

**T.C.**  
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**(2n+1)-BOYUTLU KÜRE YÜZEYİNİN KONTAKT YAPISI VE**  
**D-HOMOTETİK DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA**  
**EĞRİLERİN İNCELENMESİ**

**TUĞBA KUŞCU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Jüri Üyeleri :** Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ (Tez Danışmanı)  
Doç. Dr. Fatma KARACA  
Doç. Dr. Hülya AYTİMUR

**BALIKESİR, TEMMUZ - 2025**

## ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**(2n+1)-Boyutlu Küre Yüzeyinin Kontakt Yapısı ve D-Homotetik Dönüşümler Yardımıyla Eğrilerin İncelenmesi**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

**Tuğba KUŞCU**

## ÖZET

### ( $2n + 1$ )-BOYUTLU KÜRE YÜZEYİNİN KONTAKT YAPISI VE $D$ - HOMOTETİK DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA EĞRİLERİN İNCELENMESİ YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUĞBA KUŞCU

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ŞABAN GÜVENÇ)

BALIKESİR, TEMMUZ - 2025

Dört bölümden oluşan bu tezde, Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümleri ele alınarak, bu dönüşümlerin Frenet eğrileri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Küre yüzeyinin Sasakian yapısı detaylı olarak ele alınmış, bulunan sonuçlar 3-boyutlu birim küre üzerindeki Legendre ve slant geodezik eğrilere uygulanmıştır. Ayrıca, küre dışında bir Sasakian manifold üzerinde de örnekler verilmiştir.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm, tezin esas kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümleri tanımlanarak eğriler üzerindeki etkilerine odaklanılmıştır. Bulunan sonuçlar çeşitli Sasakian manifoldlar üzerinde uygulanmıştır.

Son bölüm olan dördüncü bölümde ise genel bir değerlendirme yapılarak, bulunan sonuçların gelecek çalışmalara nasıl ışık tutacağına değinilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELELER:**  $D$ -homoteti, Frenet eğrisi, kontakt yapı, Sasakian manifold

Bilim Kod / Kodları : 20402

Sayfa Sayısı : 41

## ABSTRACT

### ANALYSIS OF CURVES BY MEANS OF $D$ -HOMOTHETIC TRANSFORMATIONS AND CONTACT STRUCTURES OF $(2n + 1)$ -DIMENSIONAL SPHERE

MSC THESIS

TUĞBA KUŞCU

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ŞABAN GÜVENÇ)

BALIKESİR, JULY - 2025

This thesis, consisting of four chapters, explores the  $D$ -homothetic transformations of Sasakian manifolds and examines their effects on Frenet curves. The Sasakian structure of the sphere is studied in detail, and the obtained results are applied to Legendre and slant geodesic curves on the 3-dimensional unit sphere. Additionally, examples are provided on a Sasakian manifold other than the sphere.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, the fundamental concepts and definitions that will be used in the following chapters are presented.

The third chapter is the main part of the thesis. In this chapter,  $D$ -homothetic transformations of Sasakian manifolds are defined, and their effects on curves are examined. The obtained results are applied to various Sasakian manifolds.

In the final chapter, a general evaluation is made and it is discussed how the results of this thesis can guide future studies.

**KEYWORDS:**  $D$ -homothety, Frenet curve, contact structure, Sasakian manifold

Science Code / Codes : 20402

Page Number : 41

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>iii</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b> .....	<b>iv</b>
<b>ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR</b> .....	<b>v</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	<b>3</b>
2.1 Riemann Manifoldları ve Metrik Tensör Alanı .....	3
2.2 Levi-Civita Koneksiyonu .....	4
2.3 Kontakt Manifoldlar ve Sasakian Yapılar .....	6
2.4 Frenet Eğrileri .....	7
<b>3. D-HOMOTETİK DÖNÜŞÜMLER VE KONTAKT GEOMETRİ</b> .....	<b>9</b>
3.1 <i>D</i> -homotetik Dönüşümler ve Sasakian Yapıya Etkileri .....	9
3.2 <i>D</i> -Homotetik Dönüşümlerin Frenet Eğrileri Üzerindeki Etkileri .....	13
3.3 Küre Yüzeyinin Sasakian Yapısı .....	20
3.4 $S^3(1)$ Küresi Üzerinde Legendre ve Slant Eğri Örneklerinin Hesaplanması ve <i>D</i> -Homotetik Dönüşümün Bu Eğrilere Etkisinin İncelenmesi.....	26
3.5 $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasakian Manifoldu Üzerinde Legendre ve Slant Eğriler ile Uygulama....	30
<b>4. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	<b>39</b>
<b>5. KAYNAKLAR</b> .....	<b>40</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>41</b>

## SEMBOL LİSTESİ

$(M, g)$	: Riemann manifoldu
$\varphi$	: (1,1)-tipinden tensör alanı
$\xi$	: Reeb (Karakteristik) vektör alanı
$\eta$	: Kontakt form
$g$	: Metrik tensör alanı (Riemann metriği)
$\chi(M)$	: Vektör alanları uzayı
$S^{2n+1}(1)$	: (2n+1)-boyutlu birim (hiper)küre
$\mathbb{E}^{2n+2}$	: (2n+2)-boyutlu Öklid uzayı
$\bar{\nabla}$	: $\mathbb{E}^{2n+2}$ nin Levi-Civita koneksiyonu
$\nabla$	: $S^{2n+1}(1)$ in Levi-Civita koneksiyonu
$\tilde{\nabla}$	: $D$ -homotetik dönüşümden sonraki Levi-Civita koneksiyonu
$\kappa_i$	: $i$ . Frenet eğriliği
$D$	: Kontakt distribüsyon (değme dağılımı)
$\ X\ $	: Vektör alanının uzunluğu
$\theta$	: Kontakt açısı

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında, bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, sabrı ve anlayışıyla her daim destek olan danışmanım Sayın Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Kıymetli katkıları ve akademik rehberliği, tezimin şekillenmesinde büyük önem taşımaktadır.

