

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**BİLGİSAYAR VİRÜSLERİNİN YAYILIMINI İNCELEYEN SLBR
MODELİNİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ TÜREV İLE
ANALİZİ**

İLHAN KUDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. SÜMEYRA UÇAR (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR
Prof. Dr. Ali KONURALP

BALIKESİR, ARALIK - 2024

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Bilgisayar Virüslerinin Yayılımını İnceleyen SLBR Modelinin Atangana-Baleanu Kesirli Türev İle Analizi**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İlhan KUDAR

ÖZET

**BİLGİSAYAR VİRÜSLERİNİN YAYILIMINI İNCELEYEN SLBR MODELİNİN
ATANGANA-BALEANU KESİRLİ TÜREV İLE ANALİZİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLHAN KUDAR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. SÜMEYRA UÇAR)
BALIKESİR, ARALIK - 2024**

Bilgisayar virüsleri, bir bilgisayar sistemine zarar vermek veya verileri çalmak amacıyla tasarlanmış zararlı yazılımlardır. Bilgisayar virüsleri kullanılan bilgisayarlarda istenmeyen değişikliklere neden olabilmektedir. Bilgisayar virüslerinin zararlarını öngörebilmek adına çeşitli matematiksel modeller geliştirilmiştir. Bu çalışmada bilgisayar ağındaki virüs yayılımını kontrol altına alabilmek ve zararlarını minimize edebilmek için SLBR modelini Atangana-Baleanu kesirli türevi ile incelenecektir.

Tez çalışmamız beş ana başlık içermektedir. İlk bölüm olan giriş kısmında matematiksel modellerin kullanım alanlarından ve bilgisayar virüsleri üzerine yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde modelimizde kullanacağımız Atangana-Baleanu türevi ile ilgili temel tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde bilgisayar virüs programları için SLBR (duyarlı-gizli-virüslü-kurtarılmış) modeline yer verilmiştir. Modele ait diferansiyel denklemler parametreler ve akış diyagramı yer almaktadır.

Dördüncü bölümde kesirli SLBR modelinin çözüm özellikleri anlatılmıştır.

Beşinci bölümde matematiksel modelin davranışını analiz edebilmek için nümerik yöntemler kullanılarak ele alınan modele ait grafikler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Atangana-Baleanu türevi, SLBR modeli, sabit nokta teorisi

ABSTRACT

ANALYSIS OF SLBR MODEL INVESTIGATION OF SPREAD OF COMPUTER VIRUSES WITH ATANGANA-BALEANU FRACTIONAL DERIVATIVE

MSC THESIS

İLHAN KUDAR

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. SÜMEYRA UÇAR)

BALIKESİR, DECEMBER - 2024

Computer viruses are malicious software designed to damage a computer system or steal data. Computer viruses can cause unwanted changes in the computers used. Numerous mathematical models have been constructed to forecast the harm that computer viruses can do. In this study, we examine the SLBR model with the Atangana-Baleanu fractional derivative in order to control the spread of viruses in the computer network and minimize their damage.

There are five chapters in this thesis. In the first section, the introduction, the areas of use of mathematical models and studies on computer viruses are discussed.

In the second section, basic definitions regarding the Atangana-Baleanu derivative to use in our model are given.

The third section includes the SLBR (susceptible-latent-breaking out-recovering) model for computer virus programs. Furthermore, the differential equations, parameters and flow diagram of the model are comprised.

In the fourth section, the solution properties of the fractional SLBR model are explained.

In the fifth section, the graphs of the model are given using numerical methods to analyze the behavior of the mathematical model.

KEYWORDS: Atangana-Baleanu derivative, SLBR model, fixed point theory

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
SEMBOL LİSTESİ.....	vi
KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Bazı Temel Tanım ve Teoremler.....	4
3. BİLGİSAYAR VİRÜS PROGRAMI İÇİN SLBR MODELİNİN İNCELENMESİ.....	6
4. KESİRLİ SLBR MODELİNİN ÇÖZÜM ÖZELLİKLERİ.....	9
5. NÜMERİK SONUÇLAR.....	18
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27
7. KAYNAKLAR.....	28
ÖZGEÇMİŞ.....	32

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1: SLBR modelinin akış diyagramı.....	7
Şekil 5.1: Model elemanlarının kesirli türev mertebesi ψ 'ya göre davranışı.....	21
Şekil 5.2: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.75$ için model (1)'in davranışı.....	22
Şekil 5.3: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.85$ için model (1)'in davranışı	23
Şekil 5.4: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.95$ için model (1)'in davranışı	24
Şekil 5.5: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.9$ için α_1 parametresine göre virüslü bilgisayarlar B(t) sınıfının davranışı.....	25
Şekil 5.6: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.9$ için α_2 parametresine göre virüslü bilgisayarlar B(t) sınıfının davranışı.....	26

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1: SLBR modelinin bileşenleri ve parametre tanımları.....	8
--	---

SEMBOL LİSTESİ

\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
$H^1(a,b)$: 1-Boyutlu Sobolev uzayı
${}^{ABC}_a D_t^\psi$: Atangana-Baleanu türev operatörü
${}^{ABC}_a I_t^\psi$: Atangana-Baleanu integral operatörü
$\Gamma(\cdot)$: Gamma fonksiyonu
$\ \cdot\ $: Norm fonksiyonu

KISALTMALAR LİSTESİ

SIS	: Duyarlı- Enfekte -Duyarlı
SIR	: Duyarlı- Enfekte-İyileşen
SIRS	: Duyarlı- Enfekte -İyileşen-Duyarlı
SEIR	: Duyarlı-Maruz kalan- Enfekte-İyileşen
SEIS	: Duyarlı-Maruz kalan-Enfekte-Duyarlı
SLBS	: Duyarlı-Gizli-Virüslü-Duyarlı
SIC	: Duyarlı-Enfekte-Bağışık
VEISV	: Savunmasız-Maruz Kalan-Enfekte-Güvenli-Savunmasız
SLBRS	: Duyarlı-Gizli-Virüslü-Virüslü-Kurtarılmış-Duyarlı
SLBR	: Duyarlı-Gizli-Virüslü-Kurtarılmış

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her döneminde ve aşamasında bana tüm konularda yardımcı olup bilgilerini tecrübelerini her zaman benimle paylaşan beni yüreklendiren desteğiyle her anımda yanımda olan kıymetli hocam Doç.Dr.Sümevra UÇAR'a gönülden teşekkürlerimi sunuyorum.

Her anımda yanımda hissettiğim ilgi ve sevgisini benden esirgemeyen sevgili aileme ve çok değerli eşim Güzün KUDAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Balıkesir, 2024

İlhan KUDAR

1. GİRİŞ

Matematik, birçok farklı alan ve disiplinde geniş bir şekilde kullanılır. Matematiğin önemli kullanım alanlarından bazıları şöyledir: Fizik biliminde matematiği doğanın anlaşılması ve fenomenlerin matematiksel modellenmesi için kullanır. Hareket, kuvvet, enerji gibi konular matematiksel ifadelerle açıklanır. Mühendislik disiplinlerinde matematik, yapı tasarımı, elektrik mühendisliği, makine mühendisliği ve diğer birçok alanda temel bir rol oynar. Mühendisler, matematiksel modelleme ve analiz kullanarak problemleri çözerler.

Algoritmaların tasarımı, veri yapıları, yapay zeka ve sayısal hesaplamalar gibi birçok bilgisayar bilimi alanında matematik büyük bir öneme sahiptir. Matematiksel yöntemler verileri analiz edip tahminde bulunmada, finansal analiz ve risk yönetiminde, uzay bilimi ve astronomi, gök cisimlerinin hareketleri ve evrenin yapısını anlamada oldukça önemlidir. Biyoloji, genetik ve tıp alanlarında matematik, biyoistatistik ve biyoinformatikle birleştirilerek kullanılır. Bu, genetik verilerin analizinden, ilaç keşfine kadar bir dizi uygulamayı içerir. Sonuç olarak, eğitim ve araştırmada matematik temel bir araçtır ve birçok bilim dalında yapılan araştırmalarda kullanılır.

Matematik bilimi gerçek dünya problemlerini çözmek için matematiksel yöntemleri kullanır. Matematik, genel olarak soyut düşünme, analitik düşünme, problem çözme ve modelleme becerilerini geliştirmek açısından da önemlidir. Böylece matematik birçok farklı disiplinde temel bir araç olarak kullanılır. Matematiksel modeller gerçek dünyadaki olayları, süreçleri veya sistemleri matematiksel ifadelerle temsil eden yapılar olarak tanımlanır. Bu modeller, genellikle bir problemi anlamak, analiz etmek, tahmin yapmak, kararlar almak amacıyla kullanılır [1-10]. Matematiksel modellerin oluşturulması genellikle şu adımları izler:

- **Problemin Tanımı:** Öncelikle, çözülmek istenen gerçek dünya probleminin tanımlanması gerekir. Bu, modelin hangi süreci veya olayı temsil edeceğini belirlemek anlamına gelir.
- **Değişkenlerin Belirlenmesi:** Matematiksel modelde kullanılacak değişkenler belirlenir. Bu değişkenler, genellikle olayın veya sistemin özelliklerini temsil eder.
- **İlişkilerin Kurulması:** Değişkenler arasındaki ilişkiler, matematiksel denklemler veya fonksiyonlar aracılığıyla ifade edilir. Bu, olayın nasıl geliştiğini veya sistemdeki değişikliklerin nasıl gerçekleştiğini gösterir.

