bir \tilde{v} köşesi, Γ nin bir v köşesine gidiyor ise yani $\phi(\tilde{v}) = v$ ise \tilde{v} , v ye taşınıyor denir. Ayrıca α , Γ da bir yol ve $i(\alpha) = v$ olsun. Varsayalım ki \tilde{v} , v ye taşınmış olsun. Eğer $\phi(\tilde{\alpha}) = \alpha$ ise $\tilde{\Gamma}$ de α yoluna $\tilde{\alpha}$ nin taşınması denir.



Şekil 3.8: Graf dönüşümünde yolların taşınması

3.5.1 Örnek:



Şekil 3.9: Graf dönüşümü örneği

$\phi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ grafında ϕ fonksiyonunu incelediğimizde yerel birebir olduğunu kolayca buluruz.

Burada, Şekil 3.9 da verilen $\tilde{\Gamma}$ da aldığımız $\tilde{\alpha} = acde$ yolu, Γ de $\alpha = xz^{-1}st^{-1}$ yoluna taşınmıştır. Yalnız $\beta = xz^{-1}st$ yolu $\tilde{\beta} = acd$ olduğundan β yolunun taşınması yoktur.

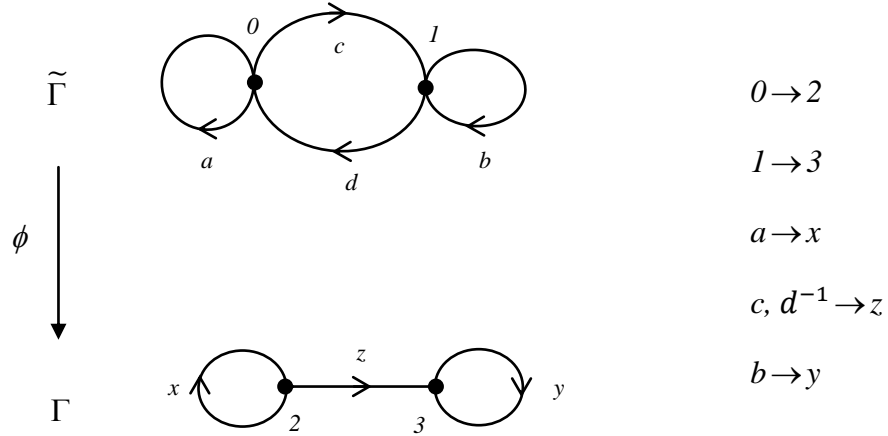
3.5.2 Teorem (Taşınmaların eşsizliği) [30]:

$\phi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ yerel 1-1 ise Γ de α yolu en fazla bir tek $\tilde{\alpha}$ taşınmasına sahiptir.

3.5.3 Teorem (Taşınmaların varlığı) [30]:

$\phi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ yerel örten ise Γ de α yolu en az bir tane $\tilde{\alpha}$ taşınmasına sahiptir.

3.5.4 Örnek:



Şekil 3.10: Graf dönüşümü örneği

Yukarıdaki $\phi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ grafında ϕ fonksiyonunu incelediğimizde yerel örten olduğunu görebiliriz.

Ayrıca Γ de aldığımız $\alpha = xzy^{-1}$, yolu için $i(\alpha) = 2$ dir. $\tilde{\Gamma}$ de köşesi 0 olanlar köşesi 2 olanlara taşınırlar. Böylece $\tilde{\alpha}_1 = acb^{-1}$, $\tilde{\alpha}_2 = ad^{-1}b^{-1}$ yolları köşesi 2 olan α yoluna taşınırlar.

Teorem 3.5.3'e göre α nın en az bir taşınması vardır. ϕ yerel örten olduğundan α nın 2 tane taşınmasının olduğu sonucuna ulaşabiliriz.

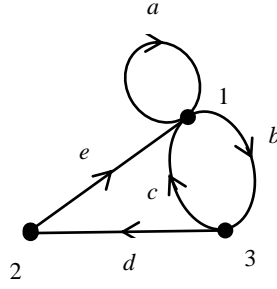
3.6 Alt Graflar

Γ , V köşelerin kümesi, E kenarların kümesi olan bir graf olsun. V^1 , V nin alt kümesi E^1 , E nin alt kümesi olmak üzere,

- (i) $e^1 \in E^1$ için $\tau(e^1), i(e^1) \in V^1$
- (ii) $e^1 \in E^1$ için $(e^1)^{-1} \in E^1$

koşulları sağlayan graflara Γ nın alt grafları denir.

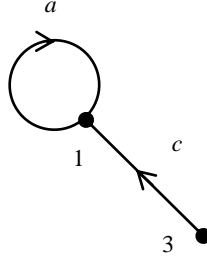
3.6.1 Örnek:



Şekil 3.11: Graf örneği

Yukarıdaki şekilde verilen grafın alt grafını çizelim.

Burada $V^1 = \{1,3\}$, $E^1 = \{a, a^{-1}, c, c^{-1}\}$ köşelerin ve kenarların kümesi olarak alınırsa alt graf koşullarını sağlar ve aşağıdaki şekilde çizilebilir.



Şekil 3.12: Alt graf örneği

Eğer $V^1 = \{1,3\}$, $E^1 = \{e, e^{-1}, b, b^{-1}\}$ kümeleri alınırsa alt graf olmaz. Çünkü $i(e) = 2 \notin V^1$ dir.

Eğer $V^1 = \{1,3\}$, $E^1 = \{a, c, c^{-1}\}$ kümeleri alınırsa alt graf olmaz. Çünkü $a \in E^1$ için $a^{-1} \notin E^1$ dir.

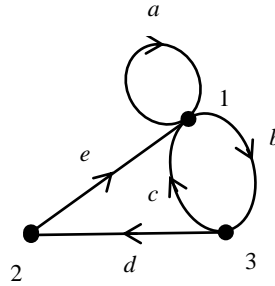
3.7 Temel Gruplar ve Yolların Eşitliği

Şimdi serbest gruplarla ilgili bazı önemli hatırlatmaları yapalım.

- X üzerindeki kelime grafta bir yoldur.
- Bir yoldaki temel indirgeme $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ çiftinin elenmesidir.

- Eğer $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha^1$ ise α_{i+1}, α_i den temel indirgenme veya eklemeye elde ediliyorsa α, α^1 yolları denktir. α nın denklik sınıfları $[\alpha]$ olarak tanımlanır.
- Normal form teoremi, her yolun denk tek bir indirgenmiş yolu vardır.
- Yolların çarpımı $(\alpha\beta)$; $\alpha \sim \alpha^1$ ve $\beta \sim \beta^1$ ise $\alpha\beta \sim \alpha^1\beta^1$ olur. $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ denklik sınıflarının çarpımı iyi tanımlıdır.
- $\{[\alpha]: \alpha \text{ bir yol}\}$ yukarıdaki çarpma işlemiyle birlikte bir gruptur.
- Temel indirgenmiş bir yolda, ee^{-1} çifti varsa bu çiftleri silebiliriz.

3.7.1 Örnek:



Şekil 3.13: Graf örneği

Yuarıdaki grafta alınan $deaa^{-1}c^{-1}b^{-1}b$ yolunun indirgenmiş yolu, $deaa^{-1}c^{-1}b^{-1}b \sim dec^{-1}b^{-1}b \sim dec^{-1} \sim dee^{-1}ec^{-1}$ dir.

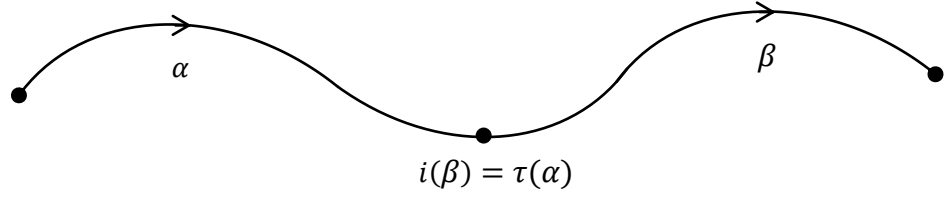
Daha önceki bölümlerde Normal Form Teoremi'ni kelimeler üzerinde görmüştük. Şimdi ise aynı teoremi yollar üzerinde verebiliriz.

3.7.2 Teorem (Normal Form Teoremi) [6]: Her denklik sınıfı tek bir indirgenmiş yol içerir.

Örneğin, yukarıdaki Örnek 3.7.1 deki graftan aldığımız $[deaa^{-1}ac^{-1}b^{-1}b]$ denklik sınıfının dec^{-1} olan tek bir indirgenmiş yolu vardır.

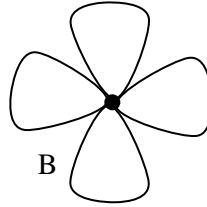
3.8 Yolların Çarpımı

Graf üzerinde aldığımız α, β yolları için $\tau(\alpha) = i(\beta)$ oluyorsa bu yolların çarpımı $\alpha\beta$ olarak tanımlanır. Bu durumda $\alpha\beta$, α nın kenarlarının β nın kenarları tarafından takip edilmesiyle meydana gelir.



Şekil 3.14: Birbirini takip eden yollar

3.8.1 Not: Aşağıdaki şekilde çizilen graftaki gibi B deki bütün yollar tek bir köşeye başlar ve biter ise çarpım her zaman tanımlıdır.



Şekil 3.15: Tek bir köşeye sahip graf

Eğer $\alpha \sim \alpha^1$, $\beta \sim \beta^1$ ise $\alpha\beta \sim \alpha^1\beta^1$ dır. Bunu kolayca görebiliriz. Eğer $\alpha \sim \alpha^1$ ise $\tau(\alpha) = \tau(\alpha^1)$ ve $i(\alpha) = i(\alpha^1)$ dır. Ayrıca $i(\beta) = i(\beta^1)$ ve $\tau(\beta) = \tau(\beta^1)$ dır. Böylece $\alpha\beta$ tanımlı ve $\tau(\alpha^1) = \tau(\alpha) = i(\beta) = i(\beta^1)$ olduğundan $\alpha^1\beta^1$ tanımlıdır.

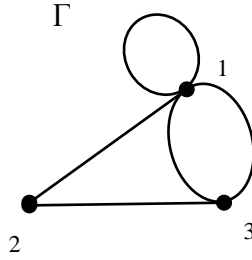
Denklik sınıflarının kısmi çarpımı;

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$$

$\tau(\alpha) = i(\beta)$ biçiminde tanımlanır. Bu çarpım iyi tanımlıdır.

3.8.2 Tanım: Burada $\{[\alpha]: i(\alpha) = \tau(\alpha) = v\}$ kümesi çarpma işlemiyle birlikte bir grup oluşturur. Bu grubun birim elemanı $[1_v]$ dir ve $[\alpha]$ nın tersi $[\alpha^{-1}]$ dir. Bu gruba v deki Γ nin *temel grubu* denir ve $\Pi_1(\Gamma, v)$ olarak tanımlanır.

3.8.3 Örnek:



Şekil 3.16: Graf örneği

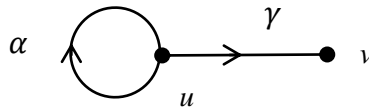
Şekildeki Γ grafının köşelerine ait temel grupları $\Pi_1(\Gamma, 1)$, $\Pi_1(\Gamma, 2)$, $\Pi_1(\Gamma, 3)$ şeklinde gösterebiliriz.

3.8.4 Teorem [19]: Γ grafının u ve v gibi iki köşesi eğer bir yol ile bağlanmış ise

$$\Pi_1(\Gamma, u) \cong \Pi_1(\Gamma, v)$$

dir.

İspat: u dan v ye bir yol γ olsun. Eğer α , u da kapalı bir yol ise $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ yolunda v de kapalı bir yoldur.



Şekil 3.17: u dan v ye bir yol

Ayrıca $\alpha \sim \alpha^1$ ise $\gamma^{-1}\alpha\gamma \sim \gamma^{-1}\alpha^1\gamma$ dir. Burada

$$\phi : \Pi_1(\Gamma, u) \rightarrow \Pi_1(\Gamma, v)$$

$$[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$$

olarak tanımlanan ϕ nin bir homomorfizma olduğunu gösterelim;

$$\phi([\alpha][\beta]) = \phi([\alpha\beta]) = [\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma]$$

$$\phi([\alpha])\phi([\beta]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma][\gamma^{-1}\beta\gamma] = [\gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1}\beta\gamma]$$

olur. Burada $\gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1}\beta\gamma \sim \gamma^{-1}\alpha\beta\gamma$ olup $\gamma\gamma^{-1}$ sileriz. Böylece ϕ homomorfizmdir. ϕ nin izomorfizm olduğunu tersini bularak gösterelim. Varsayalım ki α^1, v de kapalı bir yol ve $\gamma\alpha^1\gamma^{-1}$ u da kapalı bir yol olsun.