Yaşamım boyunca doğruluğu ve dürüstlüğüyle bana rehberlik eden, varlığıyla daima güç bulduğum kıymetli babam Ali Rıza KUŞCU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Emekleri, desteği ve sevgisi, bu çalışmanın ortaya çıkmasında belirleyici bir rol oynamıştır.

Sabır ve merhametiyle her zaman yanımda olan, dualarıyla beni yalnız bırakmayan sevgili annem Meryem KUŞCU'ya en derin teşekkürlerimi iletmek isterim. Kendisi, zor zamanlarda en büyük dayanağım olmuştur.

Yaşamın her anında yanımda olan, arkadaşlığını ve desteğini esirgemeyen kardeşim Fatih KUŞCU'ya da teşekkür borçluyum. Onun varlığı, bu sürecin daha anlamlı ve güçlü geçmesini sağlamıştır.

Ayrıca, süreç boyunca güzel dilekleri ve dualarıyla yanımda olduklarını hissettiren tüm dostlarıma ve aile büyüklerime de gönülden teşekkür ederim.

**Balıkesir, 2025**

**Tuğba Kuşcu**

# 1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, çok boyutlu uzaylarda tanımlı geometrik yapıların lokal ve global özelliklerini inceleyen matematiksel bir alandır [1,2]. Bu alanın önemli bir alt disiplini olan kontakt geometri ise,  $(2n+1)$ -boyutlu manifoldlar üzerinde tanımlanan kontakt yapılar aracılığıyla, simplektik geometrinin tekil durumlarına karşılık gelen geometrik sistemleri ele alır [3,4]. Kontakt yapılar, fiziksel sistemlerde (özellikle Hamiltonyen mekanik, termodinamik ve optik gibi alanlarda) önemli rol oynayan yapılar olup, matematiksel olarak bir  $(2n+1)$ -boyutlu diferansiyellenebilir manifold üzerindeki bir 1-formla karakterize edilir.

Sasakian manifoldlar, kontakt metrik manifoldların özel bir sınıfını oluşturur [4]. Bu manifoldlar, Kaehler manifoldların tek boyutlu benzerleri olarak değerlendirilebilir ve kompleks geometri ile olan yakın ilişkileri nedeniyle önemli bir araştırma konusudur [3]. Sasakian yapıların diferansiyel geometri içindeki rolü, yalnızca teorik açıdan değil, aynı zamanda çeşitli fiziksel modellere uygulanabilirliği açısından da dikkat çekicidir.

Bu tezde,  $(2n+1)$ -boyutlu küresel manifoldlar üzerinde tanımlı kontakt yapılar incelenecek ve bu yapılarla  $D$ -homotetik dönüşümler arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.  $D$ -homotetik dönüşümler, kontakt yapıyı ve ona eşlik eden Riemann metriğini belirli oranlarda yeniden ölçeklendiren dönüşümlerdir [5,6]. Bu dönüşümler altında manifold üzerindeki geometrik yapıların nasıl değiştiği, özellikle de eğrilerin geometrik karakteristiklerinin korunup korunmadığı araştırılacaktır.

Tez kapsamında ele alınacak temel yapılardan biri de Frenet eğrileridir. Diferansiyel geometride bir eğrinin lokal özelliklerini incelemek için kullanılan Frenet çatısı, eğrinin tanjant, asli normal, binormal vektörleriyle birlikte eğrilik ve burulma gibi büyüklükleri tanımlar [7]. Yüksek boyutlu uzaylarda ise, Frenet çatısı ve Frenet eğrilik fonksiyonları Gram-Schmidt metodu yardımıyla elde edilmektedir.  $D$ -homotetik dönüşümün ardından eğrilerin bu özelliklerinin nasıl değiştiği, eğrinin geodezik olup olmadığı, slant veya Legendre eğri olup olmadığı gibi özelliklerin korunup korunmadığı analiz edilecektir.

Metrik tensör, bu incelemelerin merkezinde yer alır. Manifold üzerindeki uzunluk, açı ve eğrilik ölçümlerini tanımlayan metrik tensörün  $D$ -homotetik dönüşüm altındaki değişimi,

yalnızca eğriler değil, aynı zamanda manifoldun genel geometrik yapısı üzerinde de etkili olmaktadır. Bu bağlamda, tezde yalnızca teorik analiz yapılmayacak, aynı zamanda çeşitli örnekler üzerinden elde edilen sonuçlar uygulamalı olarak gösterilecektir. Örneğin Hopf fibrasyonu yardımı ile hesaplanan Hopf helisi [8,9] gibi klasik yapılar da bu bağlamda değerlendirilerek, farklı türde Sasakian manifoldlar üzerinde tanımlı Legendre ve slant eğrilerin davranışı incelenecektir.

Bu tez çalışmasının temel amacı, kontakt geometri ve diferansiyel geometri alanlarındaki yapıları  $D$ -homotetik dönüşümler bağlamında analiz ederek, özellikle eğrilerin davranışlarını sistematik biçimde ortaya koymaktır. Elde edilen sonuçların, kontakt ve Sasakian geometriye ilişkin daha derin bir anlayışa katkı sağlaması ve ileride yapılacak çalışmalara zemin oluşturması beklenmektedir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan temel kavramlar, tanımlar ve örnekler verilecektir.

### 2.1 Riemann Manifolları ve Metrik Tensör Alanı

Öncelikle metrik tensör alanı ve Riemann manifoldu tanımını vereceğiz.

**Tanım 2.1.1 (Metrik Tensör Alanı):** Bir  $M$  diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde pozitif tanımlı, iki-lineer ve simetrik bir  $(0,2)$ -tipinden tensör alanına metrik tensör alanı veya Riemann metriği denir. Yani,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

bir metrik tensör alanı ise,  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  için

- i)  $g(X, X) \geq 0$ ,  $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ , (pozitif tanımlı)
- ii)  $g(X, Y) = g(Y, X)$ , (simetrik)
- iii)  $g(fX + hY, Z) = fg(X, Z) + hg(Y, Z)$ , (birinci bileşene göre lineer)  
 $g(X, fY + hZ) = fg(X, Y) + hg(X, Z)$ , (ikinci bileşene göre lineer)

özelliklerini sağlar [1].