- Parametrelerin Tanımlanması: Modellerde kullanılan sabit değerler veya parametreler belirlenir. Bu parametreler, modelin gerçek dünyayla daha iyi uyum sağlamasına yardımcı olur.
- Modelin Doğrulanması: Oluşturulan matematiksel model, gerçek dünya verileri veya gözlemlerle karşılaştırılarak doğrulanmalıdır. Modelin gerçekliğini ve doğruluğunu kontrol etmek için bu adım önemlidir.
- Modelin Çözülmesi ve Analizi: Matematiksel modeller genellikle analitik veya sayısal yöntemlerle çözülür. Elde edilen sonuçlar, problemin çözümüne dair bilgiler sağlar.
- Sonuçların Yorumlanması: Model tarafından üretilen sonuçlar, gerçek dünyada karşılaştığımız olaylara göre yorumlanır. Bu, problemi anlamak, kararlar almak veya gelecekteki durumları tahmin etmek için kullanılır.

Matematiksel modeller salgın hastalıkların yayılmasını ve kontrolünü anlamak için kritik bir rol oynar. Bu modeller hastalıkların yayılma dinamiklerini bulaşma hızını nüfus etkileşimlerini ve aşılama stratejilerini geliştirebilmek için kullanılır. Modeller, sağlık otoritelerine ne zaman müdahale etmeleri gerektiğini belirlemede yardımcı olur, kaynakların nasıl dağıtılacağına dair stratejiler geliştirilmesine olanak tanır ve toplumsal farkındalık yaratmada etkili araçlar sağlar. Salgın hastalıklara karşı alınacak önlemlerin planlanması ve değerlendirilmesinde matematiksel modelleme, temel bir araçtır. Örneğin salgın hastalıklarla ilgili SIS, SIR, SIRS, SEIR ve SEIS modelleri literatürde ayrıntılı olarak çalışılmıştır [11-15]. Ayrıca, dijital bilgisayar virüsleri için oluşturulan matematiksel modeller ile biyolojik hastalık virüsleri arasında pek çok açıdan benzerlikler vardır. Her iki virüs de bir kaynaktan (bilgisayar dosyaları veya enfekte bireyler) diğerine geçer. Bilgisayar virüsleri, e-posta, internet veya USB bellekler aracılığıyla yayılırken, hastalık virüsleri hava, temas aracılığıyla bulaşır. Her iki tür de salgınlar yaratabilir. Bir bilgisayar virüsü ağ üzerinde hızla yayılabilirken, bir hastalık virüsü de topluluklar arasında hızla bulaşabilir.

Bilgisayar virüslerinin en belirgin özelliği bulaşıcı olması ve çoğalmasıdır. Bu tarz virüsler, bilgisayar sistemlerine zarar vermek, veri çalmak veya sistemlerin çalışmasını bozmak amacıyla tasarlanmış kötü niyetli yazılımlardır ki bunlar genellikle diğer yazılımların içine gizlenir ve bu yazılımlar çalıştırıldığında virüs de aktif hale gelir [16-19].

Virüslerin yayılma hızı ve etkisi zamanla değişebilir. Matematiksel modeller, bu dinamikleri inceleyerek, virüslerin hangi koşullar altında daha hızlı yayıldığını belirlemeye yardımcı olur. Matematiksel modelleme sayesinde, virüslerin gelecekteki davranışları öngörülebilir. Bu da güvenlik önlemlerinin zamanında alınmasına olanak tanır. Güvenlik yazılımlarının etkinliğini artırmak için matematiksel modelleme ile virüslerin davranışlarına karşı stratejiler geliştirilebilir. Böylece, bilgisayar virüslerinin tüm dünya düzeyinde yol açabileceği birçok ekonomik kaybın kolaylıkla en kısa sürede önüne geçilebilecektir. Bu durumlara dikkat edilerek, kaynaklarda yer alan bilgisayar virüslerinin yapısını matematiksel modellerle ortaya koyan SIR, SLBS, SIC, SEIR, VEISV, SIS, SEIS, SIRS çalışmaları oluşturulmuştur [20-27].

Matematiksel analize ait olan kesirli mertebeden türev ve integral, gerçek dünya problemlerinde yaygın şekilde kullanılmaktadır. Kesirli analiz, integral ile türevin kesirli mertebe içeren halidir [28, 29]. Kesirli mertebeden analizin en önemli özelliği birçok türev tanımının var olmasıdır. Literatürde Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo gibi pek çok kesirli mertebeden farklı türev tanımları yer almaktadır. Atangana ve Baleanu tarafından Caputo-Fabrizio kesirli türevindeki üstel çekirdek fonksiyonu Mittag-Leffler fonksiyonu ile değiştirilerek yeni bir kesirli türev tanımı verilmiştir. Atangana-Baleanu türevi klasik türevler yerine, daha esnek ve genişletilmiş bir çerçeve sunarak doğadaki bazı olayları daha iyi modellemek için kullanılır.

Bu tez çalışmasında bilgisayar virüslerinin yayılımını inceleyen SLBR modeli Atangana-Baleanu kesirli türevi ile detaylı bir şekilde incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda çalışmamızın diğer kısımlarında kullanılacak bazı tanım ve teoremler yer alacaktır.

2.1 Bazı Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilecektir.

2.1.1.Tanım (Gamma Fonksiyonu)

$\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{\dots, -2, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

integraliyle tanımlanmış fonksiyona Gamma fonksiyonu denir [30].

Gamma fonksiyonunun önemli özelliklerinin bazıları şöyledir:

i. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2!, \Gamma(4) = 3!, \dots, \Gamma(x+1) = x! \quad x \in \mathbb{Z}$

ii. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

iii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iv. $\Gamma(0) = \infty, \Gamma(\infty) = 0$

2.1.2.Tanım (Tek Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu)

$\alpha > 0$ için

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

fonksiyona bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu denir [30].

2.1.3.Tanım (Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi) $\psi \in [0,1]$, $b > a$ ve $f \in H^1(a,b)$ olsun. Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}^{ABC}D_t^\psi f(t) = \frac{F(\psi)}{1-\psi} \int_a^t E_\psi \left[-\frac{\psi(t-\delta)^\psi}{(1-\psi)} \right] f'(\delta) d\delta \quad (2.1)$$

olarak verilir. Burada $F(\psi)$ normalleştirme fonksiyonudur [31].

2.1.4.Tanım (Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali) $\psi \in [0,1]$, $b > a$ ve $f \in H^1(a,b)$ olsun. ψ . mertebeden Atangana-Baleanu kesirli integrali

$${}^{AB}I_t^\psi f(t) = \frac{1-\psi}{F(\psi)} f(t) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_a^t (t-\delta)^{\psi-1} f(\delta) d\delta \quad (2.2)$$

olarak verilir [31].

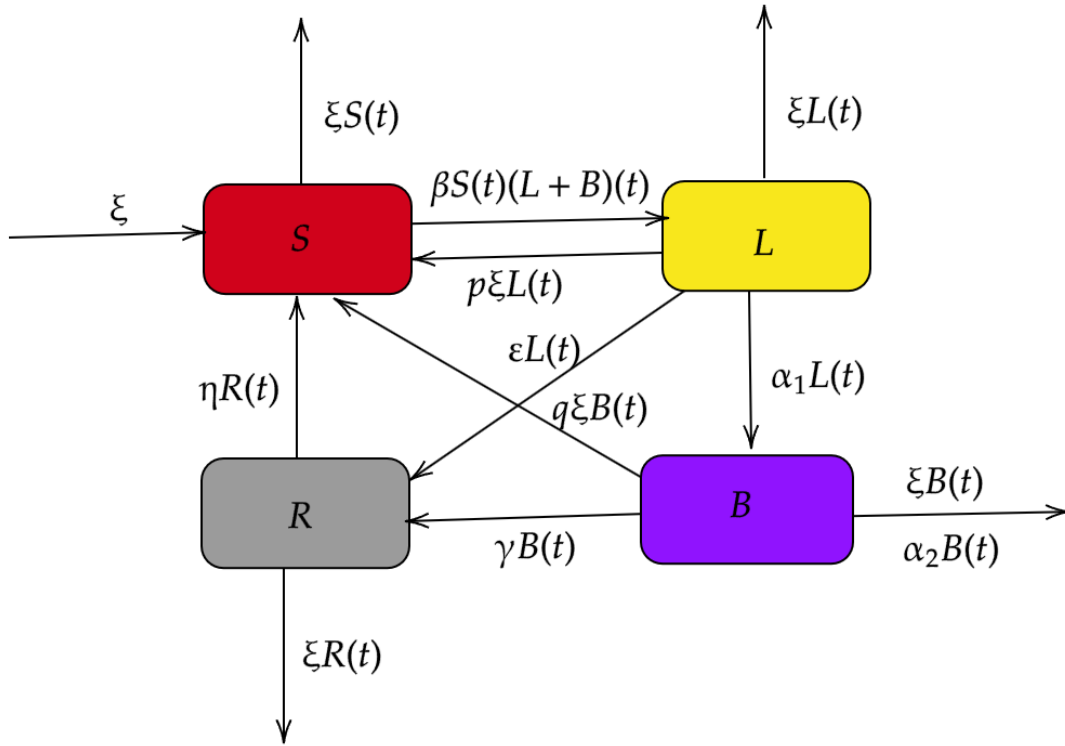
3. BİLGİSAYAR VİRÜS PROGRAMI İÇİN SLBR MODELİNİN İNCELENMESİ

Bilgisayar virüsleri kötü amaçlı programların bilgisayarlar arasındaki yayılma ortamı aracılığıyla kopyalanması ve bulaştırılması anlamına gelir. Söz konusu virüslü programlar kendilerini başka dosyalara veya programlara ekleyerek çoğalıp yayılabilirler. Virüsler, çalışmaya başladığında, kendilerini diğer dosyaların içerisine kopyalamaya başlamış olurlar. Virüsler kullanıcılara gönderilen e-postaların içerisine gizlenebildiği için kullanıcı e-postayı açtığı anda virüs devreye girebilir, güvenilir olmayan kaynaklardan veya sitelerden dosya indirilirken dosyanın içeriğinde gelebilir veya virüs bulaşmış bir usb bellek, harici disk bilgisayara bağlandığında virüsün yayılmasına neden olabilir. Bunlara ek olarak, kullanıcılar kötü amaçlı yazılımların bulunduğu sitelere girdiğinde virüsler otomatik olarak bilgisayara bulaşır. Ayrıca, bir ağ virüsü bilgisayarı enfekte ettikten sonra e-postalar, web’de gezinme, disk ortamı ve mobil ortam aracılığıyla ilişkili diğer bilgisayarları enfekte eder. Bu virüslü bilgisayarlar ağ ortamını kullanarak diğer bilgisayarları virüslü hale getirebilirler. Örneğin Nimda, Melissa, ILoveyou, My doom, Storm Worm gibi virüsler en ünlü virüslerden bazılarıdır [32-36].