Yukarıdaki gibi benzer şekilde ψ homomorfizması alalım.

$$\psi : \Pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \Pi_1(\Gamma, u)$$

$$[\alpha^1] \mapsto [\gamma\alpha^1\gamma^{-1}]$$

Burada $\psi \circ \phi = 1_{\Pi_1(\Gamma, u)}$, $\phi \circ \psi = 1_{\Pi_1(\Gamma, v)}$ olduğundan ψ, ϕ nin tersidir. Bunu ilk eşitlikten gösterebiliriz.

Böylece $\psi \circ \phi[\alpha] = \psi[\gamma^{-1}\alpha\gamma] = [\gamma(\gamma^{-1}\alpha\gamma)\gamma^{-1}]$ olduğundan

$$\psi \circ \phi[\alpha] = [\alpha]$$

dır. Böylece ϕ homomorfizm, birebir ve örten ise ϕ izomorfizmdir ve $\Pi_1(\Gamma, u) \cong \Pi_1(\Gamma, v)$ dir. \square

3.8.5 Teorem [19]: Bağlantılı Γ grafında u_1, u_2, \dots, u_n köşeleri için

$$\Pi_1(\Gamma, u_1) \cong \Pi_1(\Gamma, u_2) \cong \dots \cong \Pi_1(\Gamma, u_n)$$

dir.

3.8.6 Tanım: Herhangi iki köşesi bir yol tarafından birleşen graflara *bağlantılıdır* denir. Böylece Teorem 3.8.5 den bağlantılı graflarda temel gruplar izomorfdur.

3.9 İndirgenmiş Homomorfizma

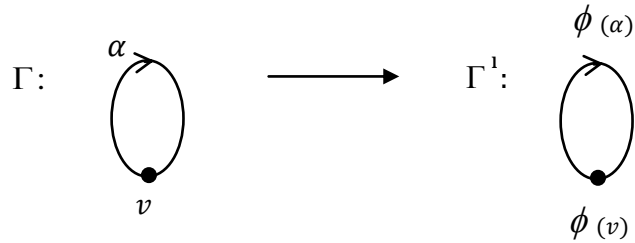
$\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma^1$ graf dönüşümü olsun. Γ nin herhangi bir v köşesi için indirgenmiş homomorfizması,

$$\phi_* : \Pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \Pi_1(\Gamma^1, \phi(v))$$

$$[\alpha] \mapsto [\phi(\alpha)]$$

$$\phi_*([\alpha]) = [\phi(\alpha)], \quad [\alpha] \in \Pi_1(\Gamma, v)$$

dir.



Şekil 3.18: İndirgenmiş graf dönüşümü

Şimdi ϕ_* fonksiyonu iyi tanımlı olduğunu aşağıdaki önerme ile gösterebiliriz.

3.9.1 Önerme [7]: Γ grafında β bir yol olsun. Eğer $\beta \sim \beta^1$ ise Γ^1 de

$$\phi(\beta) \sim \phi(\beta^1)$$

dir.

İspat: Özel durum, varsayalım ki β^1, β tarafından temel indirgemeyle elde edilmiş olsun.

Bu durum da $\beta = \beta_1 e e^{-1} \beta_2 \Rightarrow \beta^1 = \beta_1 \beta_2$ olup

$$\phi(\beta) = \phi(\beta_1) \phi(e) \phi(e)^{-1} \phi(\beta_2)$$

$$\phi(\beta^1) = \phi(\beta_1) \phi(\beta_2)$$

dir. Böylece $\phi(\beta^1), \phi(\beta)$ tarafından temel indirgeme ile elde edilir.

Genel durumu düşünersek; $\beta = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n = \beta^1$ dir. Burada β_{i+1}, β_i den temel indirgeme veya ekleme ile elde edilir.

Özel durumdan β_i ve β_{i+1} ,

$$\phi(\beta_i) \sim \phi(\beta_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1)$$

dir. Geçişme özelliğinden $\phi(\beta_0) \sim \phi(\beta_1) \sim \phi(\beta_2) \sim \dots \sim \phi(\beta_n)$ olur. Bu önerme ile ϕ_* nin iyi tanımlı olduğu gösterilir. Şimdi ϕ_* nin bir homomorfizma olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned} \phi_*([\alpha][\beta]) &= \phi_*([\alpha\beta]) \\ &= [\phi(\alpha\beta)] \\ &= [\phi(\alpha)\phi(\beta)] \\ &= [\phi(\alpha)][\phi(\beta)] \\ &= \phi_*[\alpha]\phi_*[\beta] . \square \end{aligned}$$

Böylece indirgenmiş homomorfizma için,

- 1- Γ nin birim dönüşümü, $1 : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ise $1_* : \Pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \Pi_1(\Gamma, v)$ birim homomorfizmdir.

2- Varsayalım ki $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma^1$, $\psi: \Gamma^1 \rightarrow \Gamma^{11}$ grafların dönüşümleri olsun.
Burada indirgenmiş homomorfizması;

$$\begin{aligned}\phi_* &: \Pi_1(\Gamma, v) \rightarrow (\Gamma^1, \phi(v)) \\ \psi_* &: \Pi_1(\Gamma^1, \phi(v)) \rightarrow \Pi_1(\Gamma^{11}, \psi \circ \phi(v)) \\ (\psi \circ \phi)_* &: \Pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \Pi_1(\Gamma^{11}, \psi \circ \phi(v)) \\ (\psi \circ \phi)_* &= \psi_* \circ \phi_*\end{aligned}$$

dir.

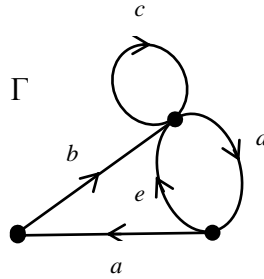
3.10 Grafların Gruplar Tarafından Etiketlenmesi

Γ graf ve G bir grup olsun. Burada Γ nin herhangi bir kenarını G nin elemanlarına tayin edebileceğimizi düşüneceğiz. Örneğin;

$$\theta: E \rightarrow G, e \mapsto g_e$$

bir fonksiyon olsun. Burada grup elemanın tersi $g_{e^{-1}} = g_e^{-1}$ dir.

3.10.1 Örnek:



Şekil 3.19: Graf örneği

Γ grafının herhangi bir kenarını $G = \langle t \rangle$ 6. mertebeden devirli bir grubuna eşleyelim.

Burada,

$$\begin{array}{ll}
 g_a = 1 & g_{a^{-1}} = 1 \\
 g_b = t & g_{b^{-1}} = t^{-1} = t^5 \\
 g_c = t^4 & g_{c^{-1}} = t^{-4} = t^2 \\
 g_d = t^3 & g_{d^{-1}} = t^{-3} = t^3 \\
 g_e = t^3 & g_{e^{-1}} = t^{-3} = t^3
 \end{array}$$

şeklindedir. Eğer $\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ Γ de bir yol ise $\theta(\alpha) = g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_n}$ biçiminde tanımlanır.

3.10.2 Örnek: Şekil 3.19 de Γ grafında aldığımız abc^2b^{-1} , bce^{-1} , $bcdd^{-1}e^{-1}$ yollarının $G = \langle t \rangle$ (6. mertebeden) devirli gurubundaki karşılığı,

$$\theta(abc^2b^{-1}) = 1t(t^4)^2t^{-1} = t^8 = t^2$$

$$\theta(bce^{-1}) = tt^4t^{-3} = t^2$$

$$\theta(bcdd^{-1}e^{-1}) = tt^4t^3t^{-3}t^{-3} = t^2$$

şeklindedir.

3.10.3 Önerme [7]: α , Γ de bir yol olsun. Eğer $\alpha \sim \alpha^1$ ise $\theta(\alpha) = \theta(\alpha^1)$ dir.

İspat: Özel durum, varsayalım ki α^1 , α dan temel indirgemeyle elde edilmiş olsun. O halde $\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ için,

$$\begin{aligned}
 \theta(\alpha^1) &= g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_i} g_e g_{e^{-1}} g_{e_{i+1}} \dots g_{e_n} \\
 &= g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_i} g_{e_{i+1}} \dots g_{e_n} = \theta(\alpha)
 \end{aligned}$$

dir. Genel durum için düşünürsek;

eğer $\alpha \sim \alpha^1$ ve $\alpha = \alpha_0, \dots, \alpha_m = \alpha^1$ zinciri varsa, α_{j+1}, α_j den temel ekleme veya silmeyle elde ediliyorsa ($j = 0, \dots, m - 1$) özel durumdan,

$\theta(\alpha_j) = \theta(\alpha_{j+1})$ ve böylece $\theta(\alpha) = \theta(\alpha_0) = \theta(\alpha_1) = \dots = \theta(\alpha_m) = \theta(\alpha^1)$ dir. \square

Açıkça, $\alpha\beta$ tanımlı olduğundan $\theta(\alpha\beta) = \theta(\alpha)\theta(\beta)$ dir. $\hat{\theta}[\alpha]$ yı $\theta(\alpha)$ olarak tanımlayabiliriz. Yukarıdaki önermeye göre iyi tanımlıdır. Bir grubun elemanlarını herhangi denklik sınıfına atayabiliriz.

$$\hat{\theta}([\alpha][\beta]) = \hat{\theta}[\alpha\beta] = \theta(\alpha\beta) = \theta(\alpha)\theta(\beta) = \hat{\theta}[\alpha]\hat{\theta}[\beta]$$

Böylece,

$$\hat{\theta}([\alpha][\beta]) = \hat{\theta}[\alpha]\hat{\theta}[\beta]$$

dir.

Özel olarak $\Pi_1(\Gamma, \nu)$ nin herhangi iki elemanı $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(\Gamma, \nu)$ yı düşündüğümüzde $\hat{\theta}([\alpha][\beta]) = \hat{\theta}[\alpha]\hat{\theta}[\beta]$ dir.

4. TEMEL GRUPLAR

4.1 Giriş

Ağaçlar konusu graf teorisi içerisinde önemli bir yere sahiptir. Ayrıca, ağaçlar graf teorisinin birçok uygulamasında ön plana çıkan bir konu olmakla birlikte ağaçlar matematikte olduğu gibi fizikte de çok kullanılan bir konudur. Özellikle de fizikte akış diyagramları ile ilgili çalışmalarda kullanılmıştır. Örneğin, fizikçi Gustava Kirşof 1847'de kablo ağlarındaki elektrik akışını formülize etmek için ağaçları kullanmıştır. Ağaç terimi, bu çalışmalardan on yıl sonra İngiliz matematikçi Arthur Cayley tarafından verilmiştir. Cayley, bazı önemli matematik problemlerini ağaçlar üzerine odaklanarak çözmüştür.

Bu bölümde ağaçlar konusu ve önceki bölümde verilen temel grupların alt grupları ve dönüşümleri incelenmiştir. Bu bölümdeki bilgilere [7, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 24, 30] gibi kaynaklardan ulaşılabilmektedir.

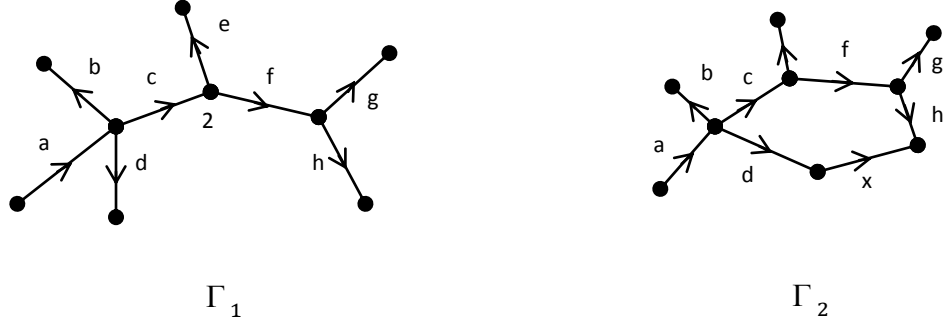
4.2 Ağaçlar

Γ bir graf olsun.

Eğer,

- (i) herhangi iki köşe bir yol ile birbirine bağlı ise
- (ii) boştan farklı indirgenmiş kapalı yolları yok ise

bu grafa *ağaç (tree)* denir.



Şekil 4.1: Ağaç örneği

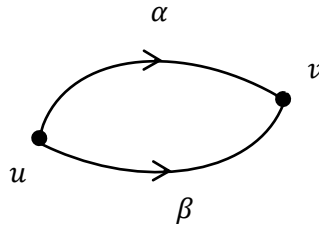
Γ_1 grafında boş olmayan kapalı yollar yoktur ve bütün yollar birbirine bağlıdır. Böylece Γ_1 ağaçtır. Örneğin, Γ_1 grafında aldığımız $\alpha = add^{-1}a^{-1}$ yolu kapalı ancak indirgenmiş değildir. Fakat Γ_2 grafında, $\beta = cfhx^{-1}d^{-1}$ yolu kapalı ve indirgenmiş bir yoldur. Böylece Γ_2 ağaç değildir.