**Tanım 2.1.2 (Riemann Manifoldu):**  $M$  bir  $C^\infty$  (diferensiyellenebilir) manifold ve üzerinde tanımlı bir metrik tensör alanı  $g$  olmak üzere,  $(M, g)$  çiftine bir Riemann manifoldu denir [1].

Bu yapı, manifold üzerinde uzunluk ve açıl gibi temel geometrik kavramları tanımlamayı sağlar. Doğal olarak uzunluk ve açıdan türetilen alan, hacim vb. geometrik kavramlar da metrik tensöre bağlı olarak tanımlanabilir. Hatırlatmak gerekirse, bir manifold üzerindeki  $X \in \chi(M)$  vektör alanının uzunluğu;

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)}$$

şeklinde tanımlanır. Sıfırdan farklı  $X, Y \in \chi(M)$  vektör alanları arasındaki açıl ise

$$\cos \theta = \frac{g(X, Y)}{\sqrt{g(X, X)}\sqrt{g(Y, Y)}}$$

ile verilir [3].

**Örnek 2.1.3.**  $M = \mathbb{E}^n$  Öklid uzayı, üzerindeki  $g = ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$  Öklid metriği ile birlikte bir Riemann manifoldu olur. Burada  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  koordinat fonksiyonlarıdır [2].

**Örnek 2.1.4.**  $M = S^2(1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  küresi, üzerine  $\mathbb{E}^3$  Öklid uzayından indirgenen ve küresel koordinatlarda  $g = ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  ile verilen  $g$  metriğiyle birlikte bir Riemann manifoldu olur. Burada  $\{\theta, \phi\}$  küresel koordinat fonksiyonlarıdır [4].

## 2.2 Levi-Civita Koneksiyonu

**Tanım 2.2.1 (Afin koneksiyon):** Bir  $M$  manifoldu üzerinde tanjant vektör alanlarının türevlenebilmesini (diferensiyellenebilmesini) sağlayan

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

operatörüne *afin koneksiyon* veya kısaca *koneksiyon* denir. Yani,  $M$  üzerindeki bir afin koneksiyon,  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  için

i)  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

ii)  $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z,$

iii)  $\nabla_X fY = X[f]Y + f\nabla_X Y$

özelliklerini sağlar [2].

**Tanım 2.2.2 (Levi-Civita Koneksiyonu):** Bir  $(M, g)$  Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki iki koşulu sağlayan  $\nabla$  afin koneksiyonuna *Levi-Civita Koneksiyonu* (veya *Riemann Koneksiyonu*) denir [2]:

- Metrikle uyumluluk:

$$\nabla g = 0 \Leftrightarrow Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_Y Z), \forall X, Y, Z \in \chi(M).$$

- Torsiyonsuzluk:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \forall X, Y \in \chi(M).$$

**Teorem 2.2.3 (Riemann Geometrisinin Temel Teoremi):** Her  $(M, g)$  Riemann manifoldu üzerinde, metrikle uyumlu ve torsiyonsuz bir tek  $\nabla$  Levi-Civita koneksiyonu vardır [3].

Temel teoremin ispatı,  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  için

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y)$$

eşitliği ile bilinen Koszul formülü yardımı ile yapılır [3]. Bu formülün sağ tarafı,  $g$  nin simetrisi ve pozitif tanımlılığı nedeniyle iyi tanımlıdır. Bu, varlık ispatını sağlar. Metrik ile uyumluluk ve torsiyonsuzluk koşulları, koneksiyonu tek olarak belirler.

**Örnek 2.2.4.**  $M = \mathbb{E}^n$  Öklid uzayı,  $g = ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$  Öklid metriği olmak üzere;  $(M, g)$  Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu,  $\chi(M)$  vektör alanları

uzayının  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  bazına göre,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$$

olarak Koszul formülünden hesaplanır. Buna göre, bir  $X \in \chi(M)$  vektör alanı yönünde

$$Y = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(M) \text{ vektör alanının kovaryant türevi}$$

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X(f_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olur [2].

**Örnek 2.2.5.**  $M = S^2(1)$ ,  $g = ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  olmak üzere,  $(M, g)$  Riemann

manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu,  $\chi(M)$  vektör alanları uzayının  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\}$  bazına

göre,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial \phi} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\tan \theta \frac{\partial}{\partial \phi}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

olarak Koszul formülünden hesaplanır [4].

### 2.3 Kontakt Manifolddar ve Sasakian Yapılar

Bu kısımda kontakt manifold tanımı ve Sasakian manifoldların temel özellikleri incelenecektir.

**Tanım 2.3.1 (Kontakt Manifold):**  $M$ ,  $(2n+1)$ -boyutlu bir  $C^\infty$ -manifold olmak üzere,  $M$  üzerinde aşağıdaki koşulu sağlayan  $\eta$  1-formuna  $M$  üzerinde bir kontakt form denir:  
$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0.$$

Bu koşul  $\eta$ 'nin maksimal derecede non-dejenere olduğunu gösterir.  $(M, \eta)$  ikilisine de kontakt manifold denir [4].

**Tanım 2.3.2 (Reeb vektör alanı):**  $(M, \eta)$  kontakt manifoldu üzerinde

$$\eta(\xi) = 1, d\eta(X, \xi) = 0, \forall X \in \chi(M)$$

koşulunu sağlayan  $\xi$  vektör alanına Reeb vektör alanı veya karakteristik vektör alanı denir [4]. Reeb vektör alanı kontakt yapının dikey yönünü temsil eder.

**Örnek 2.3.3.**  $\mathbb{E}^3$  üzerindeki  $\eta = dz - ydx$ , Reeb vektör alanı  $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$  ile birlikte bir kontakt yapı tanımlar [4]. Burada  $\{x, y, z\}$   $\mathbb{E}^3$ 'ün koordinat fonksiyonlarıdır.