[37] numaralı kaynakta bilgisayar virüslerinin internet üzerinde yayılmasını inceleyen SLBRS modeli verilmiştir. Bu çalışmada verilen SLBRS modeli dikkate alınarak, bilgisayar ağındaki virüs yayılımını kontrol altına alabilme amacıyla α_1 virüslerin aktif hale gelme oranı ve α_2 virüslü bilgisayarların internet bağlantısını kesme oranı parametreleri eklenerek oluşturulan aşağıdaki SLBR modeli ele alınacaktır:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \xi - \beta S(t)(L+B)(t) + \eta R(t) - \xi S(t) + q\xi B(t) + p\xi L(t) \\ \frac{dL}{dt} &= \beta S(t)(L+B)(t) - \varepsilon L(t) - \xi L(t) - \alpha_1 L(t) - p\xi L(t) \\ \frac{dB}{dt} &= \alpha_1 L(t) - \gamma B(t) - \xi B(t) - \alpha_2 B(t) - q\xi B(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma B(t) + \varepsilon L(t) - \eta R(t) - \xi R(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Bu modele ait akış diyagramını Şekil 3.1 ile gösterilmiştir:



Şekil 3.1: SLBR modelinin akış diyagramı

İlk olarak (3.1) modelinin bileşenlerini ve parametre tanımlarını açıklayalım. S, L, B ve R model bileşenlerini belirtmek üzere, SLBR modelinde bilgisayarlar dört sınıf olarak tanımlanır:

$S(t)$: t zamanındaki duyarlı bilgisayar sayısı,

$L(t)$: gizli virüslü bilgisayarlar,

$B(t)$: virüslü bilgisayarlar,

$R(t)$: kurtarılmış bilgisayarlar

sınıflarını temsil etmektedir.

(3.1) modelindeki parametreler aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3.1: (3.1) SLBR modelinin bileşenleri ve parametre tanımları

Parametre	Tanım
ξ	İnternete bağlı bilgisayar oranı
β	Her bir S bilgisayarının L bilgisayarı yada B bilgisayarı ile temas ederek L bilgisayarlarına dönüşme oranı
α_1	Virüslerin aktif hale gelme oranı
α_2	B bilgisayarlarının internet bağlantısını kesme oranı
ε	L bilgisayarlarının iyileştirilme oranı
γ	B bilgisayarlarının iyileştirilme oranı
η	R bilgisayarlarının bağışıklığını kaybetme oranı
P	L bilgisayarlarının S bilgisayarına dönüşme oranı
q	B bilgisayarlarının S bilgisayarına dönüşme oranı

Bu çalışmada ele alınacak olan SLBR modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 {}^{ABC}_0 D_t^\psi S(t) &= \xi - \beta S(t)(L+B)(t) + \eta R(t) - \xi S(t) + q\xi B(t) + p\xi L(t) \\
 {}^{ABC}_0 D_t^\psi L(t) &= \beta S(t)(L+B)(t) - \varepsilon L(t) - \xi L(t) - \alpha_1 L(t) - p\xi L(t) \\
 {}^{ABC}_0 D_t^\psi B(t) &= \alpha_1 L(t) - \gamma B(t) - \xi B(t) - \alpha_2 B(t) - q\xi B(t) \\
 {}^{ABC}_0 D_t^\psi R(t) &= \gamma B(t) + \varepsilon L(t) - \eta R(t) - \xi R(t)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$0 < \psi < 1$ olmak üzere, burada ${}^{ABC}_0 D_t^\psi$ Atangana-Baleanu kesirli türevini ifade etmektedir.

4. KESİRLİ SLBR MODELİNİN ÇÖZÜM ÖZELLİKLERİ

Ele alınan (3.2) modelinin her iki tarafına (2.2) numaralı eşitlikte verilen Atangana-Baleanu kesirli integrali uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 S(t) - S(0) &= \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left[\xi - \beta S(t)(L+B)(t) + \eta R(t) - \xi S(t) + q\xi B(t) + P\xi L(t) \right] \\
 &\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\begin{aligned} &\xi - \beta S(\delta)(L+B)(\delta) + \eta R(\delta) \\ &-\xi S(\delta) + q\xi B(\delta) + P\xi L(\delta) \end{aligned} \right] d\delta, \\
 L(t) - L(0) &= \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left[\beta S(t)(L+B)(t) - \varepsilon L(t) - \xi L(t) - \alpha_1 L(t) - P\xi L(t) \right] \\
 &\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\beta S(\delta)(L+B)(\delta) - \varepsilon L(\delta) - \xi L(\delta) - \alpha_1 L(\delta) - P\xi L(\delta) \right] d\delta, \\
 B(t) - B(0) &= \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left[\alpha_1 L(t) - \gamma B(t) - \xi B(t) - \alpha_2 B(t) - q\xi B(t) \right] \\
 &\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\alpha_1 L(\delta) - \gamma B(\delta) - \xi B(\delta) - \alpha_2 B(\delta) - q\xi B(\delta) \right] d\delta, \\
 R(t) - R(0) &= \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left[\gamma B(t) + \varepsilon L(t) - \eta R(t) - \xi R(t) \right] \\
 &\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\gamma B(\delta) + \varepsilon L(\delta) - \eta R(\delta) - \xi R(\delta) \right] d\delta.
 \end{aligned}$$

elde edilir. Kolaylık olması açısından,

$$\begin{aligned}
 G_1(t, S) &= \xi - \beta S(t)(L+B)(t) + \eta R(t) - \xi S(t) + q\xi B(t) + P\xi L(t), \\
 G_2(t, L) &= \beta S(t)(L+B)(t) - \varepsilon L(t) - \xi L(t) - \alpha_1 L(t) - P\xi L(t), \\
 G_3(t, B) &= \alpha_1 L(t) - \gamma B(t) - \xi B(t) - \alpha_2 B(t) - q\xi B(t), \\
 G_4(t, R) &= \gamma B(t) + \varepsilon L(t) - \eta R(t) - \xi R(t).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanırsa bu takdirde sistem haline gelir.

4.3 Teorem

Eğer $0 \leq \beta(a_2 + a_3) + \xi < 1$ eşitsizliği sağlanırsa G_1 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağlar ve bir daralma dönüşümüdür.

İspat:

S ve S_1 iki fonksiyon ve $\|S\| \leq a_1$, $\|L\| \leq a_2$, $\|B\| \leq a_3$, $\|R\| \leq a_4$ olsun.

$$\|G_1(t, S) - G_1(t, S_1)\| = \|(\beta(L + B) - \xi)(S - S_1)\| \leq \|S - S_1\|(\beta\|L + B\| + \xi) \quad (4.1)$$

olur. $\psi_1 = \beta(a_2 + a_3) + \xi$ olmak üzere (4.1) numaralı ifade kullanılarak

$$\|G_1(t, S) - G_1(t, S_1)\| \leq \|S - S_1\|(\beta(a_2 + a_3) + \xi) = \psi_1 \|S - S_1\|$$

ve buradan da

$$\|G_1(t, S) - G_1(t, S_1)\| \leq \psi_1 \|S - S_1\|$$

bulunur. Böylece G_1 Lipschitz koşulunu sağlar ve $0 \leq \beta(a_2 + a_3) + \xi < 1$ olduğundan G_1 daralma dönüşümüdür. Benzer şekilde, L ve L_1 iki fonksiyon olsun. Norm özellikleri ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|G_2(t, L) - G_2(t, L_1)\| = \|(L - L_1)[\varepsilon + \xi + \alpha_1 + \beta\xi - \beta S]\| \leq \|L - L_1\|(\varepsilon + \xi + \alpha_1 + \beta\xi + \beta\|S\|).$$

$$\|G_2(t, L) - G_2(t, L_1)\| \leq \|L - L_1\|(\varepsilon + \xi + \alpha_1 + \beta\xi + \beta\|S\|).$$

$$\|G_2(t, L) - G(t, L_1)\| \leq \|L - L_1\|(\beta(a_1) + \beta\xi + \alpha_1 + \xi + \varepsilon).$$

$\psi_2 = \beta(a_1) + \beta\xi + \alpha_1 + \xi + \varepsilon$ biçiminde alınır

$$\|G_2(t, L) - G_2(t, L_1)\| \leq \psi_2 \|L - L_1\|.$$

olur. Böylece G_2 Lipschitz koşulunu sağlar ve $0 \leq \beta(a_1) + \beta\xi + \alpha_1 + \xi + \varepsilon < 1$ olduğundan G_2 daralma dönüşümüdür. B ve B_1 iki fonksiyon olsun.