4.2.1 Tanım: Ağaçların oluşturduğu kümeye *orman* denir.

4.2.2 Teorem [15]: T ağacı üzerindeki her u, v köşesini bağlayan bir tek indirgenmiş yol vardır.

İspat : Γ de u ve v gibi iki köşe alalım. T bağlantılı olduğundan burada en az bir u dan v ye indirgenmiş yol vardır.

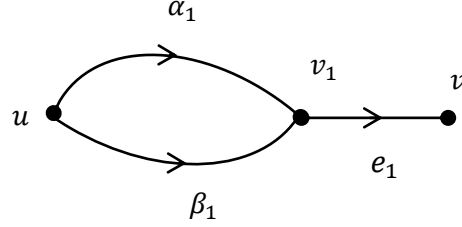
Varsayalım ki α, β u dan v ye indirgenmiş iki yol olsun.



Şekil 4.2: Kapalı bir yol

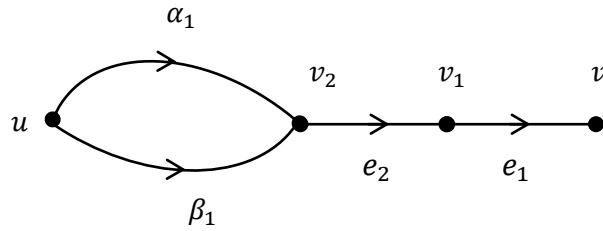
Burada $\alpha\beta^{-1}$ kapalı bir yoldur. Eğer $\alpha\beta^{-1}$ boş değil ise indirgenmiş kapalı bir yol olur. Çünkü α ve β indirgenmiştir.

Böylece $\alpha = \alpha_1 e_1$, $\beta = \beta_1 e_1$ olsun.



Şekil 4.3: Graf örneği

Eğer $\alpha_1\beta_1^{-1}$ boş değil ise indirgenmiş olmalıdır ($\alpha\beta^{-1} = \alpha_1 e_1 e_1^{-1} \beta_1^{-1}$). Böylece $\alpha_1 = \alpha_2 e_2 e_1$, $\beta_1 = \beta_2 e_2 e_1$ olur.



Şekil 4.4: Graf örneği

Eğer $\alpha_2\beta_2^{-1}$ boş değil ise yukarıdaki gibi aynen tekrar eder. Sonlu ve uzun aşamalardan sonra n tane aşama olmuşsa $\alpha_n\beta_n^{-1}$ in boş olduğunu bulmalıyız. Sonrasında ise

$$\alpha = e_n e_{n-1} \dots e_2 e_1 = \beta$$

elde edilir. \square

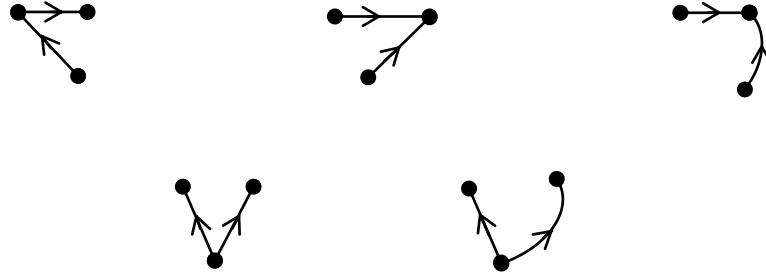
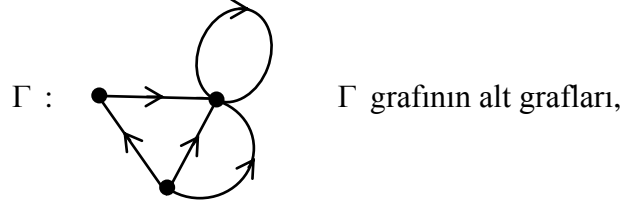
4.2.3 Teorem [30]: Her bağlantılı Γ grafının

- i) T bir ağaç,
- ii) T nin köşelerinin kümesi ile Γ nin köşelerinin kümesi aynı,

özelliklerini sağlayan bir T alt grafı vardır.

4.2.4 Tanım: Teorem 4.2.3 deki koşulları sağlayan T ağacına maksimal ağaç denir.

4.2.5 Örnek:



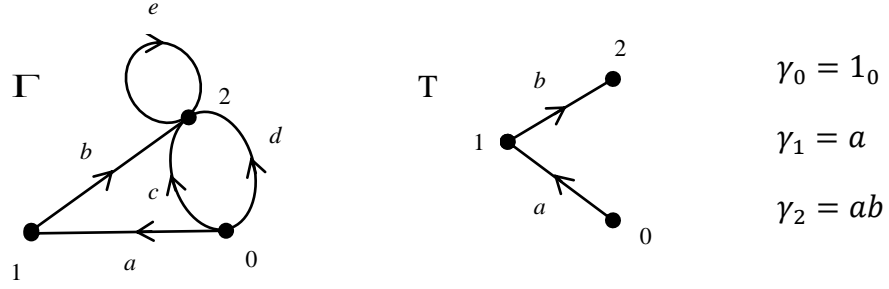
şeklindedir. Bu alt graflar aynı zamanda *maksimal ağaç*lardır.

4.3 Temel Grupların Yapısı

Bu bölümde 3. Bölümde tanımını vermiş olduğumuz Temel Grupların yapısını detaylı bir biçimde inceleyeceğiz. Bunun için Γ bir bağlantılı graf ve 0 bu grafın bir köşesi olsun. Ayrıca T , Γ grafından alınan bir maksimal ağaç olsun. Şimdi $\Pi_1(\Gamma, 0)$ in yapısını inceleyelim.

Γ nin herhangi bir v köşesi için 0 dan v ye T de tek bir yol olan γ_v yi düşünelim. Bunun için öncelikle aşağıdaki örneği inceleyelim.

4.3.1 Örnek:



Şekil 4.5: Graf ve ağaç örneği

Γ nin herhangi bir e kenarı için $t_e = [\gamma_{i(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}]$ biçiminde tanımlanmış olup böylece $t_e \in \Pi_1(\Gamma, 0)$ dir. Burada

$$t_a = [1_0 a a^{-1}] = 1, \quad t_b = [a b (a b)^{-1}] = 1$$

$$t_c = [1_0 c (a b)^{-1}] = [c b^{-1} a^{-1}]$$

$$t_d = [1_0 d (a b)^{-1}] = [d b^{-1} a^{-1}]$$

$$t_e = [a b e (a b)^{-1}] = [a b e b^{-1} a^{-1}]$$

$$t_{a^{-1}} = [a a^{-1} 1_0] = 1$$

$$t_{b^{-1}} = [a b b^{-1} a^{-1}] = 1$$

$$t_{c^{-1}} = [a b c^{-1} 1_0] = [a b c^{-1}]$$

$$t_{d^{-1}} = [a b d^{-1}]$$

$$t_{e^{-1}} = [a b e^{-1} b^{-1} a^{-1}]$$

dir.

4.3.2 Teorem [15]: Γ nin herhangi bir e kenarı için

$$t_{e^{-1}} = t_e^{-1}$$

dir.

İspat: Biliyoruz ki $t_e^{-1} = [\gamma_{i(e)}e\gamma_{\tau(e)}^{-1}]^{-1}$ şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned} t_e^{-1} &= [\gamma_{\tau(e)}e^{-1}\gamma_{i(e)}^{-1}] \quad (i(e^{-1}) = \tau(e), \tau(e^{-1}) = i(e)) \\ &= [\gamma_{i(e^{-1})}e^{-1}\gamma_{\tau(e^{-1})}^{-1}] = t_{e^{-1}} \end{aligned}$$

dir. \square

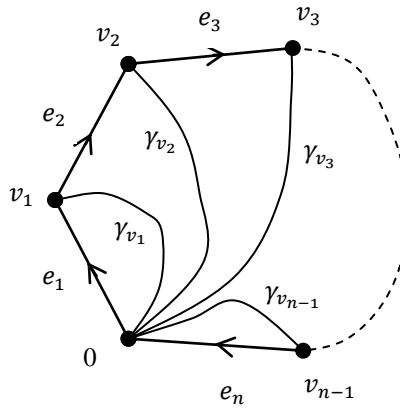
4.3.3 Teorem [15]: Γ nin herhangi bir e kenarı için eğer $e \in T$ ise t_e birimdir.

İspat: Eğer $e \in T$ ise $\gamma_{i(e)}e\gamma_{\tau(e)}^{-1}$ T de bulunuyor ve $t_e = [\gamma_{i(e)}e\gamma_{\tau(e)}^{-1}] = [1_0] = 1$ şeklindedir. \square

4.3.4 Teorem [15]: Γ nin herhangi bir e kenarı için t_e nin elemanları $\Pi_1(\Gamma, 0)$ yi üretir.

İspat: $[\alpha] \in \Pi_1(\Gamma, 0)$ alalım. Burada $[\alpha]$ yı t_e ler şeklinde ifade etmeliyiz.

Böylece $\alpha = e_1e_2 \dots e_n$ olarak alalım.



Şekil 4.6: $\alpha = e_1e_2 \dots e_n$ yolu

Ayrıca $v_0 = 0 = v_n$ olup $\gamma_{v_n}, \gamma_{v_0}$ lar boş yoldur. Bu durumda,

$$\alpha \sim \gamma_{v_0} e_1 \gamma_{v_1}^{-1} \gamma_{v_1} e_2 \gamma_{v_2}^{-1} \gamma_{v_2} e_3 \gamma_{v_3}^{-1} \dots \gamma_{v_{n-1}} e_n \gamma_{v_n}^{-1}$$

($\gamma_{v_i}^{-1} \gamma_{v_i}$ ifadelerini temel indirgemeyle silersek α yı elde edebiliriz.) yazabiliriz.

Böylece

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [\gamma_{v_0} e_1 \gamma_{v_1}^{-1}] [\gamma_{v_1} e_2 \gamma_{v_2}^{-1}] [\gamma_{v_2} e_3 \gamma_{v_3}^{-1}] \dots [\gamma_{v_{n-1}} e_n \gamma_{v_n}^{-1}] \\ &= t_{e_1} t_{e_2} \dots t_{e_n} \end{aligned}$$

şeklindedir. \square

4.3.5 Örnek: Şekil 4.5 deki graf ve ağaca göre $[ab(c^{-1}d)^2e^3d^{-1}]$ ifadesini inceleyelim.

Teorem 4.3.4 den,

$$\begin{aligned} [ab(c^{-1}d)^2e^3d^{-1}] &= t_a t_b t_{c^{-1}} t_d t_{c^{-1}} t_d t_e t_e t_e t_{d^{-1}} \\ &= t_{c^{-1}} t_d t_{c^{-1}} t_d t_e^3 t_{d^{-1}} \quad (t_a, t_b \text{ birim}) \\ &= [cba^{-1}]^{-1} [db^{-1}a^{-1}] [cb^{-1}a^{-1}]^{-1} [dba^{-1}] [abeb^{-1}a^{-1}]^3 [db^{-1}a^{-1}]^{-1} \\ &= [abc^{-1}db^{-1}a^{-1}abc^{-1}db^{-1}a^{-1}abeb^{-1}a^{-1}abeb^{-1}a^{-1}abeb^{-1}a^{-1}abd^{-1}] \\ &= [abc^{-1}dc^{-1}de^3d^{-1}] \end{aligned}$$

ye eşit olduğu bulunur.

4.3.6 Tanım: Bir Γ grafının E kenar kümesini düşünelim. Buna göre E^+ kümesi E kenar kümesine ait olan her bir e kenarı için e, e^{-1} den herhangi birinin seçilmesiyle oluşan bir kümedir. Örneğin, Örnek 4.3.1 de çizilen graf için $E^+ = \{a, b, c, d, e\}$ şeklinde seçebiliriz.

$\Pi_1(\Gamma, 0)$ nın t_e ($e \in E^+, e \notin T$) tarafından üretildiğini görmüştük. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.3.7 Teorem [15]: $\Pi_1(\Gamma, 0)$ kümesi t_e ile üretilen serbest gruptur.

İspat: $F, \{[x_e], e \in E^+, e \in T\}$ tarafından üretilen serbest grup olsun. Burada bir izomorfizm göstermek istiyoruz. Buradaki ϕ fonksiyonu,

$$\phi : F \rightarrow \Pi_1(\Gamma, 0) \quad \phi([x_e]) = t_e \quad (e \in E^+, e \notin T)$$

olarak tanımlansın. Serbest gruplar için Evrensel Dönüşüm Özelliği'nden yukarıda görüldüğü gibi bir ϕ homomorfizmi vardır. Bunun bir izomorfizm olduğunu göstermek için tersini bulacağız. Bunun için bir ψ homomorfizmasını,

$$\psi : \Pi_1(\Gamma, 0) \rightarrow F \quad \text{öyleki} \quad \psi \circ \phi = 1_F, \quad \phi \circ \psi = 1_{\Pi_1(\Gamma, 0)}$$

olarak alalım. Burada ψ yi elde etmek için F nin elemanları tarafından Γ nin kenarlarını etiketleyeceğiz.