**Tanım 2.3.4 (Sasakian manifold):**  $(M, \eta)$  bir kontakt manifold,  $\xi$  karakteristik vektör alanı olsun. Eğer bu manifold, aşağıdaki ek yapıları taşıyorsa Sasakian manifold olarak adlandırılır:

i)  $g(\xi, \xi) = 1, \eta(X) = g(X, \xi), \forall X \in \chi(M)$  özelliklerini sağlayan bir  $g$  Riemann metriği,

ii)  $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y), \forall X, Y \in \chi(M)$  ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \forall X, Y \in \chi(M)$$

özellikleri sağlayan bir  $(1,1)$ -tipinden  $\varphi$  tensör alanı,

iii) **Normalite koşulu:**  $N_\varphi = -2d\eta \otimes \xi$  olması. Burada  $N : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ ,

$$N_\varphi(X, Y) = [\varphi X, \varphi X] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y]$$

ile tanımlı Nijenhuis tensör alanıdır. Normalite koşuluna aynı zamanda integrallenebilirlik koşulu da denir [10].

**Örnek 2.3.5.**  $S^3(1) \subset \mathbb{E}^4$  birim (hiper)küresi üzerindeki kontakt form

$$\eta = x_3 dx_1 + x_4 dx_2 - x_1 dx_3 - x_2 dx_4$$

olmak üzere,  $\mathbb{E}^4$  den indirgenen metrikle birlikte uygun bir  $\varphi$  de tanımlanarak Sasakian manifold olur [4].

**Teorem 2.3.6.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  Sasakian manifoldunda

$$\nabla_X \xi = -\varphi X, \quad \forall X \in \chi(M)$$

ve

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad \forall X, Y \in \chi(M)$$

dir [4].

Burada, (1,1)-tipinden tensör alanının kovaryant türevi  $\nabla \varphi$ ,  $(\nabla_X \varphi)Y = \nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y$  eşitliği ile tanımlıdır [4].

## 2.4 Frenet Eğrileri

Bu alt bölümde Frenet eğrileri ilgili genel tanımlar verilecektir.

**Tanım 2.4.1 (3-boyutlu Öklid uzayında Frenet Eğrisi):** Birim hızlı bir  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi için

$$T = \gamma', \quad N = \frac{T'}{\|T'\|}, \quad B = T \times N, \quad \kappa = \|T'\|, \quad \tau = -g(B', N)$$

eşitlikleri ile verilen  $\{T, N, B\}$  üçlüsüne eğrinin Frenet çatısı,  $\kappa$  ya eğrilik (büküm) ve  $\tau$  ya da torsiyon (burulma) denir [2].

**Örnek 2.4.2.**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ,  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  eğrisinin eğriliği  $\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$  ve

torsiyonu  $\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$  olarak hesaplanır [2].

**Tanım 2.4.3 (Yüksek boyutlu uzaylarda Frenet Eğrisi):**  $(M, g)$   $n$  – boyutlu Riemann manifold ve  $r \leq n$  olsun. Bir  $\gamma : I \rightarrow M$  birim hızlı eğrisi için  $T = \gamma'$  olmak üzere,

$$\left\{ T, \nabla_T T, \nabla_T \nabla_T T, \dots, \underbrace{\nabla_T \dots \nabla_T T}_{(r-1) \text{ tane}} \right\}$$

kümesi lineer bağımsız ancak

$$\left\{ T, \nabla_T T, \nabla_T \nabla_T T, \dots, \underbrace{\nabla_T \dots \nabla_T T}_r \right\}$$

kümesi lineer bağımlı oluyorsa  $\gamma$  ya oskulator mertebesi  $r$  olan Frenet eğrisi adı verilir [7]. Oskulator mertebesi  $r$  olan bir Frenet eğrisi üzerinde, Gram-Schmidt metodu ile  $T = V_1 = \gamma'$  olmak üzere,

$$\nabla_T T = \kappa_1 V_2,$$

$$\nabla_T V_2 = -\kappa_1 T + \kappa_2 V_3,$$

⋮

$$\nabla_T V_i = -\kappa_{i-1} V_i + \kappa_i V_{i+1}, \quad 2 < i < r$$

⋮

$$\nabla_T V_r = -\kappa_{r-1} V_{r-1}$$

ile verilen Frenet denklemlerini sağlayan  $\{T = V_1, V_2, \dots, V_r\}$  Frenet çatısı oluşturulabilir.

Burada  $\kappa_i = g(\nabla_T V_i, V_{i+1})$ ,  $(i = 1, 2, \dots, r-1)$  fonksiyonlarına  $\gamma$  nın eğrilik fonksiyonları denir [7].

**Özel durumlar:**  $r = 1$  olması durumunda  $\gamma$  bir geodeziktir.  $r = 2$  ve  $\kappa_1 = \text{sabit} > 0$  olması durumunda  $\gamma$  bir çemberdir. Eğer  $\kappa_i = \text{sabit} > 0$ ,  $(i = 1, 2, \dots, r-1)$  ise  $\gamma$  mertebesi  $r$  olan bir helistir. Helisin mertebesi belirtilmediğinde  $r = 3$  olduğu kastedilir [7].

### 3. *D*-HOMOTETİK DÖNÜŞÜMLER VE KONTAKT GEOMETRİ

Bu bölümde *D*-homotetik dönüşümler ve kontakt geometri ile ilgili temel bilgiler detaylı olarak verilecek ve küre yüzeyinin Sasakian yapısı kullanılarak bu dönüşümlerin etkileri incelenecektir.

#### 3.1 *D*-homotetik Dönüşümler ve Sasakian Yapıya Etkileri

*D*-homotetik dönüşümler diferansiyel geometri ve özellikle Sasakian manifoldlar üzerinde önemli bir yere sahiptir. Bu dönüşümler manifoldun metrik ve kontakt yapısını belli parametreler doğrultusunda ölçeklendirmek için kullanılır. Öncelikle bir  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  kontakt manifoldu verildiğinde, *D*-homotetik dönüşümün nasıl tanımlandığını verelim:

**Tanım 3.1.1.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir kontakt metrik manifold ve  $a$  pozitif bir sabit olmak üzere;

$$\tilde{\varphi}X = \varphi X, \quad \forall X \in \chi(M),$$

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{a}\xi,$$

$$\tilde{\eta}(X) = a\eta(X), \quad \forall X \in \chi(M),$$

$$\tilde{g}(X, Y) = ag(X, Y) + (a^2 - a)\eta(X)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \chi(M),$$

eşitlikleri ile yeni bir  $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  yapısı tanımlanabilir. Bu dönüşüme  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  yapısının *D-homotetik dönüşümü* denir [5].