$$\|G_3(t, B) - G_3(t, B_1)\| = \left\| -(B - B_1)[\gamma + \xi + \alpha_2 + q\xi] \right\| \leq \|B - B_1\| [\gamma + \xi + \alpha_2 + q\xi].$$

$$\|G_3(t, B) - G_3(t, B_1)\| \leq \|B - B_1\| [\gamma + \xi + \alpha_2 + q\xi].$$

$\psi_3 = (\gamma + \xi + \alpha_2 + q\xi)$ olarak alınırsa

$$\|G_3(t, B) - G_3(t, B_1)\| \leq \psi_3 \|B - B_1\|.$$

bulunur. Böylece G_3 Lipschitz koşulunu sağlar ve $0 \leq \gamma + \xi + \alpha_2 + q\xi < 1$ olduğundan G_3 daralma dönüşümüdür. R ve R_1 iki fonksiyon olsun.

$$\|G_4(t, R) - G_4(t, R_1)\| = \left\| -(R - R_1)(\eta + \varepsilon) \right\| \leq \|R - R_1\| (\eta + \varepsilon).$$

$$\|G_4(t, R) - G_4(t, R_1)\| \leq \|R - R_1\| (\eta + \varepsilon).$$

$\psi_4 = \eta + \varepsilon$ olarak alınırsa

$$\|G_4(t, R) - G_4(t, R_1)\| \leq \psi_4 \|R - R_1\|.$$

elde edilir. Sonuç olarak, G_4 Lipschitz koşulunu sağlar ve $0 \leq \eta + \varepsilon < 1$ olduğundan G_4 daralma dönüşümüdür. Yukarıda elde edilen eşitsizlikler dikkate alınarak

$$S(t) = S(0) + \frac{1-\psi}{F(\psi)} \bar{G}_1(t, S) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \bar{G}_1(\delta, S) d\delta,$$

$$L(t) = L(0) + \frac{1-\psi}{F(\psi)} \bar{G}_2(t, L) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \bar{G}_2(\delta, L) d\delta,$$

$$B(t) = B(0) + \frac{1-\psi}{F(\psi)} \bar{G}_3(t, B) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \bar{G}_3(\delta, B) d\delta,$$

$$R(t) = R(0) + \frac{1-\psi}{F(\psi)} \bar{G}_4(t, R) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \bar{G}_4(\delta, R) d\delta.$$

bulunur. Buradan aşağıdaki tekrarlama formülü verilir: Başlangıç koşulları $S_0(t) = S(0)$,

$L_0(t) = L(0)$, $B_0(t) = B(0)$, $R_0(t) = R(0)$ olmak üzere

$$S_n(t) = \frac{1-\psi}{F(\psi)} \bar{G}_1(t, S_{n-1}) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \bar{G}_1(\delta, S_{n-1}) d\delta,$$

$$L_n(t) = \frac{1-\psi}{F(\psi)} \bar{G}_2(t, L_{n-1}) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \bar{G}_2(\delta, L_{n-1}) d\delta,$$

$$B_n(t) = \frac{1-\psi}{F(\psi)} \bar{G}_3(t, B_{n-1}) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \bar{G}_3(\delta, B_{n-1}) d\delta,$$

$$R_n(t) = \frac{1-\psi}{F(\psi)} \bar{G}_4(t, R_{n-1}) + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \bar{G}_4(\delta, R_{n-1}) d\delta.$$

Ardışık terimler arasındaki fark aşağıdaki ifadeye sahiptir:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{1,n}^*(t) = S_n(t) - S_{n-1}(t) &= \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left[\bar{G}_1(t, S_{n-1}) - \bar{G}_1(t, S_{n-2}) \right] \\ &+ \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\bar{G}_1(\delta, S_{n-1}) - \bar{G}_1(\delta, S_{n-2}) \right] d\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{2,n}^*(t) &= L_n(t) - L_{n-1}(t) = \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left[\bar{G}_2(t, L_{n-1}) - \bar{G}_2(t, L_{n-2}) \right] \\
&\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\bar{G}_2(t, L_{n-1}) - \bar{G}_2(t, L_{n-2}) \right] d\delta, \\
\bar{\phi}_{3,n}^*(t) &= B_n(t) - B_{n-1}(t) = \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left[\bar{G}_3(t, B_{n-1}) - \bar{G}_3(t, B_{n-2}) \right] \\
&\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\bar{G}_3(t, B_{n-1}) - \bar{G}_3(t, B_{n-2}) \right] d\delta, \\
\bar{\phi}_{4,n}^*(t) &= R_n(t) - R_{n-1}(t) = \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left[\bar{G}_4(t, R_{n-1}) - \bar{G}_4(t, R_{n-2}) \right] \\
&\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\bar{G}_4(t, R_{n-1}) - \bar{G}_4(t, R_{n-2}) \right] d\delta.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Böylece

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n \bar{\phi}_{1,k}^*(t),$$

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^n \bar{\phi}_{2,k}^*(t),$$

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n \bar{\phi}_{3,k}^*(t),$$

$$R_n(t) = \sum_{k=0}^n \bar{\phi}_{4,k}^*(t).$$

(4.2) eşitliğinin her iki tarafının normu alınıp üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\phi}_{1,n}^*(t) \right\| &= \left\| S_n(t) - S_{n-1}(t) \right\| \leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \left\| \bar{G}_1(t, S_{n-1}) - \bar{G}_1(t, S_{n-2}) \right\| \\ &\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \left\| \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left[\bar{G}_1(\delta, S_{n-1}) - \bar{G}_1(\delta, S_{n-2}) \right] d\delta \right\| \end{aligned}$$

bulunur.

G_1 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığından

$$\left\| \bar{\phi}_{1,n}^*(t) \right\| = \left\| S_n(t) - S_{n-1}(t) \right\| \leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_1 \|S_{n-1} - S_{n-2}\| + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_1 \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \|S_{n-1} - S_{n-2}\| d\delta$$

ve

$$\left\| \bar{\phi}_{1,n}^*(t) \right\| \leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_1 \left\| \bar{\phi}_{1,(n-1)}^*(t) \right\| + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_1 \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left\| \bar{\phi}_{1,(n-1)}^*(t) \right\| d\delta$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left\| \bar{\phi}_{2,n}^*(t) \right\| \leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_2 \left\| \bar{\phi}_{2,(n-1)}^*(t) \right\| + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_2 \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left\| \bar{\phi}_{2,(n-1)}^*(t) \right\| d\delta,$$

$$\left\| \bar{\phi}_{3,n}^*(t) \right\| \leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_3 \left\| \bar{\phi}_{3,(n-1)}^*(t) \right\| + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_3 \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left\| \bar{\phi}_{3,(n-1)}^*(t) \right\| d\delta,$$

$$\left\| \bar{\phi}_{4,n}^*(t) \right\| \leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_4 \left\| \bar{\phi}_{4,(n-1)}^*(t) \right\| + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_4 \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \left\| \bar{\phi}_{4,(n-1)}^*(t) \right\| d\delta$$

eşitsizlikleri de elde edilir.

4.4 Teorem

$$i = 1, 2, 3 \text{ için } \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_i + \frac{t_0^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_i < 1$$

koşulunu sağlayan bir t_0 varsa (3.1) modelinin bir çözümü vardır.

İspat: $S(t)$, $B(t)$, $L(t)$, $R(t)$ sınırlı fonksiyonlar olsun. Bu takdirde,

$$\left\| \bar{\phi}_{1,n}^*(t) \right\| \leq \|S(0)\| \left[\frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_1 + \frac{t_0^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_1 \right]^n,$$

$$\left\| \bar{\phi}_{2,n}^*(t) \right\| \leq \|L(0)\| \left[\frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_2 + \frac{t_0^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_2 \right]^n,$$

$$\left\| \bar{\phi}_{3,n}^*(t) \right\| \leq \|B(0)\| \left[\frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_3 + \frac{t_0^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_3 \right]^n,$$

$$\left\| \bar{\phi}_{4,n}^*(t) \right\| \leq \|R(0)\| \left[\frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_4 + \frac{t_0^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_4 \right]^n$$

yazılabilir ve böylece çözüm fonksiyonları var olup süreklidirler. Yukarıdaki fonksiyonların (3.2) modelinin çözümleri olduğunu göstermek için

$$S(t) - S(0) = S_n(t) - \bar{\zeta}_{1,n}(t),$$

$$L(t) - L(0) = L_n(t) - \bar{\zeta}_{2,n}(t),$$

$$B(t) - B(0) = B_n(t) - \bar{\zeta}_{3,n}(t),$$

$$R(t) - R(0) = R_n(t) - \bar{\zeta}_{4,n}(t)$$

olduğu varsayılınsın.

$$\begin{aligned}
\|\bar{\zeta}_{1,n}\| &= \left\| \frac{1-\psi}{F(\psi)} [\bar{G}_1(t, s) - \bar{G}_1(t, S_{n-1})] + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} [\bar{G}_1(\delta, S) - \bar{G}_1(\delta, S_{n-1})] d\delta \right\| \\
&\leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \|\bar{G}_1(t, S) - \bar{G}_1(t, S_{n-1})\| + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} \|\bar{G}_1(\delta, S) - \bar{G}_1(\delta, S_{n-1})\| d\delta \\
&\leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_1 \|S - S_{n-1}\| + \frac{t^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_1 \|S - S_{n-1}\|.
\end{aligned}$$