Seçtiğimiz etiketleri aşağıdaki gibi,

- eğer $e \in T$ ise e yi birim şeklinde,
- eğer $e \in E^+, e \notin T$ ise e yi $[x_e]$ şeklinde,
- eğer $e^{-1} \in E^+, e \notin T$ ise e yi $[x_e]^{-1}$ şeklinde

etiketleyelim. Bu etiketlemeyi kullanarak herhangi bir α yolu için $\theta(\alpha)$ yı tanımlayabilir ve bir homomorfizm elde edebiliriz. O halde,

$$\hat{\theta} : \Pi_1(\Gamma, 0) \rightarrow F, \quad \hat{\theta}([\alpha]) = \theta(\alpha)$$

için $\hat{\theta}$ yi ϕ nin tersi olduğunu gösterelim. Burada,

$$(i) \quad \phi \circ \hat{\theta}(t_e) = \phi(\theta[\gamma_{i(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}]) = \phi([x_e]) = t_e \quad (e \in E^+, e \notin T)$$

$$\phi \circ \hat{\theta} = 1_{\Pi_1(\Gamma, 0)}$$

$$(ii) \quad \hat{\theta} \circ \phi [x_e] = \hat{\theta}(t_e) \quad (e \in E^+, e \notin T)$$

$$= \theta([\gamma_{i(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}])$$

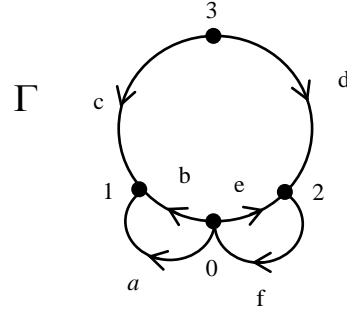
$$= [x_e]$$

$$\hat{\theta}_0 \phi = 1_F$$

bulunur. \square

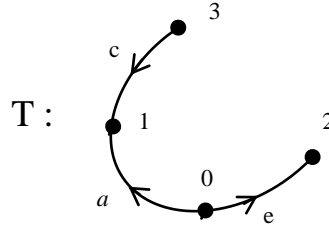
Örneğin; Şekil 4.5 için $\Pi_1(\Gamma, 0)$ kümesi t_c, t_d, t_e tarafından üretilen ve rankı 3 olan serbest gruptur.

4.3.8 Örnek:



Şekil 4.7: Graf örneği

Şekil 4.7 de verilen Γ grafını düşünelim. Burada $\Pi_1(\Gamma, 0)$ temel grubu t_b, t_d, t_f tarafından üretilen serbest gruptur.



Şekil 4.8: Ağaç örneği

Γ da aldığımız $g = [ab^{-1}efac^{-1}df]$ yolunu yukarıdaki T ağacına göre t_b, t_d, t_f biçiminde yazalım.

0 dan köşelere olan geodezikler; $\gamma_0 = 1_0, \gamma_1 = a, \gamma_2 = e, \gamma_3 = ac^{-1}$ olarak bulunur. Burada $t_a, t_c, t_e,$

$$t_a = [\gamma_{i(a)}e\gamma_{\tau(a)}^{-1}] = [\gamma_0a\gamma_1^{-1}] = [1_0aa^{-1}] = 1$$

$$t_c = [\gamma_{i(c)} e \gamma_{\tau(c)}^{-1}] = [\gamma_3 c \gamma_1^{-1}] = [ac^{-1}ca^{-1}] = 1$$

$$t_e = [\gamma_{i(e)} e \gamma_{\tau(e)}^{-1}] = [\gamma_0 e \gamma_2^{-1}] = [1_0 e e^{-1}] = 1$$

biçimindedir. O halde g yolunu,

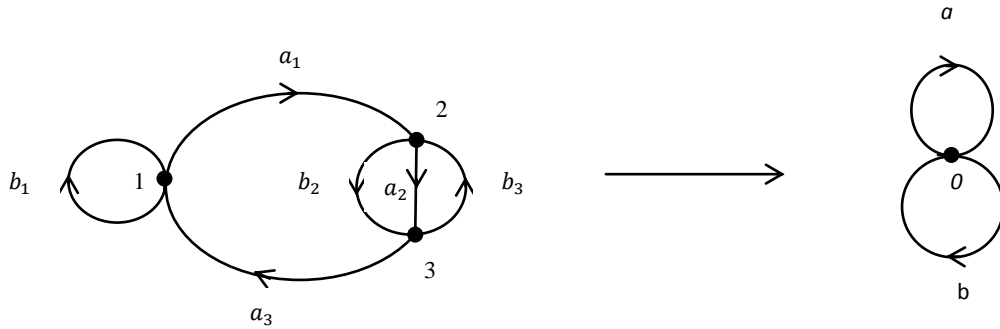
$$\begin{aligned} g &= [ab^{-1}efac^{-1}df] = t_a t_{b^{-1}} t_e t_f t_a t_{c^{-1}} t_d t_f \\ &= 1 t_{b^{-1}} 1 t_f 1 1 t_d t_f = t_{b^{-1}} t_f t_d t_f \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz.

4.4 Temel Grupların Alt Grupları

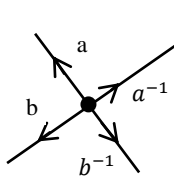
Biliyoruz ki $\phi : \Gamma^1 \rightarrow \Gamma$ fonksiyonu eğer starlar üzerinde birebir örten ise yerel olarak da birebir örtendir.

4.4.1 Örnek:

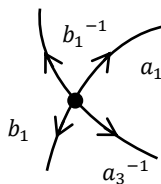


Şekil 4.9: Graf dönüşümü örneği

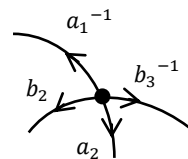
Şekil 4.9 da verilen grafların starlarını,



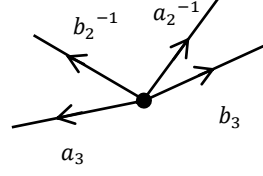
star0



star1



star2



star3

Şekil 4.10: Grafların yıldızları

biçiminde çizebiliriz.

4.4.2 Teorem [15]: Eğer ϕ yerel olarak birebir örten ve $\tilde{0}$, $\tilde{\Gamma}$ nin bir köşesi olmak üzere $\phi(\tilde{0}) = 0$ ise

$$\phi_* : \Pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{0}) \rightarrow \Pi_1(\Gamma, 0)$$

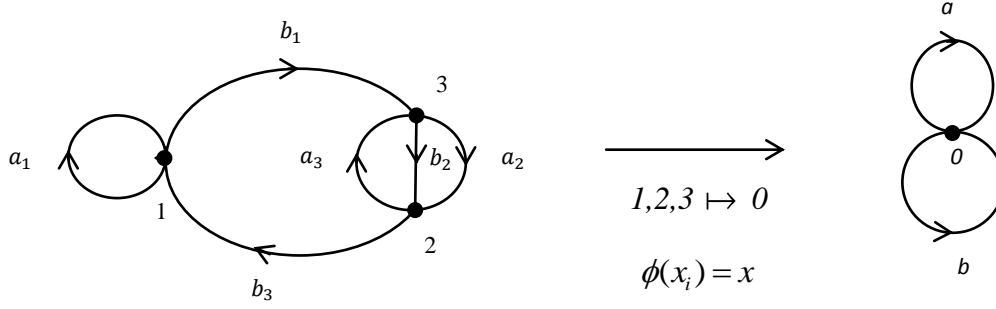
birebirdir.

4.5 Yerel Olarak Birebir ve Örten Dönüşümlerin Özellikleri

Bu bölümde yerel birebir ve örten dönüşümlerin özellikleri üzerine bazı önemli teoremler vereceğiz. Bu konuyla ilgili detaylı çalışmalara [15, 18, 19, 21, 30] gibi kaynaklarından ulaşılabilir.

4.5.1 Teorem [30]: $\tilde{\Gamma}$ ve Γ bağlantılı graf olmak üzere $\phi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ yerel birebir olsun. Eğer α , Γ de bir yol ve \tilde{u} , $\tilde{\Gamma}$ nin bir köşesi olmak üzere $u = i(\alpha)$ ise α nın \tilde{u} da tek bir $\tilde{\alpha}$ taşınması vardır.

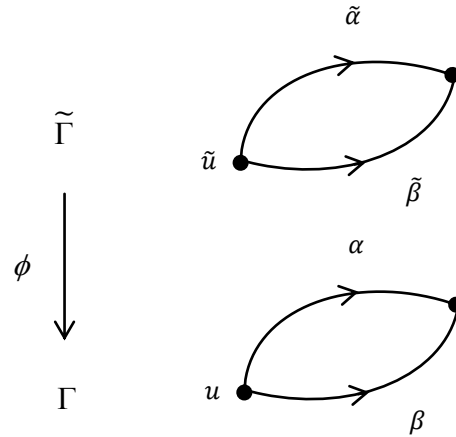
4.5.2 Örnek:



Şekil 4.11: Graf dönüşümü örneği

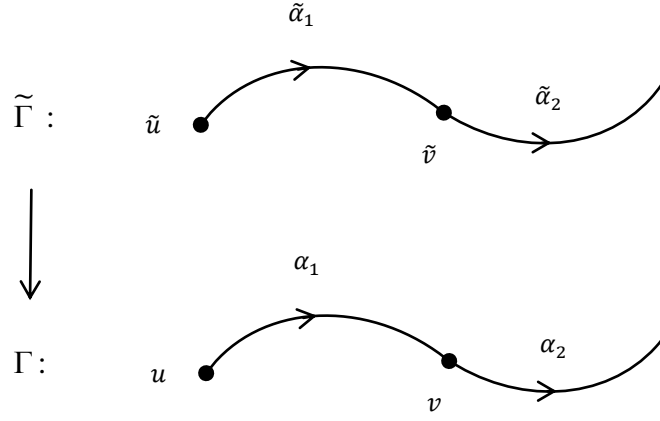
Şekil 4.11 de verilen grafa aldığımız $\alpha = a^2 b a^{-1} b^{-1}$ yolunun 1 deki taşınması $\tilde{\alpha} = a_1^2 b_1 a_3^{-1} b_2^{-1}$ dir.

4.5.3 Teorem [30]: $\tilde{\Gamma}$ ve Γ bağlantılı graf olmak üzere $\phi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ yerel birebir olsun. Ayrıca α, β lar Γ da birer yollar olsunlar. Eğer $\alpha \sim \beta$ ve $u = i(\alpha) = i(\beta)$ ise α, β nın \tilde{u} üzerinde olan $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ taşınmaları eşittir.



Şekil 4.12: Graf dönüşümünde yolların taşınması

İspat: Özel durum, β, α dan temel indirgeme ile elde edilsin. Yani $\alpha = \alpha_1 e e^{-1} \alpha_2$ ve $\beta = \alpha_1 \alpha_2$ olsun.



Şekil 4.13: Birbirini takip eden yolların taşınması

Burada α_1 in \tilde{u} daki taşınması $\tilde{\alpha}_1$ dir. Ayrıca $i(\beta) = i(\alpha) = u$ ve $\phi(\tilde{u}) = u$ dur. Ayrıca \tilde{v} , $\tilde{\alpha}_1$ in son noktasıdır ve $\phi(\tilde{v}) = v$ dir. Yine v , α_1 in son noktası α_2 nın başlangıç noktası olup α_2 nın \tilde{v} de taşınması $\tilde{\alpha}_2$ dir. Böylece $\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2$, β nın \tilde{u} daki $\tilde{\beta}$ taşınmasıdır. Burada \tilde{e} , $\text{star}(\tilde{v})$ nin tek kenarı olsun. Ayrıca $\phi(\tilde{e}) = e$ olmak üzere $\tilde{\alpha}_1\tilde{e}\tilde{e}^{-1}\tilde{\alpha}_2$ yolunu düşünelim. Böylece $\phi(\tilde{\alpha}_1\tilde{e}\tilde{e}^{-1}\tilde{\alpha}_2) = \alpha_1e\tilde{e}^{-1}\alpha_2$ şeklindedir. O halde $\tilde{\alpha}_1\tilde{e}\tilde{e}^{-1}\tilde{\alpha}_2$, α nın \tilde{u} daki $\tilde{\alpha}$ taşınmasıdır. Böylece $\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}$ den eliminasyon (silme) ile elde edilir. Yani $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ dir.

Genel durum, $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \beta$ şeklinde bir zincirimiz olsun. Burada $i = 0, \dots, n-1$ için α_i, α_{i+1} den biri temel indirgeme ile elde edilir. Bu zinciri düşündüğümüzde

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n = \tilde{\beta}$$

elde edilir.