**Önerme 3.1.2.**  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  kontakt metrik yapısından *D*-homoteti ile elde edilen  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  yapısı da bir kontakt metrik yapıdır. Yani,  $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  de bir kontakt metrik manifolddur [5].

**İspat:**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda,  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

i)  $\eta(\xi) = 1,$

ii)  $\varphi\xi = 0,$

iii)  $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi,$

iv)  $\eta(X) = g(X, \xi),$

$$\text{v) } g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

$$\text{vi) } d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerin  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  için de sağlandığını gösterelim.

$$\text{i) } \tilde{\eta}(\tilde{\xi}) = a\eta\left(\frac{1}{a}\xi\right) = a\frac{1}{a}\eta(\xi) = 1,$$

$$\text{ii) } \tilde{\varphi}\tilde{\xi} = \varphi\left(\frac{1}{a}\xi\right) = \frac{1}{a}\varphi\xi = 0,$$

iii)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^2 X &= \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \\ &= -X + a\eta(X)\frac{1}{a}\xi \\ &= -X + \tilde{\eta}(X)\tilde{\xi}, \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X, \tilde{\xi}) &= ag(X, \tilde{\xi}) + (a^2 - a)\eta(X)\eta(\tilde{\xi}) \\ &= ag\left(X, \frac{1}{a}\xi\right) + (a^2 - a)\eta(X)\eta\left(\frac{1}{a}\xi\right) \\ &= a\frac{1}{a}g(X, \xi) + \frac{1}{a}(a^2 - a)\eta(X)\eta(\xi) \\ &= \eta(X) + a\eta(X) - \eta(X) \\ &= \tilde{\eta}(X), \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) &= \tilde{g}(\varphi X, \varphi Y) \\ &= ag(\varphi X, \varphi Y) + (a^2 - a)\eta(\varphi X)\eta(\varphi Y) \\ &= ag(\varphi X, \varphi Y) \\ &= a[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] \\ &= ag(X, Y) - a\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X, Y) - \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y) &= ag(X, Y) + (a^2 - a)\eta(X)\eta(Y) - a\eta(X)a\eta(Y) \\ &= ag(X, Y) + a^2\eta(X)\eta(Y) - a\eta(X)\eta(Y) - a^2\eta(X)\eta(Y) \\ &= ag(X, Y) - a\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Böylece (3.1) ve (3.2) gereği

$$\tilde{g}(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) = \tilde{g}(X, Y) - \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y)$$

bulunur.

vi)

$$\begin{aligned}
d\tilde{\eta}(X, Y) &= d(a\eta)(X, Y) = ad\eta(X, Y) \\
&= ag(X, \varphi Y) \\
&= ag(X, \varphi Y) + (a^2 - a)\eta(X)\eta(\varphi Y) \\
&= \tilde{g}(X, \varphi Y) = \tilde{g}(X, \tilde{\varphi} Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$D$ -homotetik dönüşümün Levi-Civita koneksiyonunu nasıl etkilediğini aşağıdaki Teorem ile verelim:

**Teorem 3.1.3.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir kontakt metrik manifold ve  $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  ise  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası elde edilen yeni yapı olsun.  $g$  ve  $\tilde{g}$  metrik tensörlerine karşılık gelen Levi-Civita koneksiyonları sırasıyla  $\nabla$  ve  $\tilde{\nabla}$  ile gösterilsin. Bu iki koneksiyon arasındaki fark tensörü ise  $W$  ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned}
W(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \\
&= (1-a)[\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)[(\nabla_X \eta)(Y) + (\nabla_Y \eta)(X)]
\end{aligned}$$

dir [5].

Bir  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  kontakt metrik manifoldu için  $\eta(Y) = g(Y, \xi)$  eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \eta)Y &= \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \\
&= \nabla_X g(Y, \xi) - g(\nabla_X Y, \xi) \\
&= g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) - g(\nabla_X Y, \xi) \\
&= g(Y, \nabla_X \xi)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$W(X, Y) = (1-a)[\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y] + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)[g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)]$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + (1-a)[\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y] \\ &+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)[g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)]\end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  Sasakian manifold ise,

$$\begin{aligned}g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, \nabla_Y \xi) &= g(Y, -\varphi X) + g(X, -\varphi Y) \\ &= -g(Y, \varphi X) - g(X, \varphi Y) \\ &= g(\varphi Y, X) - g(X, \varphi Y) \\ &= g(X, \varphi Y) - g(X, \varphi Y) = 0\end{aligned}$$

olduğundan, bir Sasakian manifold için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-a)[\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y] \quad (3.3)$$

ilişkisi vardır.

Şimdi,  $D$ -homotetik dönüşümlerin Sasakian yapıyı nasıl etkilediğini inceleyelim:

**Teorem 3.1.4.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir Sasakian manifold olsun.  $D$ -homotetik dönüşüm yardımı ile elde edilen  $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  manifoldu da bir Sasakian manifold olur. Yani,  $D$ -homoteti altında Sasakian manifold olma özelliği korunur [5].