Bu işleme devam ederek t_0 'da

$$\|\bar{\zeta}_{1,n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\psi}{F(\psi)} + \frac{t_0^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \right)^{n+1} \tilde{\psi}_1^{n+1} .M \quad (4.3)$$

bulunur. n sonsuza yaklaşırken (4.3) denkleminin her iki tarafının limiti alınarak

$$\|\bar{\zeta}_{1,n}(t)\| \rightarrow 0. \text{ Benzer şekilde;}$$

$$\|\bar{\zeta}_{2,n}(t)\| \rightarrow 0, \|\bar{\zeta}_{3,n}(t)\| \rightarrow 0 \text{ ve } \|\bar{\zeta}_{4,n}(t)\| \rightarrow 0.$$

Şimdi modelin çözümlerinin tek olduğu gösterilecektir. $S_1(t)$, $L_1(t)$, $B_1(t)$, $R_1(t)$ diğer çözümler olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
S(t) - S_1(t) &= \frac{1-\psi}{F(\psi)} [\bar{G}_1(t, s) - \bar{G}_1(t, s_1)] \\
&\quad + \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \int_0^t (t-\delta)^{\psi-1} [\bar{G}_1(\delta, s) - \bar{G}_1(\delta, s_1)] d\delta.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

G_1 çekirdeğinin Lipschitz koşulunu sağladığı dikkate alınarak, (4.4) denkleminde norm uygulanırsa

$$\|S(t) - S_1(t)\| \leq \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_1 \|S(t) - S_1(t)\| + \frac{t^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_1 \|S(t) - S_1(t)\|$$

ve

$$\|S(t) - S_1(t)\| \left(1 - \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_1 - \frac{t^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_1 \right) \leq 0$$

bulunur. Ama aynı zamanda

$$\left(1 - \frac{1-\psi}{F(\psi)} \tilde{\psi}_1 - \frac{t^\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \tilde{\psi}_1 \right) \geq 0$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\|S(t) - S_1(t)\| = 0 \Rightarrow S(t) = S_1(t)$$

olur. Benzer yol izlenerek

$$L(t) = L_1(t), B(t) = B_1(t) \text{ ve } R(t) = R_1(t)$$

oldukları bulunur ki bu da çözümlerin tek olduğunu göstermektedir.

5. NÜMERİK SONUÇLAR

Karmaşık yapıdaki diferansiyel denklemlerden oluşan matematiksel modellerin yapısını anlamak ve görsel olarak grafiklerini elde edebilmek oldukça önemlidir. Bu amaç doğrultusunda nümerik yöntemler oldukça etkili araçlardır ve pek çok sistemin çözümünde kullanılmıştır. Owolabi ve Atangana [38] Adams-Bashforth metodunu, Yavuz ve Özdemir [39] Laplace homotopi dönüşüm yöntemini kullanmıştır. Hahm ve Hong [40] Taylor serilerini kullanarak genelleştirilmiş Adams-Bashforth yöntemini incelemiştir. Tezin bu bölümünde, (3.2) modeli Toufik ve Atangana'nın [41] numaralı kaynakta sunduğu iki adımlı Lagrange polinom yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki biçimde çözülmüştür:

$$\begin{aligned}
 S_{j+1} &= S_0 + \frac{(1-\psi)}{F(\psi)} P_1(t_j, S(t_j)) \\
 &+ \frac{\psi}{F(\psi)} \sum_{m=0}^j \frac{h^\psi P_1(t_m, S_m)}{\Gamma(\psi+2)} \left((j-m+1)^\psi (j-m+2+\psi) - (j-m)^\psi (j-m+2+2\psi) \right) \\
 &- \frac{h^\psi P_1(t_{m-1}, S_{m-1})}{\Gamma(\eta+2)} \left((j-m+1)^{\psi+1} - (j-m)^\psi (j-m+1+\psi) \right) + {}^1L_j^\psi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{j+1} &= L_0 + \frac{(1-\psi)}{F(\psi)} P_2(t_j, L(t_j)) \\
 &+ \frac{\psi}{F(\psi)} \sum_{m=0}^j \frac{h^\psi P_2(t_m, L_m)}{\Gamma(\psi+2)} \left((j-m+1)^\psi (j-m+2+\psi) - (j-m)^\psi (j-m+2+2\psi) \right) \\
 &- \frac{h^\psi P_2(t_{m-1}, L_{m-1})}{\Gamma(\eta+2)} \left((j-m+1)^{\psi+1} - (j-m)^\psi (j-m+1+\psi) \right) + {}^2L_j^\psi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{j+1} &= B_0 + \frac{(1-\psi)}{F(\psi)} P_3(t_j, B(t_j)) \\
 &+ \frac{\psi}{F(\psi)} \sum_{m=0}^j \frac{h^\psi P_3(t_m, B_m)}{\Gamma(\psi+2)} \left((j-m+1)^\psi (j-m+2+\psi) - (j-m)^\psi (j-m+2+2\psi) \right) \\
 &- \frac{h^\psi P_3(t_{m-1}, B_{m-1})}{\Gamma(\eta+2)} \left((j-m+1)^{\psi+1} - (j-m)^\psi (j-m+1+\psi) \right) + {}^3L_j^\psi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{j+1} &= R_0 + \frac{(1-\psi)}{F(\psi)} P_4(t_j, R(t_j)) \\
&+ \frac{\psi}{F(\psi)} \sum_{m=0}^j \frac{h^\psi P_4(t_m, R_m)}{\Gamma(\psi+2)} \left((j-m+1)^\psi (j-m+2+\psi) - (j-m)^\psi (j-m+2+2\psi) \right) \\
&- \frac{h^\psi P_4(t_{m-1}, R_{m-1})}{\Gamma(\eta+2)} \left((j-m+1)^{\psi+1} - (j-m)^\psi (j-m+1+\psi) \right) + {}^4L_j^\psi.
\end{aligned}$$

Burada $\varepsilon_\delta \in [t_m, t_{m+1}]$ olmak üzere ${}^iL_j^\psi, i=1,2,3,4$ kalan terimlerdir.

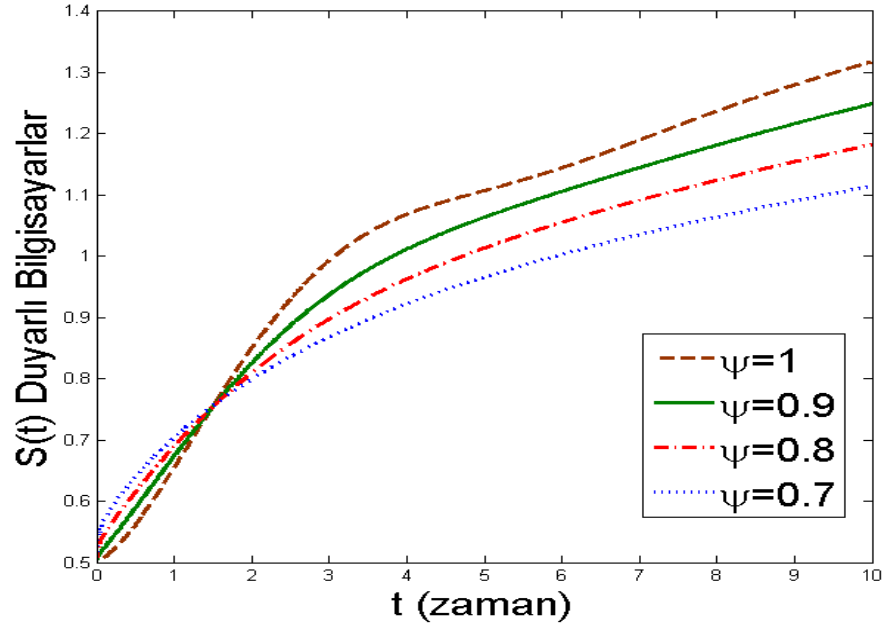
$${}^1L_j^\psi = \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \sum_{m=0}^j \int_{t_m}^{t_{m-1}} \frac{(\delta-t_m)(\delta-t_{m-1})}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} [P_1(\delta, S(\delta))]_{\delta=\varepsilon_\delta} (t_{j+1}-\delta)^{\eta-1} d\delta,$$

$${}^2L_j^\psi = \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \sum_{m=0}^j \int_{t_m}^{t_{m-1}} \frac{(\delta-t_m)(\delta-t_{m-1})}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} [P_2(\delta, L(\delta))]_{\delta=\varepsilon_\delta} (t_{j+1}-\delta)^{\eta-1} d\delta,$$