Burada α_i nin \tilde{u} daki yükseltmesi $\tilde{\alpha}_i$ dir. Böylece özel durumla $\tilde{\alpha}_i$ veya $\tilde{\alpha}_{i+1}$ den biri bir diğerinden temel indirgeme ile elde edilmiş olur. Böylece tanımdan $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ şeklindedir. \square

4.5.4 Teorem [7]: Eğer Γ nin bir köşesi 0 ve $\phi(\tilde{0}) = 0$ ise,

$$\phi_* : \Pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{0}) \rightarrow \Pi_1(\Gamma, 0)$$

dönüşümü birebirdir.

İspat: Varsayalım ki $[\tilde{\alpha}] \in \text{Çek } \phi_*$ olsun ($\tilde{\alpha}, \tilde{0}$ da kapalı bir yol). Bu durumda

$$\phi_*([\tilde{\alpha}]) = 1 \Rightarrow [\phi(\tilde{\alpha})] = [1_0] \Rightarrow \phi(\tilde{\alpha}) \sim 1_0$$

elde edilir. Burada α nın $\tilde{0}$ daki taşınması $\tilde{\alpha}$ dır. Ayrıca 1_0 ın 0 daki taşınması $1_{\tilde{0}}$ dır. O halde Teorem 4.5.3 den hareketle şunları elde ederiz;

$$\tilde{\alpha} \sim 1_{\tilde{0}} \Rightarrow [\tilde{\alpha}] = [1_{\tilde{0}}] = 1_{\Pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{0})}$$

$$\Rightarrow \text{Çek } \phi_* = \{1\}. \quad \square$$

4.5.5 Tanım: Eğer $\phi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ yerel birebir ve örten dönüşüm ve $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ bağlantılı ise $\tilde{\Gamma}$ ye genel olarak *kapsayıcı graf* (veya kapsayıcı uzay) denir. Ayrıca ϕ ye genel olarak *kapsayıcı dönüşüm* denir.

4.5.6 Teorem (Nielsen/Schreier Teoremi) [7]: Serbest grupların alt grupları da serbesttir.

İspat: F, X kümesi üzerinde serbest grup olsun. F yi Γ nin daire buketi olduğu yerde $\Pi_1(\Gamma)$ şeklinde tanımlayabiliriz. Herhangi bir $x \in X$ için $\{x, x^{-1}\}$ çift şeklinde bir köşe ve bir kenarı vardır.

Burada H, F nin bir alt grubu olsun. Böylece 0_H temel noktası olan Γ_H bağlantılı grafını inşa edeceğiz. Ayrıca $\phi_H : \Gamma_H \rightarrow \Gamma$ yerel birebir örten dönüşümdür. Böylece

$$\phi_{H*} : \Pi_1(\Gamma_H, 0_H) \rightarrow \Pi_1(\Gamma, \phi_H(0_H))$$

$$\phi_{H*}(\Pi_1(\Gamma_H, 0_H)) = H$$

özelliği ile birlikte bu durum teoremi ispatlayacaktır. Çünkü ϕ_{H^*} birebir olduğundan

$$\phi_{H^*} : \Pi_1(\Gamma_H, 0_H) \rightarrow G \text{ör } \phi_{H^*} = H$$

izomorfizmi vardır. Önceki teorem ile $\Pi_1(\Gamma_H, 0_H)$ serbesttir ve H de serbesttir. \square

4.6 Γ_H in Yapısı

Şimdi Teorem 4.5.6 da verilen, Γ_H grafını daha detaylı olarak inceleyelim. Burada Γ_H grafının köşeleri, F de H nin sağ kosetlerinin kümesi $H[w]$ ler şeklinde olup kenarları ise $(H[w], x^\varepsilon)$ şeklindeki bütün sıralı çiftlerden oluşur öyle ki $[w] \in F$, $H[w]$ sağ koset ve x^ε , Γ nin bir kenarıdır. Burada

$$i(H[w], x^\varepsilon) = H[w]$$

$$\tau(H[w], x^\varepsilon) = H[w x^\varepsilon]$$

$$(H[w], x^\varepsilon)^{-1} = (H[w x^\varepsilon], x^{-\varepsilon})$$

olarak tanımlanır.

Şimdi Γ_H nin bir bağlantılı graf olduğunu gösterelim.

Burada $e = (H[w], x^\varepsilon)$ kenarı için $e^{-1} = (H[w x^\varepsilon], x^{-\varepsilon})$ şeklindedir. Böylece $i(e^{-1}) = H[w x^\varepsilon] = \tau(e)$, $(e^{-1})^{-1} = (H[w x^\varepsilon x^{-\varepsilon}], x^\varepsilon)$ dir. Burada $[w x^\varepsilon x^{-\varepsilon}] = [w]$ olduğundan $(e^{-1})^{-1} = (H[w], x^\varepsilon) = e$ dir. Dikkat edilirse $e^{-1} = (H[w x^\varepsilon], x^{-\varepsilon})$ ve $e = (H[w], x^\varepsilon)$ kenarları farklıdır. Çünkü ikinci koordinatlar farklıdır.

Şimdi 0_H ifadesini $H[1]$ koseti olarak ele alalım. Ayrıca

$$\phi_H : \Gamma_H \rightarrow \Gamma$$

dönüşümünü tanımlayalım öyle ki

$$\phi_H(H[w]) = 0 \text{ ve } \phi_H(H[w], x^\varepsilon) = x^\varepsilon$$

şeklinde verilsin.

Şimdi ϕ_H nın yerel olarak 1-1 ve örten olduğunu gösterelim. Burada $\text{star}(H[w]) = \{(H[w], x^\varepsilon) : x \in X, \varepsilon = \bar{1}\}$ ve $\text{star}(0) = \{x^\varepsilon, x \in X, \varepsilon = \bar{1}\}$ şeklinde olsun. O halde ϕ_H nın tanımıyla şunu görürüz. Burada

$$\phi_H : \text{star}(H[w]) \rightarrow \text{star}(0)$$

1-1 ve örtendir. Böylece ϕ_H yerel olarak 1-1 ve örtendir.

$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, Γ de bir yol olsun. Şimdi 0_H da w nin taşınması \tilde{w} midir? sorusunun cevabına bakalım (ϕ_H yerel olarak 1-1 ve örten olduğundan biz biliyoruz ki tek bir tane \tilde{w} taşınması vardır). Bunun için

$$\tilde{w} = (H[1], x_1^{\varepsilon_1})(H[x_1^{\varepsilon_1}], x_2^{\varepsilon_2}) \dots (H[x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}], x_n^{\varepsilon_n})$$

eşitliği bizi aradığımız sonuca götürecektir.

Şimdi Γ_H grafının bağlantılı olduğunu gösterelim.

Γ_H in herhangi bir $H[w]$ köşesi için 0_H dan $H[w]$ ye bir yol olduğunu gösterdiğimizde Γ_H nin bağlantılı olduğunu göstermiş oluruz. Burada \tilde{w} yolunu düşünelim. Bu yol $H[1] = 0_H$ dan başlar ve $\tau(H[x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}], x_n^{\varepsilon_n}) = H[x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}] = H[w]$ ile biter. Buda bize her kenarın 0_H ye bağlı olduğunu gösterir.

Son olarak $Gör(\phi_{H^*}) = H$ eşitliğini gösterelim.

Burada $[w] \in H$, $H[w] = H[1]$ olsun. Eğer $i(\tilde{w}) = \tau(\tilde{w})$ ise \tilde{w} , Γ_H da 0_H ile başlayıp biten kapalı bir yoldur. Bu durumda $[\tilde{w}] \in \Pi_1(\Gamma_H, 0_H)$ dir. Ayrıca $\phi_{H^*}[\tilde{w}] = [\phi_H(\tilde{w})] = [w]$ dir. Yani $[w] \in Gör(\phi_{H^*})$ olur. Ayrıca Γ_H da 0_H dan başlayıp 0_H da biten α yolu için

$$[w] = \phi_{H^*}[\alpha]$$

$$[w] = [\phi_H(\alpha)] \quad (\phi_{H^*}[\alpha] = [\phi_H(\alpha)])$$

$$w \sim \phi_H(\alpha)$$

şeklindedir. Teorem 4.5.3 deki yerel 1-1 ve örten dönüşümlerin özelliğinden 0_H daki w ve $\phi_H(\alpha)$ nın taşınması Γ_H da eşittir. Yani yerel 1-1 ve örtenlikten ϕ_H daki taşımaları da denk olacaktır. Bu durumda $\tau(\tilde{w}) = \tau(\alpha)$ dır. Fakat $\tau(\alpha) = 0_H = H[1]$ iken $\tau(\tilde{w}) = H[w]$ olur. Böylece $[w] \in H$ dir. \square

4.6.1 Örnek: F serbest grup ve $\{a, b\}$ den üretilen rankı 2 olan bir grup

$\theta : F \rightarrow S_3$ $[a] \rightarrow (12)$, $[b] \rightarrow (123)$ homomorfizmasını düşünersek, $H = \langle \theta \rangle$ ve birinci izomorfizma teoreminden

$$\hat{\theta} : F/H \rightarrow S_3$$

$$[a] \rightarrow (12)$$

$$[b] \rightarrow (123)$$

izomorfizmasını alalım.

Böylece F deki H nin sağ kosetleri ile S_3 ün elemanları 1-1 olarak eşlenir.

$$H[1] \leftrightarrow 1$$

$$H[a] \leftrightarrow \theta[a] = (12)$$

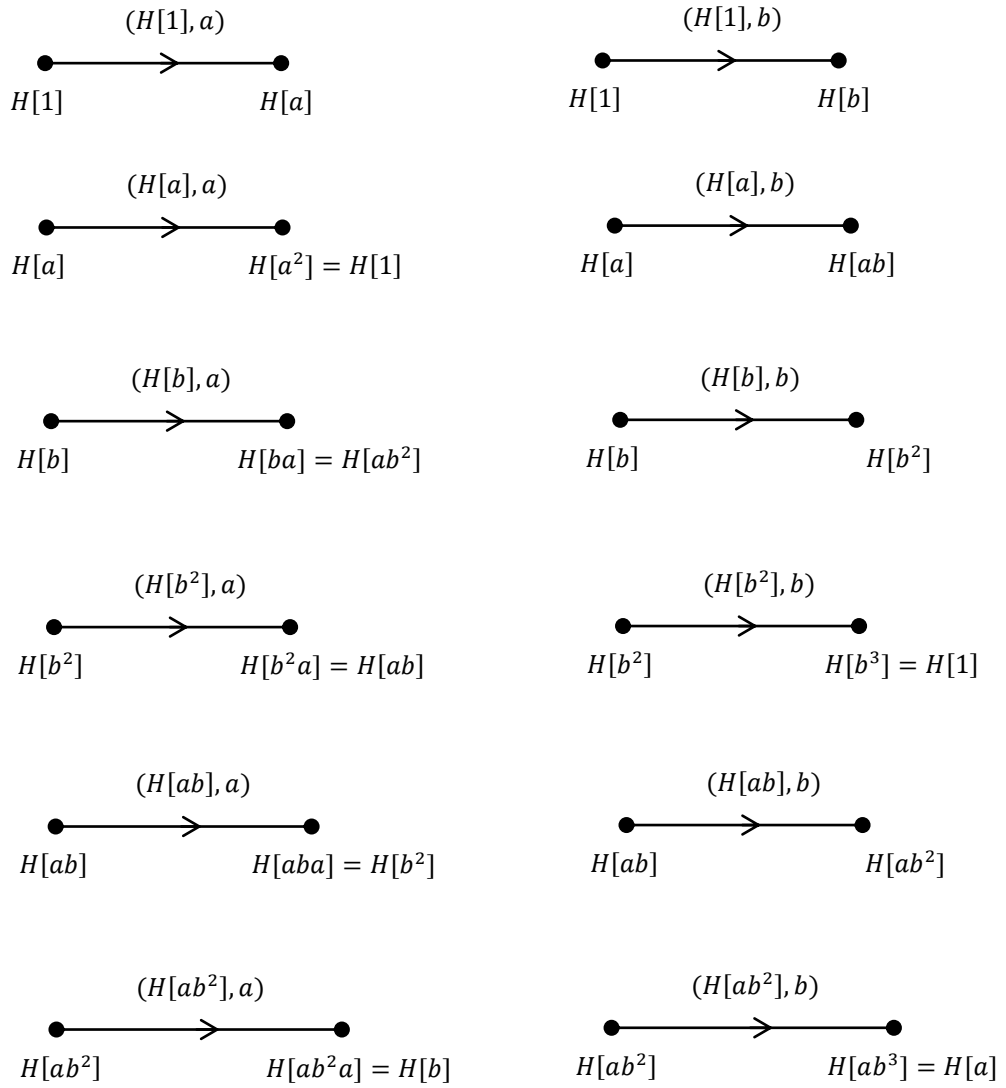
$$H[b] \leftrightarrow \theta[b] = (123)$$