**İspat:** Önerme 3.1.2 gereği kontakt yapının korunduğunu biliyoruz. Ayrıca, Sasakian manifold için normal olma koşulu

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

ve

$$\nabla_X \xi = -\varphi X$$

koşullarına denktir. Bunlardan herhangi biri kontakt manifoldun Sasakian olması için yeterlidir.  $D$ -homotetik dönüşüm ile elde edilen  $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  manifoldu için

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{\varphi})Y = \tilde{g}(X, Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)X$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\xi} = -\tilde{\varphi}X$$

olduğunu göstermeliyiz. Buradan

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_x \tilde{\varphi})Y &= (\tilde{\nabla}_x \varphi)Y = \tilde{\nabla}_x \varphi Y - \varphi \tilde{\nabla}_x Y \\
&= \nabla_x \varphi Y + (1-a)[\eta(\varphi Y)\varphi X + \eta(X)\varphi^2 Y] \\
&\quad - \varphi(\nabla_x Y + (1-a)[\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y]) \\
&= \nabla_x \varphi Y + (1-a)\eta(X)\varphi^2 Y - \varphi \nabla_x Y - (1-a)\eta(Y)\varphi^2 X - (1-a)\eta(X)\varphi^2 Y \\
&= \nabla_x \varphi Y - \varphi \nabla_x Y - (1-a)\eta(Y)(-X + \eta(X)\xi) \\
&= (\nabla_x \varphi)Y + (1-a)\eta(Y)X - (1-a)\eta(X)\eta(Y)\xi \\
&= g(X, Y)\xi - \eta(Y)X + (1-a)\eta(Y)X - (1-a)\eta(X)\eta(Y)\xi \\
&= g(X, Y)\xi - a\eta(Y)X + (a-1)\eta(X)\eta(Y)\xi
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(X, Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)X &= [ag(X, Y) + (a^2 - a)\eta(X)\eta(Y)]\left(\frac{1}{a}\xi\right) - a\eta(Y)X \\
&= g(X, Y)\xi + (a-1)\eta(X)\eta(Y)\xi - a\eta(Y)X
\end{aligned}$$

olarak hesaplayabiliriz. Böylece  $(\tilde{\nabla}_x \varphi)Y = \tilde{g}(X, Y)\tilde{\xi} - \tilde{\eta}(Y)X$  çıkar. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_x \tilde{\xi} &= \tilde{\nabla}_x \left(\frac{1}{a}\xi\right) = \frac{1}{a}\tilde{\nabla}_x \xi = \frac{1}{a}\{\nabla_x \xi + (1-a)[\eta(\xi)\varphi X + \eta(X)\varphi \xi]\} \\
&= \frac{1}{a}(-\varphi X) + \left(\frac{1}{a} - 1\right)\varphi X = -\frac{1}{a}\varphi X + \frac{1}{a}\varphi X - \varphi X \\
&= -\varphi X = -\tilde{\varphi}X
\end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak,  $D$ -homotetik dönüşüm bir Sasakian yapıyı yine bir Sasakian yapıya dönüştürür. ■

### 3.2 $D$ -Homotetik Dönüşümlerin Frenet Eğrileri Üzerindeki Etkileri

$M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir Sasakian manifold ve  $\tilde{M} = (M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  ise

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \quad \tilde{\eta} = a\eta, \quad \tilde{g} = ag + (a^2 - a)(\eta \otimes \eta)$$

şeklinde verilen  $D$ -homotetik dönüşüm ile elde edilen Sasakian manifold olsun. Bir

$\gamma: I \rightarrow M$  birim hızlı eğrisi ele alalım. Yani,  $T = \gamma'$  olmak üzere,

$$g(T, T) = 1 = \|T\|^2 = \|\gamma'\|^2$$

dir.  $D$ -homotetik dönüşüm yapıldıktan sonra eğrinin hızı ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz:

**Teorem 3.2.1.**  $D$ -homotetik dönüşüm altında birim hızlı eğrinin hızı genellikle korunmaz.

Eğer  $v$  ile eğrinin  $D$ -homotetik dönüşümden sonraki hızı gösterilirse

$$v = \sqrt{a \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}$$

dır. Burada,  $\theta$  ile  $T = \gamma'$  ve  $\xi$  vektör alanları arasındaki açı fonksiyonu gösterilmektedir.

**İspat:**  $\gamma: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.  $T = \gamma'$  ve  $\xi$  vektör alanları arasındaki açı fonksiyonu  $\theta$  olduğundan,  $\eta(T) = \cos \theta$  dir.  $D$ -homotetik dönüşümden sonra,  $\gamma: I \rightarrow \tilde{M}$  manifoldundaki hızının karesi

$$\begin{aligned} v^2 &= \|\gamma'\|_{\tilde{g}}^2 = \tilde{g}(\gamma', \gamma') \\ &= ag(\gamma', \gamma') + (a^2 - a)[\eta(\gamma')]^2 \\ &= a + (a^2 - a)\cos^2 \theta \\ &= a(1 - \cos^2 \theta) + a^2 \cos^2 \theta \\ &= a \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

dir. Genel olarak  $v \neq 1$  olduğundan eğrinin hızı korunmaz. ■

Şimdi Legendre ve slant eğrilerin tanımlarını hatırlayalım:

**Tanım 3.2.2.**  $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir kontakt metrik manifold ve  $\gamma: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.  $T = \gamma'$  olmak üzere

$$D = \{X \in \chi(M) : \eta(X) = 0\}$$

ile verilen  $D$  kümesine kontakt distribüsyon (değme dağılımı) denir [4]. Bu dağılımın integral eğrilerine ise Legendre eğrisi denir. Bir başka deyişle, Legendre eğrileri  $\eta(T) = 0$  koşulunu sağlayan eğrilerdir [11]. Eğer  $\eta(T) = \cos \theta = \text{sabit}$  oluyorsa,  $\gamma$  eğrisine bir slant eğri adı verilir [12].

**Sonuç 3.2.3.** Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümleri altında, Legendre eğrilerin hızı,  $a > 1$  için  $\sqrt{a}$  katına çıkar veya  $0 < a < 1$  için  $\sqrt{a}$  katına düşer. Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümleri altında, Legendre eğrileri için eğrinin sabit hızlı olma özelliği bozulmaz.