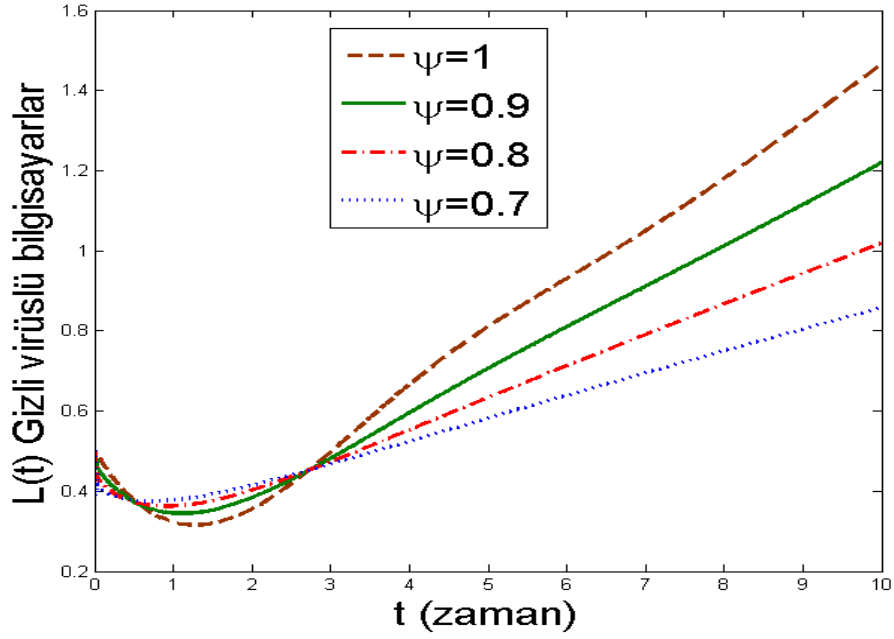
$${}^3L_j^\psi = \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \sum_{m=0}^j \int_{t_m}^{t_{m-1}} \frac{(\delta-t_m)(\delta-t_{m-1})}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} [P_3(\delta, B(\delta))]_{\delta=\varepsilon_\delta} (t_{j+1}-\delta)^{\eta-1} d\delta,$$

$${}^4L_j^\psi = \frac{\psi}{F(\psi)\Gamma(\psi)} \sum_{m=0}^j \int_{t_m}^{t_{m-1}} \frac{(\delta-t_m)(\delta-t_{m-1})}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} [P_4(\delta, R(\delta))]_{\delta=\varepsilon_\delta} (t_{n+1}-\delta)^{\eta-1} d\delta.$$

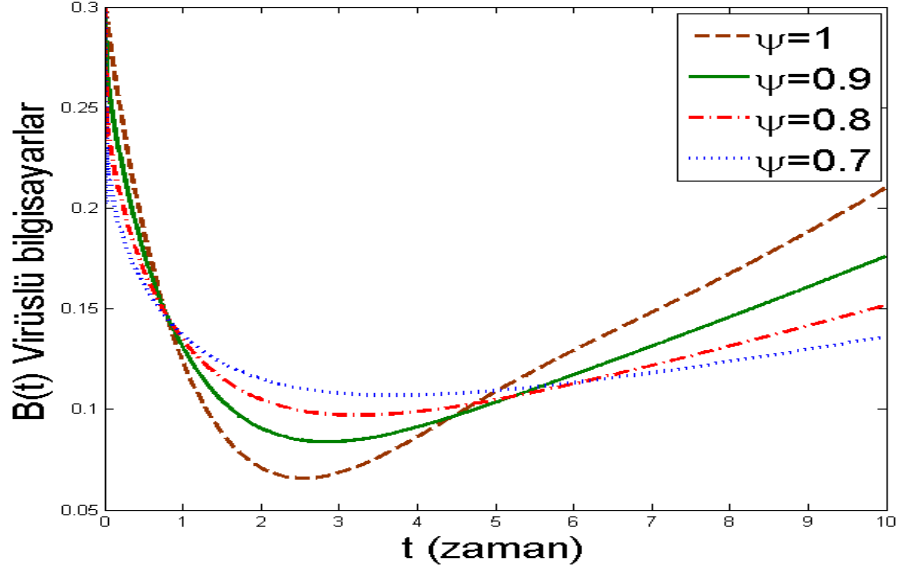
Kesirli türev mertebesi ψ değıştikçe model elemanlarının davranışlarını incelemek için aşağıdaki grafikler bilgisayar programları yardımı ile elde edilmiştir. Başlangıç koşulları $S(0)=0.5$, $L(0)=0.5$, $B(0)=0.3$, $R(0)=0.9$ ve model parametreleri $\xi=0.0000006$, $\beta=0.5$, $\varepsilon=0.95$, $\gamma=0.99$, $\eta=0.3$, $P=0.7$, $q=0.6$, $\alpha_1=0.2$, $\alpha_2=0.3$ olarak alınmıştır.



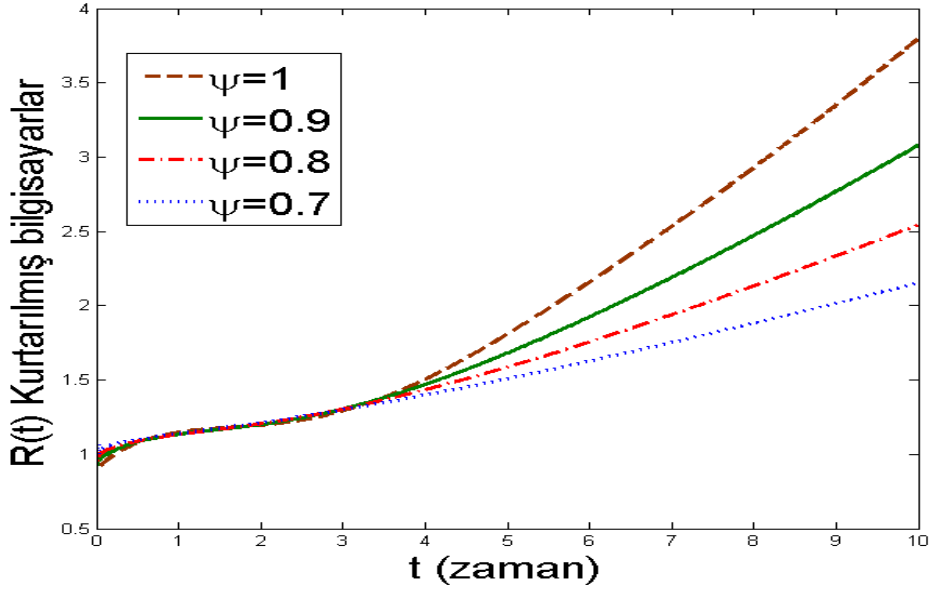
(a)



(b)



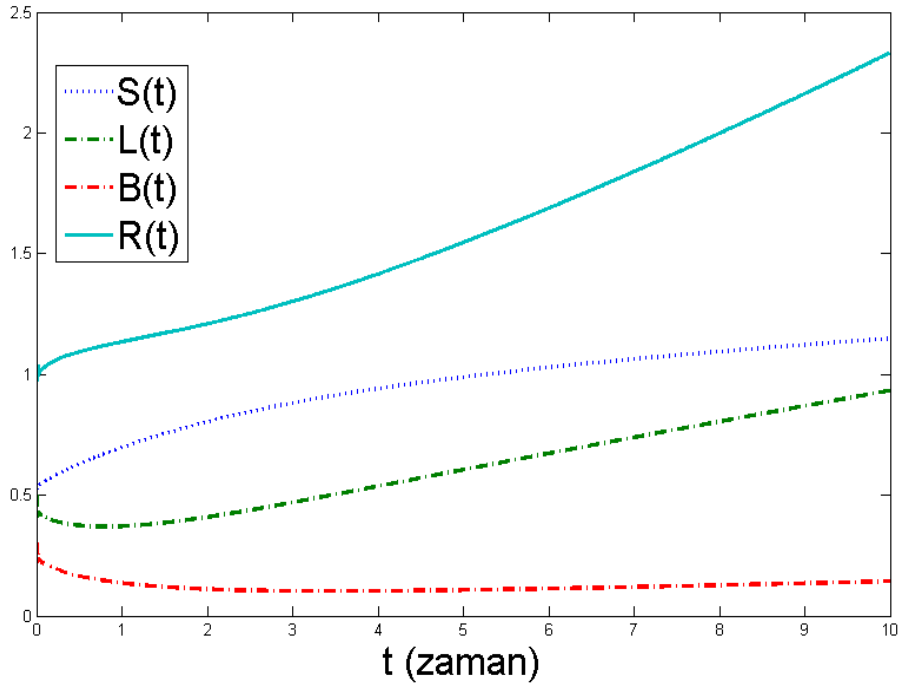
(c)



(d)

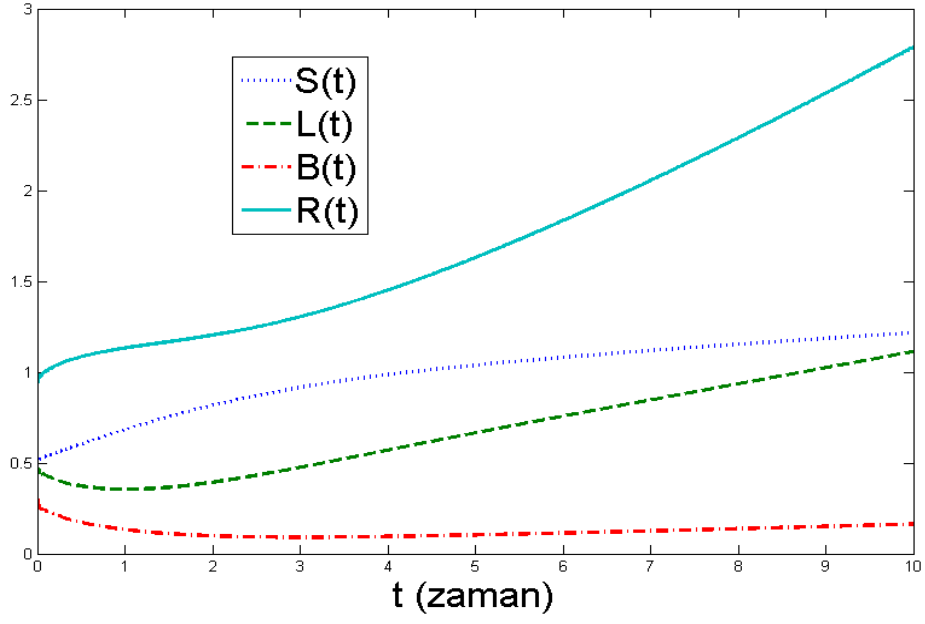
Şekil 5.1: Model elemanlarının kesirli türev mertebesi ψ 'ya göre davranışı: **(a)** $S(t)$ Duyarlı bilgisayarların ψ 'ya göre davranışı, **(b)** $L(t)$ Gizli virüslü bilgisayarların ψ 'ya göre davranışı, **(c)** $B(t)$ Virüslü bilgisayarların ψ 'ya göre davranışı, **(d)** $R(t)$ Kurtarılmış bilgisayarların ψ 'ya göre davranışı

Şekil 5.1 model elemanlarının kesirli türev mertebesi ψ 'ya göre değişimini göstermektedir. ψ değeri azaldıkça model elemanlarının sayısının azaldığı görülmektedir.