$$H[b^2] \leftrightarrow \theta[b]^2 = (132)$$

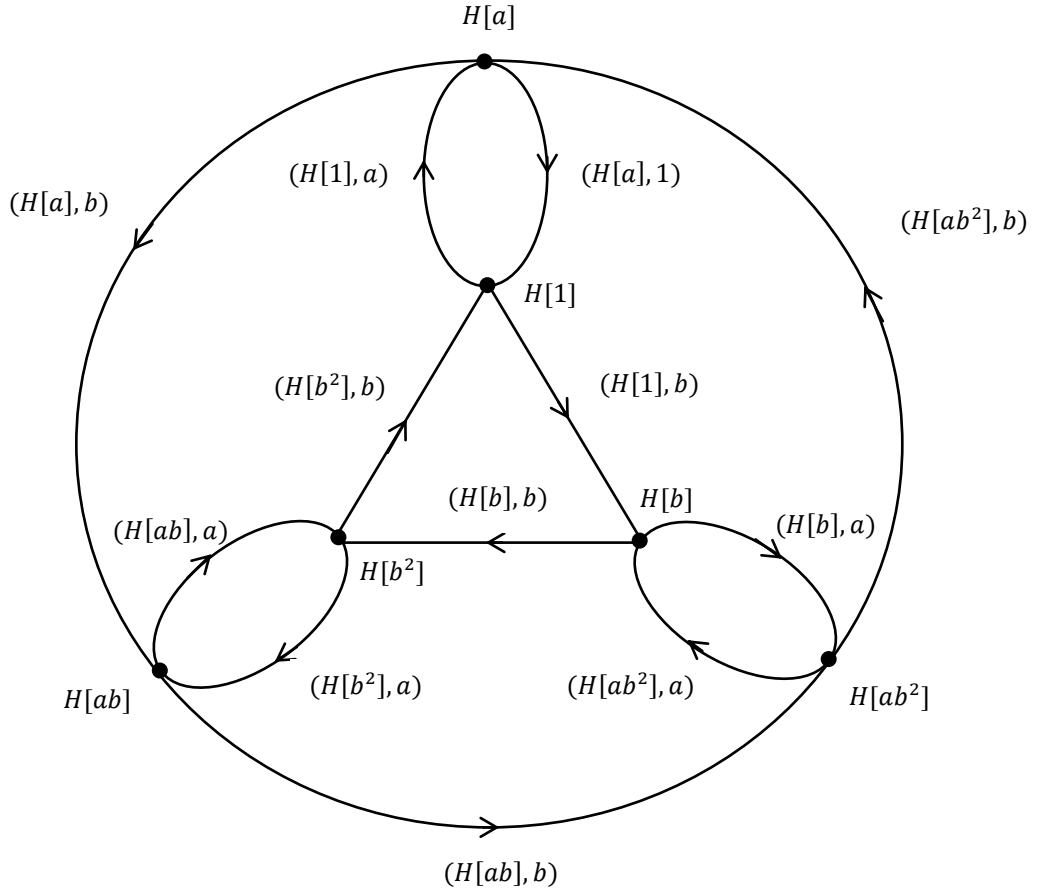
$$H[ab] \leftrightarrow \theta([a][b]) = (12)(123) = (23)$$

$$H[ab^2] \leftrightarrow \theta([a][b]^2) = (12)(132) = (13)$$

Γ_H , 6 köşeye sahiptir. Γ_H ın köşeleri,



şeklindedir. Grafiği ise Şekil 4.14 deki gibi çizebiliriz.



Şekil 4.14: Γ_H graf örneği

4.6.2 Örnek: $\{a, b, c\}$ kümesi üzerinde F serbest grubunu alalım. G , s ile üretilen sonsuz devirli grup olsun. Burada θ fonksiyonunu

$$\theta : F \rightarrow G$$

$$[a] \mapsto s^2$$

$$[b] \mapsto s^3$$

$$[c] \mapsto 1$$

olarak tanımlayalım. $\hat{\theta}$ fonksiyonunu ise

$$\hat{\theta} : F/H \rightarrow G$$

şeklindedir. Şimdi de çizeceğimiz grafın köşelerine bakalım.

$$H[1] \rightarrow 1_G$$

$$H[a] \rightarrow \theta[a] = s^2$$

$$H[a^2] \rightarrow \theta[a^2] = (\theta[a])^2 = s^4$$

$$H[a^3] \rightarrow \theta[a^3] = s^6 = H[b^2]$$

$$H[a^4] \rightarrow \theta[a^4] = s^8 = H[ab^2]$$

$$H[a^5] \rightarrow \theta[a^5] = s^{10} = H[a^2b^2]$$

$$H[a^6] \rightarrow \theta[a^6] = s^{12} = H[b^4] = H[a^3b^2]$$

$$H[a^7] \rightarrow \theta[a^7] = s^{14} = H[ab^4]$$

$$H[a^8] \rightarrow \theta[a^8] = s^{16} = H[a^2b^4]$$

$$H[a^9] \rightarrow \theta[a^9] = s^{18} = H[b^6] = H[a^3b^4]$$

$$H[a^{10}] \rightarrow \theta[a^{10}] = s^{20} = H[ab^6]$$

.

.

.

$$H[b] \rightarrow s^3$$

$$H[b^3] \rightarrow s^9 = H[a^3b]$$

$$H[b^5] \rightarrow s^{15} = H[a^3b^3]$$

$$H[b^7] \rightarrow s^{21} = H[a^3b^5]$$

$$H[b^9] \rightarrow s^{27} = H[a^3b^7]$$

.

.

.

$$H[ab] = s^5$$

$$H[a^2b] = s^7$$

$$H[ab^3] = s^{11}$$

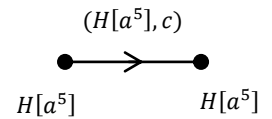
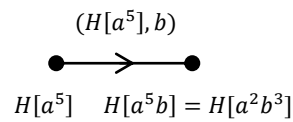
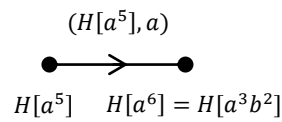
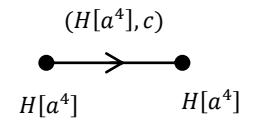
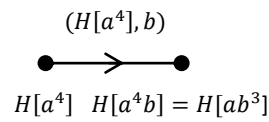
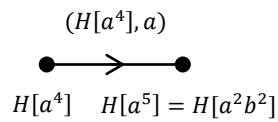
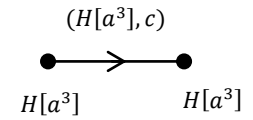
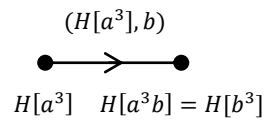
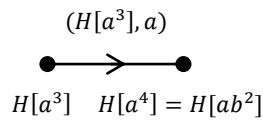
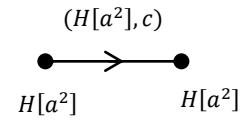
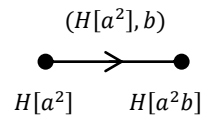
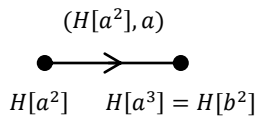
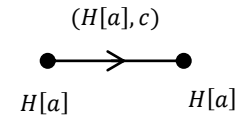
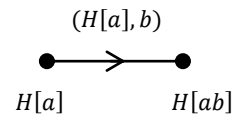
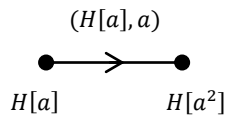
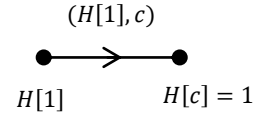
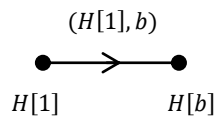
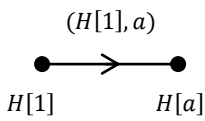
$$H[a^2b^3] = s^{13}$$

$$H[ab^5] = s^{17}$$

$$H[a^2b^5] = s^{19}$$

$$H[ab^7] = s^{22}$$

$$H[a^2b^7] = s^{25}$$



$$\begin{array}{c} (H[a^n], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[a^n] \quad H[a^{n+1}] = H[a^{n-2}b^2] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[a^n], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[a^n] \quad H[a^n b] = H[a^{n-3}b^3] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[a^n], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[a^n] \quad H[a^n] \end{array}$$

.

.

.

$$\begin{array}{c} (H[b], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b] \quad H[ba] = H[a] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b] \quad H[b^2] = H[a^3] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b] \quad H[b] \end{array}$$

.

.

.

$$\begin{array}{c} (H[b^2], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^2] \quad H[b^2 a] = H[a^4] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^2], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^2] \quad H[b^3] = H[a^3] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^2], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^2] \quad H[b^2] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^3], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^3] \quad H[b^3 a] = H[a^4 b] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^3], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^3] \quad H[b^4] = H[a^6] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^3], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^3] \quad H[b^3] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^4], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^4] \quad H[b^4 a] = H[a^4 b^2] = H[a^7] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^4], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^4] \quad H[b^5] = H[a^6 b] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^4], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^4] \quad H[b^4] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^5], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^5] \quad H[b^5 a] = H[a^7 b] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^5], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^5] \quad H[b^6] = H[a^6 b^2] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^5], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^5] \quad H[b^5] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^6], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^6] \quad H[b^6 a] = H[a^{10}] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^6], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^6] \quad H[b^7] = H[a^6 b^3] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^6], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^6] \quad H[b^6] \end{array}$$

.

.

.

$n=2k$ için

$$\begin{array}{c} (H[b^{2k}], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^{2k}] \quad H[b^{2k}a] = H[a^{3k+1}] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^{2k}], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^{2k}] \quad H[b^{2k+1}] = H[a^6 b^{2k-2}] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^{2k}], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^{2k}] \quad H[b^{2k}] \end{array}$$

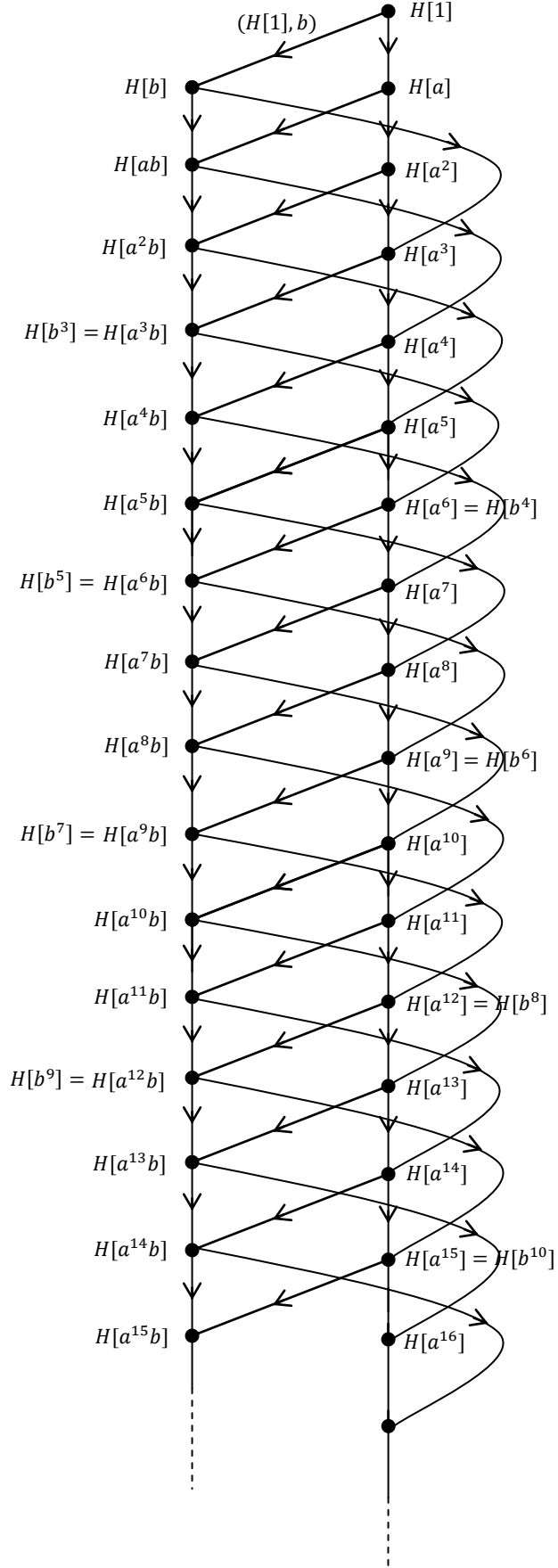
$n=2k+1$ için

$$\begin{array}{c} (H[b^{2k+1}], a) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^{2k+1}] \quad H[b^{2k+1}a] = H[a^{3k+1}b] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^{2k+1}], b) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^{2k+1}] \quad H[b^{2k+2}] = H[a^6 b^{2k-3}] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (H[b^{2k+1}], c) \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ H[b^{2k+1}] \quad H[b^{2k+1}] \end{array}$$

şeklinde devam eder. Grafiğini Şekil 4.15 deki gibi çizebiliriz.