**İspat:** Teorem 3.2.1 gereği,  $\eta(T) = \cos \theta = 0$  olduğundan  $v^2 = a$  bulunur ve ispat biter.

■

$\gamma(t) : I \rightarrow M$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$  verildiğinde,  $\gamma'(t)$  ifadesine eğrinin hız vektörü denir. Eğer,  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  ise bu eğriye regüler eğri denir [2]. Regüler her eğri birim hızlı bir yeniden parametrizasyona sahip olduğundan,  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası,  $\gamma : I \rightarrow \tilde{M}$  eğrisi için yay parametresini hesaplayabiliriz.  $\gamma : I \rightarrow M$ , birim hızlı bir eğri ve yay parametresi  $t$  olsun.  $D$ -homotetik dönüşümden sonra  $\gamma : I \rightarrow \tilde{M}$  eğrisinin yay parametresi  $s$  ise,  $\eta(\gamma'(t)) = \cos \theta(t)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} s = h(t) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\|_g du \\ &= \int_0^t \sqrt{\tilde{g}(T, T)} du \\ &= \int_0^t \sqrt{a \sin^2 \theta(u) + a^2 \cos^2 \theta(u)} du \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,  $\beta(s) = \gamma(h^{-1}(s))$  eğrisi için

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds} \gamma(h^{-1}(s)) = \frac{d}{dt} \gamma(t) \frac{d}{ds} h^{-1}(s) = \gamma'(t) \frac{1}{h'(t)}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\|_g &= \sqrt{\tilde{g}(\beta'(s), \beta'(s))} \\ &= \sqrt{\tilde{g}\left(\gamma'(t) \frac{1}{h'(t)}, \gamma'(t) \frac{1}{h'(t)}\right)} \\ &= \frac{1}{|h'(t)|} \sqrt{\tilde{g}(\gamma'(t), \gamma'(t))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a \sin^2 \theta(t) + a^2 \cos^2 \theta(t)}} \sqrt{a \sin^2 \theta(t) + a^2 \cos^2 \theta(t)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

çıkar. Yani,  $\beta(s)$  birim hızlıdır.

Şimdi,  $\gamma : I \rightarrow M$  birim hızlı Legendre eğrisi olsun.  $D$ -homotetik dönüşümün ardından,  $\gamma : I \rightarrow \tilde{M}$  için  $\tilde{g}(T, T) = a$  olur. Dolayısıyla,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\tilde{g}(T, T)} = \sqrt{a}$$

olduğundan yay parametresi

$$s = h(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{a} du = \sqrt{a}t$$

bulunur. Böylece,

$$h^{-1}(s) = t = \frac{1}{\sqrt{a}}s$$

ifadesini kullanarak, eğrinin birim hızlı yeniden parametrizasyonunu

$$\beta(s) = \gamma(t) = (\gamma \circ h^{-1})(s) = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{a}}s\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\tilde{T}(s) = \beta'(s) = \frac{1}{\sqrt{a}}\gamma'\left(\frac{1}{\sqrt{a}}s\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\gamma'(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}T(t)$$

dir.

**Sonuç 3.2.4.** Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümleri altında, Legendre eğrisi olma özelliği korunur.

**İspat.**  $\gamma : I \rightarrow M$  birim hızlı Legendre eğrisi olsun. Tanım gereği,  $\eta(T) = 0$  dır.  $D$ -homotetik dönüşümün ardından,  $\gamma : I \rightarrow \tilde{M}$  eğrisinin birim hızlı yeniden parametrizasyonu için,

$$\tilde{\eta}(\tilde{T}) = (a\eta)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}T\right) = \sqrt{a}\eta(T) = 0$$

bulunur ve ispat biter. ■

Benzer bir sonuç, slant eğriler için de verilebilir:

**Sonuç 3.2.5.** Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümleri altında, slant eğri olma özelliği korunur.  $T = \pm\xi$  veya  $T \perp \xi$  olması durumunda kontakt açısı sabit kalır. Diğer durumlarda kontakt açısı değişir.

**İspat.**  $\gamma: I \rightarrow M$  birim hızlı slant eğri olsun. Tanım gereği,  $\eta(T) = \cos \theta = \text{sabit}$ .  $D$ -homotetik dönüşümün ardından,  $\gamma: I \rightarrow \tilde{M}$  eğrisinin birim hızlı yeniden parametrizasyonu için,

$$s = h(t) = \sqrt{a \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\tilde{T}) &= (a\eta) \left( \frac{1}{\sqrt{a \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} T \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} \eta(T) \\ &= \frac{\sqrt{a} \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{\sqrt{a} \operatorname{sgn}(\cos \theta) |\cos \theta|}{\sqrt{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} \\ &= \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{\frac{a \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} \\ &= \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} = \text{sabit} \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse,

$$-1 \leq \tilde{\eta}(\tilde{T}) \leq 1$$

ve sabit olduğundan, kontakt açısı

$$\cos \tilde{\theta} = \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}}$$

olan bir slant eğriye dönüşür. Eğer  $T = \pm \xi$  ise,  $\cos \theta = \eta(T) = \pm 1$  olduğundan,  $\theta = 0$  veya  $\theta = \pi$  dir. Her iki durumda da  $\sin \theta = 0$  dır. Buradan,

$$\cos \tilde{\theta} = \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} = \pm 1$$

çıkar. Yani  $\tilde{\theta} = \theta = 0, \pi$  dir. Eğer,  $T \perp \xi$  ise, yani  $\gamma$  Legendre eğrisi ise, bu durumda

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ ve } \sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ olduğundan}$$

$$\cos \tilde{\theta} = \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} = 0$$

dır. Böylece,  $\tilde{\theta} = \theta = \frac{\pi}{2}$  bulunur. Diğer durumlarda,  $\tilde{\theta} \neq \theta$  dır. Gerçekten,  $\tilde{\theta} = \theta$  ise,

öncelikle

$$\cos \tilde{\theta} = \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} = \cos \theta$$

ifadesinde her iki tarafın karesini alarak ilerleyelim.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta} &= \cos^2 \theta \\ \Rightarrow 1 - \cos^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta} \\ \Rightarrow \sin^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta} \\ \Rightarrow \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{1}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \sin^2 \theta \left( \frac{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \sin^2 \theta \left( \frac{a \cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left( \frac{a - 1}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta} \right) &= 0 \end{aligned}$$

hesaplarız. Böylece,  $a \neq 1$  olduğundan,  $\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0$  denklemi, bize  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  verir.