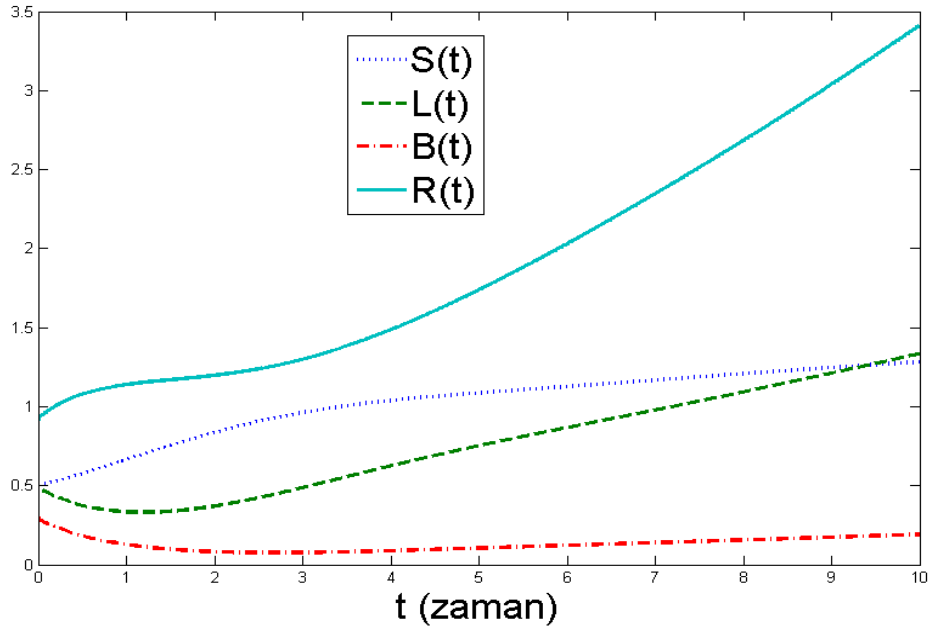
Şekil 5.2: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.75$ için model (1)'in davranışı.

Şekil 5.2'de $\psi = 0.75$ değeri için virüs bulaşmış bilgisayar sayısı $B(t)$ 'nin sıfıra yaklaştığı, kurtarılmış bilgisayar sayısı $R(t)$ 'nin artış gösterdiği görülmektedir.



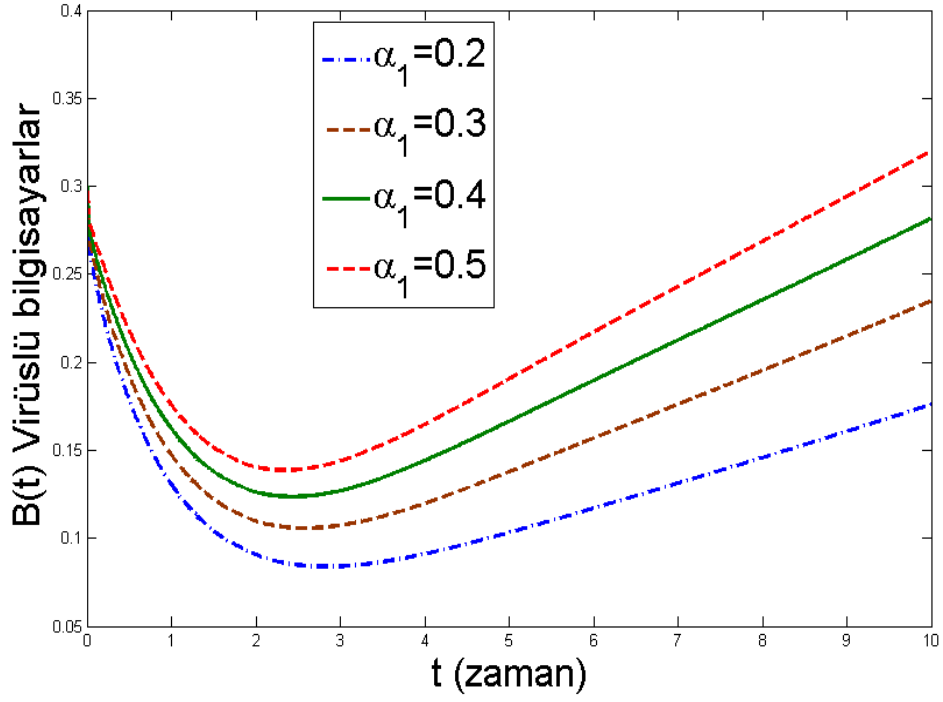
Şekil 5.3: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.85$ için model (1)'in davranışı.

Şekil 5.3'de $\psi = 0.85$ değeri için virüs bulaşmış bilgisayar sayısı $B(t)$ 'nin sıfıra yaklaştığı, kurtarılmış bilgisayar sayısı $R(t)$ 'nin Şekil 5.2'de verilen kesirli türev mertebesi $\psi = 0.75$ durumundan daha fazla olduğu görülmektedir.



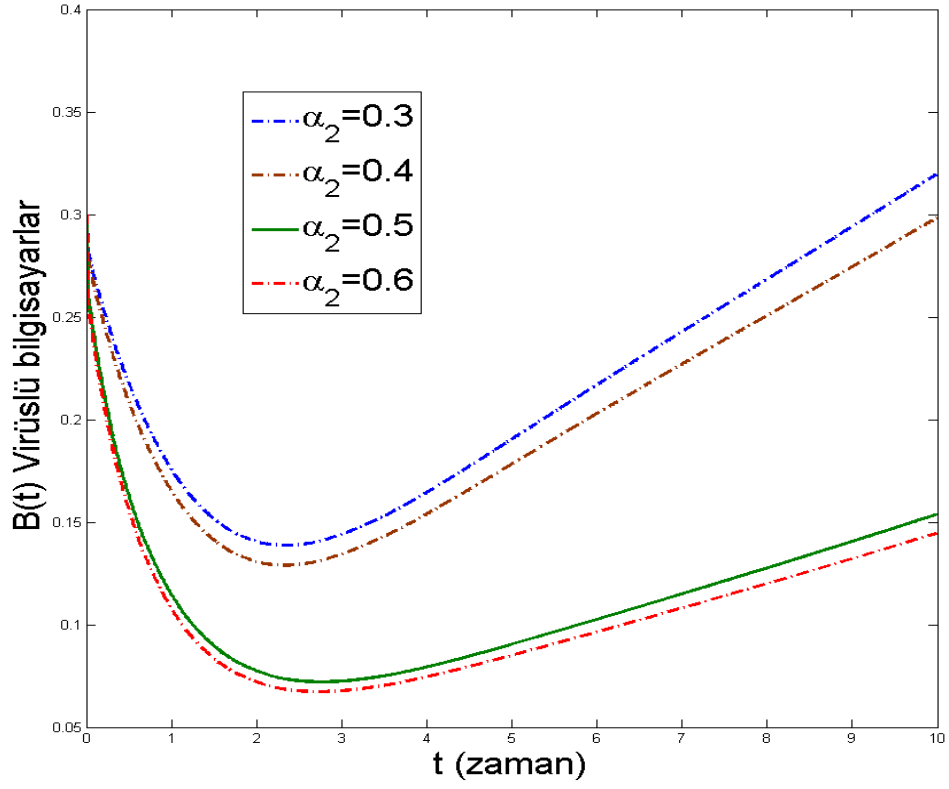
Şekil 5.4: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.95$ için model (1)'in davranışı.

Şekil 5.4'de $\psi = 0.95$ değeri için virüs bulaşmış bilgisayar sayısı $B(t)$ 'nin sifıra yaklaştığı, duyarlı bilgisayar sayısı $S(t)$ 'nin artış gösterdiği, kurtarılmış bilgisayar sayısı $R(t)$ 'nin Şekil 5.2'de verilen kesirli türev mertebesi $\psi = 0.75$ ve Şekil 5.3'de verilen kesirli türev mertebesi $\psi = 0.85$ durumlarından daha fazla olduğu görülmektedir.



Şekil 5.5: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.9$ için α_1 parametresine göre virüslü bilgisayarlar $B(t)$ sınıfının davranışı.

Şekil 5.5’de, virüslerin aktif hale gelme oranı α_1 parametresinin farklı değerleri için model elemanlarından virüslü bilgisayarlar sınıfı $B(t)$ incelenmiştir. Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.9$ değeri için, α_1 arttıkça $B(t)$ ’nin sayısının arttığı görülmektedir.



Şekil 5.6: Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.9$ için α_2 parametresine göre virüslü bilgisayarlar $B(t)$ sınıfının davranışı.