Şekil 4.15: Γ_H graf örneği

5. İKİ KOMPLEKS

5.1 Giriş

Bu bölümde önceki bölümlerde işlenen grup sunuşları, ağaçlar ve graf teorisinin alt yapısını oluşturduğu iki kompleks ile ilgili tanımlara, bazı teorem ve ispatlara ve örneklere yer verilecektir. Bu bölümdeki bilgilere [3, 5, 8, 9, 18, 19, 20, 21, 22, 23] gibi kaynaklarda bulunabilir.

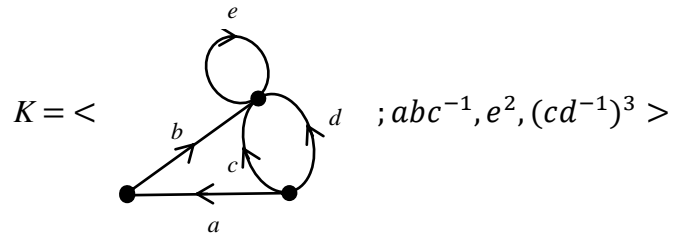
5.2 İki Kompleks

Γ graf ve Γ de kapalı yolların bir kümesi r olmak üzere,

$$K = \langle \Gamma ; r \rangle \quad (5.1)$$

ifadesine *iki kompleks* denir.

Örneğin, iki komplekse şöyle bir örnek verebiliriz.



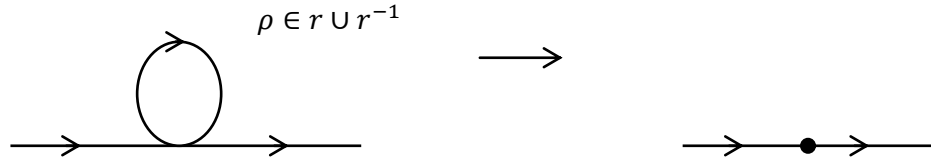
5.3 Yollar Üzerindeki İşlemler

(5.1) de verilen iki kompleksi düşünelim. Burada verilen Γ grafi için,

(i) Ters bir çift olan ee^{-1} silinebilir (çıkartılabilir),

(ii) Tanımlı bir yolun tersi veya tanımlı bir yolun alt yolu silinebilir

işlemlerini yapabiliriz.



Şekil 5.1: Tanımlı bir yolun alt yolu

α ve β lar iki kompleks üzerinde bir yol olmak üzere, bu yollar birbirini takip ediyor ise α, β lar K de denktir denir ve $\alpha \sim_K \beta$ ile gösterilir. Bu durum

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n = \beta$$

şeklinde gösterilir. Burada $i = 0, 1, \dots, n - 1$ için α_i, α_{i+1} den birisi diğerinden (i) veya (ii) işlemleriyle elde edilir. Ayrıca \sim_K bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve $[\alpha]_K$, α nın denklik sınıfıdır.

5.3.1 Önerme [3]: α, α^1 ve β, β^1 iki kompleks üzerinde yollar olsunlar. Eğer $\alpha \sim_K \alpha^1$ ve $\beta \sim_K \beta^1$ ise $\alpha\beta \sim_K \alpha^1\beta^1$ dir.

İspat: Burada $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha^1$ şeklinde α dan α^1 ye zincirini düşünelim. Ayrıca $\alpha\beta = \alpha_0\beta, \alpha_1\beta, \dots, \alpha_n\beta = \alpha^1\beta$ olup $\alpha\beta$ dan $\alpha^1\beta$ ye bir zincirdir. Böylece

$$\alpha\beta \sim \alpha^1\beta \quad (5.2)$$

Eğer $\beta = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m = \beta^1$ ise β dan β^1 ya bir zincir olur. Bu durumda $\alpha^1\beta = \alpha^1\beta_0, \alpha^1\beta_1, \dots, \alpha^1\beta_m = \alpha^1\beta^1$ olup $\alpha^1\beta$ dan $\alpha^1\beta^1$ ye bir zincirdir. Yani

$$\alpha^1\beta \sim \alpha^1\beta^1 \quad (5.3)$$

Böylece (5.2) ve (5.3) den $\alpha\beta \sim \alpha^1\beta^1$ sonucuna ulaşılır. \square

Bu durum bize iki kompleksler üzerinde denklik sınıfları oluşturabileceğimizi ve bu denklik sınıfları üzerinde

$$[\alpha]_K[\beta]_K = [\alpha\beta]_K \quad (\tau(\alpha) = i(\beta)) \quad (5.4)$$

işlemine tanımlayabileceğimizi söyler.

5.3.2 Tanım: (5.1) de verilen K iki kompleksini ve (5.4) de verilen işlemi düşünelim. Buna göre $\{[\alpha]_K; i(\alpha) = \tau(\alpha) = v\}$ kümesi bu işleme göre iki kompleksler üzerinde bir grup oluşturur. Bu gruba K nın v köşesi üzerindeki temel grubu denir. Burada birim eleman $[1]_K$ dır ve $[\alpha]_K$ nın tersi $[\alpha^{-1}]_K$ şeklindedir.

5.3.3 Örnek:

$K = \langle \begin{array}{c} \text{---} a \\ \circlearrowleft \\ v \end{array} \rangle ; a^2 \rangle$ biçiminde verilen iki kompleks için $\Pi_1(K, v)$ yi hesaplayalım.

Burada α, v üzerinde kapalı bir yol olsun. Eğer α dan tüm ters harf çiftlerini silersek K da α ya eşit olan bir yol elde etmiş oluruz. Bu yeni yolda eğer gerekliyse α yı yerine koyarsak, α nın hiçbir ters harf çiftine sahip olmadığını kabul etmiş oluruz. Yani, $\alpha = a^n$ şeklinde bir n değeri bulunabilir.

Varsayalım ki $n \geq 2$ olsun. Bu durumda $\alpha = a^2 a^{n-2} \sim a^n = \alpha$ ((ii) üzerinde yapılan işlem ile)

Eğer $n - 2 \geq 2$ ise, $a^{n-2} = a^2 a^{n-4} \sim a^{n-2}$ elde ederiz.

Sonuçta

$$a^{n \sim_K} \begin{cases} 1, & n \text{ çift ise} \\ a^{-1}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde etmiş oluruz.

Eğer n negatif ise, benzer bir önermeyle şunu elde ederiz.

$$a^{n \sim} \begin{cases} 1, & n \text{ çift ise} \\ a^{-1}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

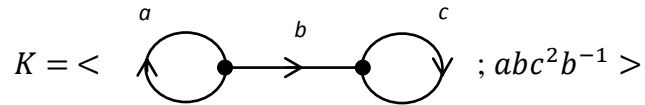
Böylece en fazla 3 denklik sınıfı elde etmiş oluruz ki bunlar, $[1]_K$, $[a]_K$, $[a^{-1}]_K$ dir. Fakat $a \sim_K a^{-1}$ ($a^{-1} \sim a^{-1}a^2 = a^{-1}aa \sim a$) olup böylece $[a]_K = [a^{-1}]_K$ olur ki en fazla iki denklik sınıfı elde ederiz ve bunlar $[a]_K$, $[1]_K$ olur.

Eğer bu iki yol K da birbirine eşit ise bu yolların uzunluğu $mod 2$ de birbirine uyumludur ve bu yollar aynıdır. Yani $\Pi_1(K, v)$, mertebesi 2 dir ve devirli bir gruptur.

5.4 İki Kompleksler Arasındaki Dönüşümler

$K = \langle \Gamma; r \rangle$ ve $K^1 = \langle \Gamma^1; r^1 \rangle$ iki kompleksleri verilsin. Burada Γ den Γ^1 ye olan ϕ fonksiyonuna K dan K^1 ye bir dönüşüm denir öyle ki en az bir $p \in r$ için $\phi(p) \in r^1$ şeklindedir.

5.4.1 Örnek:



$$K^1 = \langle \begin{array}{c} \text{---}x \\ \circlearrowleft \\ \text{---}y \\ \circlearrowright \end{array} ; xyx^2y^{-1}, x^4y^{-3} \rangle$$

iki komplekslerini düşünelim. Burada

$$\phi : a \rightarrow x, b \rightarrow y, c \rightarrow x$$

fonksiyonuna göre $\phi(abc^2b^{-1}) = xyx^2y^{-1}$ olup K^1 nün yoludur. ϕ , K dan K^1 ya bir dönüşümdür. Ayrıca aşağıda verilen K^{11} için,

$$K^{11} = \langle \begin{array}{c} \text{---}x \\ \circlearrowleft \\ \text{---}y \\ \circlearrowright \end{array} ; xyx^3y^{-1}, x^4y^{-3} \rangle$$

$$\phi : a \rightarrow x, b \rightarrow y, c \rightarrow x$$

fonksiyonunu düşünelim. Buradaki fonksiyon Γ den Γ^{11} ye bir dönüşümdür fakat K dan K^{11} ya bir dönüşüm değildir.

5.4.2 Önerme [3]: $K = \langle \Gamma; r \rangle$ ve $K^1 = \langle \Gamma^1; r^1 \rangle$ iki kompleksleri üzerinde ϕ dönüşümü verilsin. Ayrıca α^1, β^1 K^1 üzerinde yollar olsunlar. Eğer $\alpha^1 \sim_{K^1} \beta^1$ ise $\phi(\alpha^1) \sim_K \phi(\beta^1)$ dir.

İspat: İndirgenmiş homomorfizmadan,

$$\phi_* : \Pi_1(K^1, v^1) \rightarrow \Pi_1(K, \phi(v^1))$$

olur ve $\phi_*([a^1]_{K^1}) = [\phi(a^1)]_K$ daha önceki önermelerimizden iyi tanımlı olduğunu biliyoruz. Ayrıca ϕ_* bir homomorfizma olduğu

$$\phi_*([a^1]_K[\beta^1]_{K^1}) = \phi_*([a^1\beta^1]_K)$$

$$\begin{aligned}
&= [\phi(a^1 \beta^1)]_K \\
&= [\phi(a^1) \phi(\beta^1)]_K \\
&= [\phi(a^1)]_K [\phi(\beta^1)]_K \\
&= \phi_*([a^1]_{K^1}) \phi_*([\beta^1]_{K^1})
\end{aligned}$$

eşitliklerinden görülür. \square

5.5 İki Kompleksin Yerel Birebir Örten Dönüşümleri

5.5.1 Tanım: \tilde{K} ve K iki kompleks olmak üzere

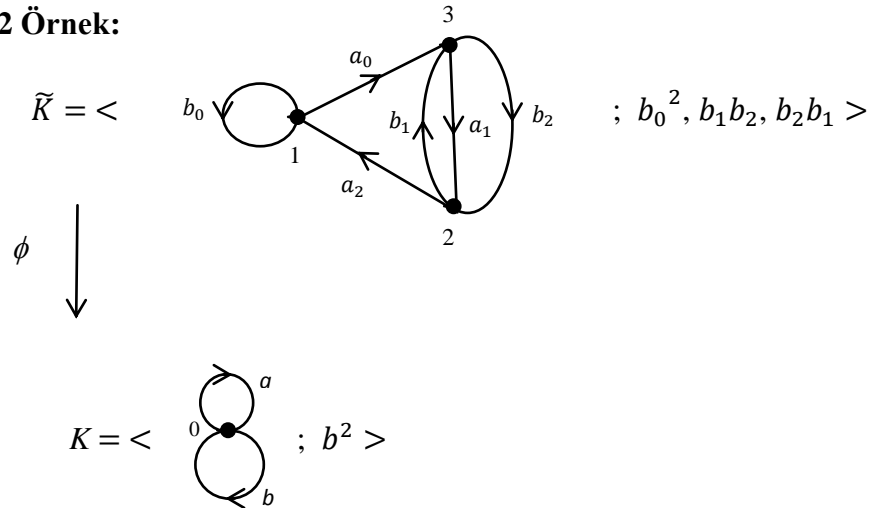
$$\phi: \tilde{K} = \langle \tilde{\Gamma}; \tilde{r} \rangle \rightarrow K = \langle \Gamma; r \rangle$$

dönüşümü eğer;

- (i) graflar birebir ve örten ise
- (ii) r, \tilde{r} nin tüm taşınmalarından oluşmuşsa

ϕ ye yerel olarak birebir örten denir.

5.5.2 Örnek:



$$\phi: a_i \rightarrow a, b_i \rightarrow b \quad (i=0,1,2)$$

olmak üzere burada $\tilde{\Gamma}$ nın starlarını inceleyecek olursak,

$$\text{star (1)} = \{b_0, b_0^{-1}, a_0, a_2^{-1}\} \rightarrow \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$$

$$\text{star (2)} = \{a_2, a_1^{-1}, b_1, b_2^{-1}\} \rightarrow \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$$

$$\text{star (3)} = \{a_0^{-1}, a_1, b_1^{-1}, b_2\} \rightarrow \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$$

olur. Ayrıca b_0^2, b_1b_2, b_2b_1 yollarının taşınmaları da b^2 olacağından bu durumda ϕ yerel olarak birebir ve örten olduğunu bulmuş oluruz.

5.5.3 Teorem [3]: \tilde{K} ve K iki kompleks olmak üzere, $\phi: \tilde{K} \rightarrow K$ dönüşümü yerel birebir ve örten ise

$$\phi_*: \Pi_1(\tilde{K}, \tilde{v}) \rightarrow \Pi_1(K, \phi(\tilde{v}))$$

indirgenmiş homomorfizması da birebir dir.

5.6 İki Komplekslerin Temel Gruplarını Hesaplama

$K = \langle \Gamma; r \rangle$ iki kompleks T, Γ de maksimal ağaç (tree) E^+ , Γ nin kenarlarının kümesi olmak üzere

$$\wp_K = \wp_{K,T,E^+} = \langle x_e (e \in E^+, e \notin T); R_\rho (\rho \in r) \rangle$$

ifadesi iki kompleksin sunuşunu verir.

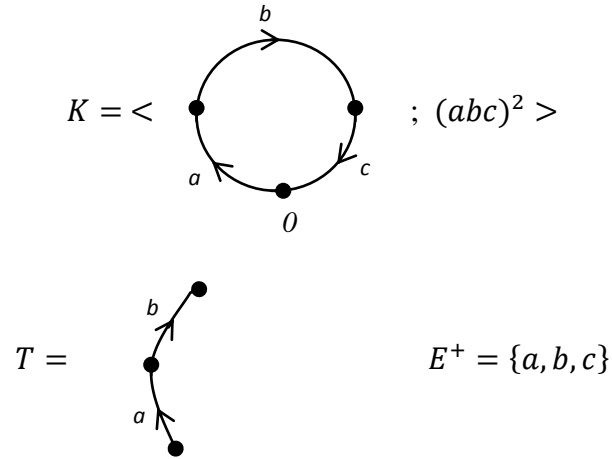
Burada, $\rho = e_1^{\varepsilon_1} e_2^{\varepsilon_2} \dots e_n^{\varepsilon_n}$ $e_i \in E^+$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i = 1, \dots, n$) olmak üzere eğer $e_i \in T$ ise bu harfler silinir, $e_i \notin T$ ise e_i harfi yerine x_{e_i} yazılır. Böylece elde ettiğimiz bu yeni kelime R_ρ olacaktır.

5.6.1 Teorem [9]: K , iki kompleksin de herhangi bir v köşesi ve için,

$$\Pi_1(K, v) \cong G(\wp_{K,T,E^+})$$

izomorfizması vardır.

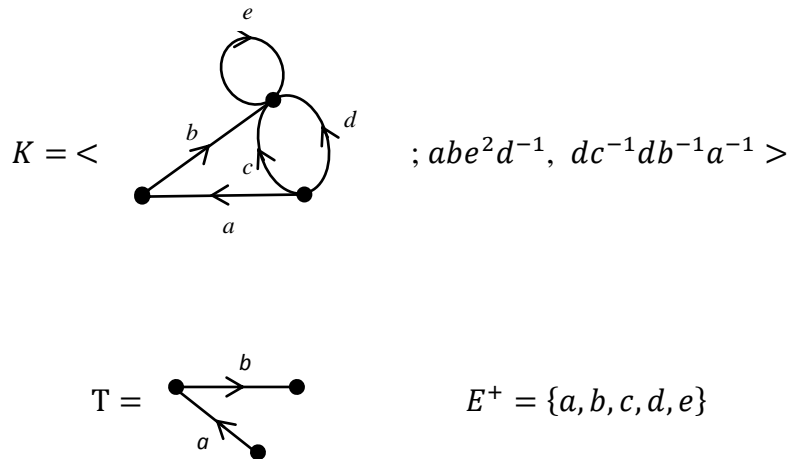
5.6.2 Örnek: Aşağıda verilen K iki kompleksinin temel grubunu bulalım.



$$R_\alpha : \alpha = (abc)^2 = a^2b^2c^2 = x_c^2 \quad (a \in T, b \in T, c \notin T)$$

Burada $\wp_{K,T,E^+} = \langle x_c; x_c^2 \rangle$ mertebesi 2 olan devirli bir grubun sunuşudur. Böylece Teorem 5.7.1 e göre $\Pi_1(K, 0)$ devirli ve mertebesi 2 dir.

5.6.3 Örnek:



Burada verilen iki kompleks ve T ağacını düşünerek grup sunuşunu yazmak istediğimizde $R_\alpha : \alpha = abe^2d^{-1} = x_e^2x_d^{-1}$ olarak bulunur ve sunuşu

$$\wp_{K,T,E^+} = \langle x_c, x_d, x_e ; x_e^2x_d^{-1}, x_dx_c^{-1}x_d \rangle$$

şeklindedir.

F^* ; x_c, x_d, x_e üzerindeki serbest grup, $M ; [x_e^2x_d^{-1}], [x_dx_c^{-1}x_d]$ nin normal kapanış kümesi olsun. Böylece $G(\wp_{K,T,E^+}) \cong F^*/M$ ve $\bar{x}_e = [x_e]M$, $\bar{x}_d = [x_d]M$, $\bar{x}_c = [x_c]M$ tarafından üretilecektir. Burada $[x_e^2x_d^{-1}] \in M$ ye bakacak olursak, yani

$$\begin{aligned} [x_e^2x_d^{-1}]M &= [1]M = 1_{F^*/M} \\ \Rightarrow ([x_e]M)^2([x_d]M)^{-1} &= 1 \\ \Rightarrow \bar{x}_e^2\bar{x}_d^{-1} &= 1 \Rightarrow \bar{x}_d = \bar{x}_e^2 \end{aligned}$$

olur. Benzer olarak,

$$[x_dx_c^{-1}x_d] \in M, \bar{x}_d\bar{x}_c^{-1}\bar{x}_d = 1, \bar{x}_c^{-1} = \bar{x}_d^{-2}$$

elde edilir. Son olarak ,

$$\bar{x}_c = \bar{x}_d^2 = \bar{x}_e^4$$

eşitliğini elde ederiz. Yani F^*/M devirlidir ve \bar{x}_e tarafından üretilir. Tanımlı yoldan çok üretece sahip olduğundan biliyoruz ki G sonsuz devirlidir. [28] Böylece bu grup sonsuz devirlidir. Buradan teorem gereği $\Pi_1(K, 0)$ sonsuz devirlidir.

5.6.4 Örnek: $\wp_{K,T,E^+} = \langle x_c, x_d, x_e ; x_e^2x_d^{-1}, x_dx_c^{-1}x_d \rangle$ sunuşuna baktığımızda üreteçlerin sayısı, kapalı yolların sayısından büyük yani $3 > 2$ olduğundan G teorem gereği sonsuz devirlidir. Yani $G(\wp_{K,T,E^+})$ sonsuzdur. Eğer $G(\wp_{K,T,E^+})$ sonsuz devirli ise $\Pi_1(K, 0)$ sonsuz devirlidir.

5.7 İki Kompleksin Gruplarla Etiketlenmesi

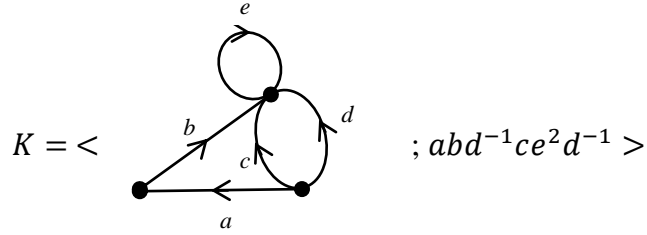
K herhangi iki kompleks G herhangi bir grup θ , Γ nin E kenar kümesinden G ye bir dönüşüm olsun. Yani

$$\theta : E \rightarrow G$$

$$e \mapsto g_e$$

olarak tanımlayalım ve $\theta(e^{-1}) = \theta(e)^{-1}$ olduğunu farz edelim. Burada ($g_{e^{-1}} = g_e^{-1} \forall e \in E^+$) hatırlayacak olursak; Γ de bir α yolu $\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ ise $\theta(\alpha) = g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_n}$ dir. Ayrıca $\theta(\alpha^{-1}) = \theta(\alpha)^{-1}$ olup $g_{e_n}^{-1} \dots g_{e_2}^{-1} g_{e_1}^{-1} = (g_{e_1} g_{e_2} \dots g_{e_n})^{-1}$ dir. Eğer $\theta(\rho) = 1$, $\rho \in K$ ise θ , K dan G ye dönüşümdür.

5.7.1 Örnek:



İki kompleksine ve mertebesi 7 olan devirli $G = g_\rho(t)$ grubuna baktığımızda

$$\theta : a \rightarrow t, b \rightarrow t^2, c \rightarrow t^4, d \rightarrow t^3, e \rightarrow t^3$$

olarak aldığımız θ dönüşümünde $abd^{-1}ce^2d^{-1}$ yolunu t ye göre yazarsak,

$$\theta(abd^{-1}ce^2d^{-1}) = t \cdot t^2 \cdot t^{-3} \cdot t^4 \cdot t^6 \cdot t^{-3} = t^7 = 1$$

eşit olduğunu elde ederiz.

KAYNAKLAR

- [1] Ateş, F., “Grup ve Monoid Yapılarına Geometrik Yaklaşımlar”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2007).
- [2] Açıl, F., “Grup Sunuşlarında Etkililik Kavramı”, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (1999).
- [3] Baik, Y. G., “Generators of the Second Homotopy Module of Group Presentations with Applications”, Ph.D. Thesis, *Universty of Glasgow*, 18, 22, 42, 46, (1992).
- [4] Burns, R.G., “A Note on Free Groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 23, 14-17, (1969).
- [5] Bollobás, B., *Graph Theory: An Introductory Course*, New York: Springer-Verlag, (1979).
- [6] Baumslag, G., *Topics in Combinatorial Group Theory*, Birkhauser Verlag, Switzerland, 33-36, 63-67, (1993).
- [7] Cohen, D. E., “Combinatorial Group Theory”, A Topological Approach, *London Math. Soc. Stud. Texts 14*, Cambridge Universty Press, 1-30, 117-123, (1989).
- [8] Chartrand, G., *Introductory Graph Theory*, New York, (1985).
- [9] Colins, D. J., Grigorchuk, R. I., Kurchanov, P. F. and Zieschang, H., *Combinatorial Group Theory and Applications to Geometry*, Springer-Verlag, New York, (1998).
- [10] D. L. Johnson, “Presentations of Groups”, *London Mathematical Society Student Texts 15*, Cambridge Universty Press, (1990).

- [11] El-Mosalamy, M. S. H., “Applications of Star Complexes in Group Theory”, Ph.D. Thesis, *Universty of Glasgow*, 1-63, (1987).
- [12] Güzel, E., “Grup ve Monoid Cebirsel Yapısında Karar Verme Problemleri”, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2006).
- [13] Gould, R. (Ed.), *Graph Theory*, Menlo Park, Benjamin-Cummings, (1988).
- [14] Grossman, I., Magnus, W., *Groups and Their Graphs*, Washington, DC: Math. Assoc. Amer., (1965).
- [15] J-P Serre., *Trees*, Springer-Verlag, Berlin-Heidleberg-New York, (1980).
- [16] Johnson, D.L., *Presentations of Groups*, 2nd Edition, Cambridge University Press, England, (1997).
- [17] Kocapınar, C., “Serbest-ile-Devirli Gruplar Üzerine”, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2008).
- [18] Koruoğlu, Ö., “Graflar, Gruplar ve Yüzeyler Üzerine”, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).
- [19] Magrus, W., Karras, A. And Solitar, D., *Combinatorial group theory*, Second Edition, Dover Publication, New York, (1996).
- [20] M. Hall Jr., *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, (1959).
- [21] Magnus, W., Karrass, A. And Solitar, D., *Combinatorial Group Theory*, Dover Publications Inc., 48-56, (1976).
- [22] Malik, D. S., Mordeson, J. M. and Sen M. K., *Fundamentals of Abstract Algebra*, The McGraw-Hill Companies, Inc., (1997).
- [23] Roger C. Lyndon ,Paul E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer, (1977).

- [24] Rotman, J. J., *An Introduction to The Theory of Groups*, Wm. C. Brown Publishers, Printed in the United States of America, 11-28, (1998).
- [25] Robinson, D. J. S., *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, (1980).
- [26] Rotman, J. J., *An Introduction to the Theory of Groups*, Wm. C. Brown Publishers, Third Edition, Iowa, (1988).
- [27] Rose, J. S., *A Course on Group Theory*, New York: Dover, (1994).
- [28] Sürmeli, S., “Bazı Grup Sunuşlarının Elde Edilmeleri ve Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2003).
- [29] Scott, W.R., *Group Theory*, Prentice-Hall Inc., (1964).
- [30] Trudeau, R.J., *Introduction to Graph Theory*, Dover, New York, (1994).