Şekil 5.6'da, B bilgisayarlarının internet bağlantısını kesme oranı α_2 parametresinin farklı değerleri için model elemanlarından virüslü bilgisayarlar sınıfı $B(t)$ ele alınmıştır. Kesirli türev mertebesi $\psi = 0.9$ değeri için, α_2 değeri arttıkça $B(t)$ 'nin sayısının azaldığı görülmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk bölümünde tez hakkında genel bilgi verilmiştir. İkinci bölümde ise çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler açıklanmıştır. Ayrıca, kesirli türev çeşitleri ile ilgili bilgi verilerek Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi ve Atangana-Baleanu kesirli integrali tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde tezin ana konusu olan SLBR modelinin incelenmesine ait parametreler, diferansiyel denklemler ve SLBR modeline ait AB kesirli türev şablonu verilmiştir. Tezin ana konusu olan SLBR modeli oluşturulup, model elemanları ve parametrelerinin tanımları açıklanmıştır. Ek olarak, SLBR modeli Atangana-Baleanu kesirli türevi ile tekrar modellenmiştir. Dördüncü bölümde, modellenmiş SLBR modelinin Atangana-Baleanu kesirli türev tanımı kullanılarak çözüm özellikleri elde edilmiştir. Beşinci bölümde, incelenen (3.1) numaralı SLBR modelinin görsel olarak grafiklerini elde edebilmek için SLBR (3.1) modeli Toufik ve Atangana'nın [41] numaralı kaynakta verdiği yöntemle çözümü yapılmıştır. Ayrıca modele eklenen α_1 ve α_2 parametrelerinin virüslü bilgisayarlar sınıfı $B(t)$ üzerindeki etkisini gözlemlemek amacıyla Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 grafikleri çizdirilmiştir.

7. KAYNAKLAR

- [1] S. Banerjee, *Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications*, CRC Press, 2014.
- [2] Z. S. Mostaghim, B. P. Moghaddam, H. S. Haghgozar, “Numerical simulation of fractional-order dynamical systems in noisy environments”, *Computational and Applied Mathematics*, vol. 37, pp. 6433-6447, 2018.
- [3] A. Shatyrko, “Some methodological aspects of mathematical modeling in dynamic systems”, *International Science Journal of Engineering & Agriculture*, vol.3, pp. 8-14, 2024.
- [4] J. P. Chauhan, S. R. Khirsariya, B. M. Yeolekar, M. A. Yeolekar, “Fractional mathematical model of Listeria infection caused by pre-cooked package food”, *Results in Control and Optimization*, vol. 14, 2024.
- [5] F. Evirgen, “Transmission of Nipah virus dynamics under Caputo fractional derivative”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 418, 2023, Article ID 114654.
- [6] F. Evirgen, E. Uçar, N. Özdemir, E. Altun, T. Abdeljawad, “The impact of nonsingular memory on the mathematical model of Hepatitis C virüs”, *Fractals*, vol. 31, 2023.
- [7] E. Uçar, “Examining of a tumor system with Caputo derivative”, *Journal of Balıkesir University Institute of science and Technology*, vol. 25(1), pp. 37-48, 2023.
- [8] Z. Hammouch, M. Yavuz, and N. Özdemir, “Numerical solutions and synchronization of a variable-order fractional chaotic system”, *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, vol. 1, pp. 11-23, 2021.
- [9] H. Joshi, M. Yavuz and N. Özdemir, “Analysis of novel fractional order plastic waste model and its effects on air pollution with treatment mechanism”, *Journal of Applied Analysis and Computation*, vol. 14, pp. 3078-3098, 2024.
- [10] L. J. S. Allen, *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson Prentice Hall, vol. 348, USA, 2007.
- [11] S. Çakan, “Dağılımlı Zaman Gecikmeli Bir SIS Salgın Modelinin Kararlılığına İlişkin Bazı Sonuçlar”, *Türk Doğa ve Fen Dergisi*, vol. 10, pp. 18-28, 2021.

- [12] M. Y. Li, J. R. Graef, L. Wang and J. Karsai, “Global dynamics of a SEIR model with varying total population size”, *Mathematical Biosciences*, vol. 160, pp. 191-213, 1999.
- [13] M. B. Hooten, J. Anderson and L. A. Waller, “Assessing North American influenza dynamics with a statistical SIRS model”, *Spatial and spatio-temporal epidemiology*, vol. 1, no. 2-3, pp. 177-185, 2010.
- [14] K. Şahinbaş and F. Çatak, “SEIR Based Epidemic Modeling of COVID-19 in Turkey”, *European Journal of Science and Technology*, vol. 33, pp. 306-310, 2022.
- [15] S. Jain and S. Kumar, “Dynamic analysis of the role of innate immunity in SEIS epidemic model”, *The European Physical Journal Plus*, vol. 136, no. 4, pp. 1-28, 2021.
- [16] L. M. Adleman, *An Abstract Theory of Computer Viruses*, Lecture Notes in Computer Science, vol 403, Springer, New York, 1990.
- [17] Y. Ye, D. Wang, T. Li, D. Ye and Q. J., “An intelligent PE-malware detection system based on association mining”, *Journal in Computer Virology*, vol. 4, pp. 323-334, 2008.
- [18] S. A. Amro, A. Alkhalifah, “A Comparative Study of Virus Detection Techniques”, *International Journal of Computer and Information Engineering*, vol. 9, pp. 1559-1566, 2015.
- [19] B. Morin and L. Me, “Intrusion detection and virology: an analysis of differences, similarities and complementariness”, *Journal in Computer Virology*, vol. 3, pp. 39-49 (2007).
- [20] J. C. Wierman and D. J. Marchette, “Modeling computer virus prevalence with a susceptible-infected-susceptible model with reintroduction”, *Computational Statistics Data Analysis*, vol.45, no. 1, pp. 3-23, 2004.
- [21] J. Ren, X. Yang, L. X. Yang, Y. Xu and F. Yang, “A delayed computer virus propagation model and its dynamics”, *Chaos Solutions Fractals*, vol. 45, no. 1, pp. 74-79, 2012.

- [22] L. Chen and J. Sun, “Global stability and optimal control of an SIRS epidemic model on heterogeneous networks”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 410, pp. 196-204, 2014.
- [23] R. Almeida, “Analysis of a fractional SEIR model with treatment”, *Applied Mathematics Letters*, vol. 84, pp. 56-62, 2018.
- [24] C. Gan, X. Yang, Q. Zhu, J. Jin and L. He, “The spread of computer virus under the effect of external computers”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 73, no. 3, pp. 1615-1620, 2013.
- [25] L. X. Yang and X. Yang, “The effect of infected external computers on the spread of viruses: a compartment modeling study”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 392, no. 24, pp.6523-6535, 2013.
- [26] O. A. Toutonji, S. M. Yoo and M. Park, “Stability analysis of VEISV propagation modeling for network worm attack”, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 6, pp. 2751-2761, 2012.
- [27] Q. Zhu, P. Xiang, X. Luo and C. Gan “Dynamical Behavior of Hybrid Propagation of Computer Viruses”, *Security and Communication Networks*, vol.2022, 2022, Article ID 2576685.
- [28] M. Caputo, *Elasticita e Dissipazione*. Zanichelli Bologna, 1969.
- [29] L. Kexue and P. Jigen, “Fractional Resolvents and Fractional Evolution Equations”, *Applied Mathematics Letters*, 25, pp. 808-812, 2012.
- [30] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press, 1999.
- [31] A. Atangana and D. Baleanu, “New Fractional Derivatives with Nonlocal and Non-Singular Kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model”, *Thermal Science*, 20(2), 763-769, 2016.
- [32] D. Kumar and J. Singh, New aspects of fractional epidemiological model for computer viruses with Mittag–Leffler law: In *Mathematical Modelling in Health, Social and Applied Sciences*, Springer, Singapore, 2020.
- [33] F. Cohen, “Managing network security: The limits of awareness”, *Network Security*, vol. 1999, pp.8-10, 1999.

- [34] R. Casado-Vara, M. Severt, A. Diaz-Longueira, A.M. Rey and J. L. Calvo-Rolle, “Dynamic Malware Mitigation Strategies for IoT Networks: A Mathematical Epidemiology Approach”, *Mathematics*, vol.12, 2024.
- [35] M. Gelgi, Y. Guan, S. Arunachala, M. S. S. Rao and N. Dragoni, “Systematic Literature Review of IoT Botnet DDOS Attacks and Evaluation of Detection Techniques”, *Sensors*, vol.24, 2024.
- [36] A. Boulanger and S. Ghosh, *Malicious Code: A Multidisciplinary Analysis*, Springer, Berlin, 2011.
- [37] Qingyi Zhu , Pingfan Xiang,Xuhang Luo and Chenquan Gan “Dynamical Behavior of Hybrid Propagation of Computer Viruses” School of Cyber Security and Information Law, *Chongqing University of Posts and Telecommunications,Chongqing* 400065, China, 2022.
- [38] K. M. Owolabi and A. Atangana, “On the formulation of Adams-Bashforth scheme with Atangana-Baleanu-Caputo fractional derivative to model chaotic problems”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(2), 2019.
- [39] Yavuz, M. and Özdemir, N., “Comparing the new fractional derivative operators involving exponential and Mittag-Leffler kernel”, *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 995-1006, 2019.
- [40] N. Hahm, and B. I. Hong, “A generalization of the Adams-Bashforth method”, *Honam Mathematical Journal*, 3, 481–491, 2010.
- [41] M. Toufik and A. Atangana, “New numerical approximation of fractional derivative with non-local and non-singular kernel: Application to chaotic models”, *The European Physical Journal Plus*, 132:444, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : İlhan KUDAR
Doğum tarihi ve yeri : 07/06/1980-İSTANBUL
e-posta : ilhankudar10@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Lisans	Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi/Matematik	1997-2001
Lise	Edremit Lisesi	1994-1997