Bu durumlar dışında,  $\tilde{\theta} \neq \theta$  olur. ■

Sasakian manifoldlarda,  $D$ -homotetik dönüşümlerin geodezik eğrilere etkilerini inceleyeceğiz. Bir Riemann manifoldunda geodezik tanımını vererek başlayalım:

**Tanım 3.2.6.**  $(M, g)$  bir Riemann manifold ve  $\gamma: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.  $T = \gamma'$  olmak üzere,  $\nabla_T T = 0$  ise,  $\gamma$  eğrisine  $M$  üzerinde bir geodezik denir. Burada,  $\nabla$  ile Levi-Civita koneksiyonu gösterilmektedir [2].

$M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir Sasakian manifold ve  $\gamma: I \rightarrow M$  birim hızlı bir Legendre geodezik olsun. Yani,  $\eta(\gamma') = 0$  ve  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$  dır.  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası elde edilen

$\tilde{M} = (M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  Sasakian manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu  $\tilde{\nabla}$  ile,  $M$  nin Levi-Civita koneksiyonu  $\nabla$  arasında,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-a)[\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y]$$

ilişkisinin var olduğunu göstermiştik.  $\beta: I \rightarrow \tilde{M}$ ,  $\beta(s) = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{a}}s\right)$  birim hızlı yeniden

parametrizasyonunu kullanarak,  $\beta'(s) = \frac{1}{\sqrt{a}}\gamma'\left(\frac{1}{\sqrt{a}}s\right)$  yazabiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\beta'}\beta' &= \tilde{\nabla}_{\frac{1}{\sqrt{a}}\gamma'\left(\frac{1}{\sqrt{a}}s\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\gamma'\left(\frac{1}{\sqrt{a}}s\right)\right) = \frac{1}{a}\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \\ &= \frac{1}{a}\left\{\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) + (1-a)[\eta(\gamma'(t))\varphi(\gamma'(t)) + \eta(\gamma'(t))\varphi(\gamma'(t))]\right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

dır.

**Sonuç 3.2.7.** Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümleri altında, Legendre eğrilerin geodezik olma özelliği korunur.

$M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$  bir Sasakian manifold ve  $\gamma: I \rightarrow M$  birim hızlı bir slant geodezik olsun. Yani,  $\eta(\gamma') = \cos\theta = \text{sabit}$  ve  $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$  dir. Buradan,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) &= \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) + (1-a)[\eta(T)\varphi T + \eta(T)\varphi T] \\ &= 2(1-a)\cos\theta\varphi T\end{aligned}$$

yazabiliriz.  $\beta: I \rightarrow \tilde{M}$ ,  $\beta(s) = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{a\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}}s\right)$  birim hızlı yeniden

parametrizasyonunu kullanarak,  $\beta'(s) = \frac{1}{\sqrt{a\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}}\gamma'\left(\frac{1}{\sqrt{a\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}}s\right)$

yazabiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\beta'}\beta' &= \tilde{\nabla}_{\frac{1}{\sqrt{a\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}}\gamma'(t)}\left(\frac{1}{\sqrt{a\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}}\gamma'(t)\right) = \frac{1}{a\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) \\ &= \frac{2(1-a)\cos\theta}{a\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}\varphi(\gamma'(t))\end{aligned}$$

olarak hesaplarız.

**Sonuç 3.2.8.** Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümleri altında, slant eğrilerin geodezik olma özelliği genellikle korunmaz. Bir başka deyişle, birim hızlı slant geodezik eğrinin  $D$ -homotetik dönüşüm sonrasında geodezik olması için gerek ve yeter şart Legendre eğrisi olması veya  $\pm\xi$  nin integral eğrisi olmasıdır.

**İspat.**  $\tilde{\nabla}_{\beta'}\beta' = 0$  olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{2(1-a)\cos\theta}{a\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}\varphi(\gamma'(t)) = 0$$

olmasıdır.  $a \neq 1$  olduğundan  $\cos\theta = 0$  veya  $\varphi(\gamma'(t)) = 0$  dır.  $\cos\theta = 0$  ise,  $\gamma$  bir Legendre eğrisidir.  $\varphi(\gamma'(t)) = 0$  ise,

$$\begin{aligned}\varphi^2(\gamma') &= \varphi(\varphi\gamma') = 0 \\ &= -\gamma' + \eta(\gamma')\xi \\ &= -\gamma' + \cos\theta\xi\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak,  $\gamma' = \cos\theta\xi$  ve  $\gamma$  birim hızlı olduğundan,

$$\begin{aligned}1 &= g(\gamma', \gamma') = g(\cos\theta\xi, \cos\theta\xi) \\ &= \cos^2\theta g(\xi, \xi) = \cos^2\theta\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan,  $\cos\theta = \pm 1$  ve  $\gamma' = \pm\xi$  buluruz. Yani,  $\gamma$  eğrisi  $\pm\xi$  nin integral eğrisidir. ■

**Uyarı.** 3-boyutlu Sasakian manifoldlarda geodezik olmayan Legendre eğrilerin torsiyonunun 1'e eşit olduğu bilinmektedir ( $\kappa_2 = 1$ ) ([11] ve [13] nolu kaynaklara bakınız). Burada, "geodezik olmayan" ifadesi oldukça önemlidir. Yukarıda verdiğimiz sonuçlar ancak bu eğriler var olduğunda anlamlıdır. Sonraki bölümlerdeki örneklerden de görüleceği üzere, 3-boyutlu Sasakian manifoldlarda geodezik olan Legendre ve slant eğriler de vardır. Bu eğriler için doğal olarak  $\kappa_1 = 0$  olduğundan torsiyonun 1'e eşit olması özelliği geçerli değildir.

### 3.3 Küre Yüzeyinin Sasakian Yapısı

Bu alt bölümde öncelikle  $S^{2n+1}(1) \subset \mathbb{E}^{2n+2}$  hiperküresinin Sasakian yapısı verilecektir. Sonraki alt bölümlerde, bu yapı kullanılarak eğriler incelenecektir.

$\mathbb{E}^{2n+2} = (\mathbb{R}^{2n+2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Öklid uzayı ve  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}\}$  Öklid koordinat fonksiyonları olsun.

Burada

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \chi(\mathbb{E}^{2n+2}) \times \chi(\mathbb{E}^{2n+2}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{E}^{2n+2}, \mathbb{R})$$

Öklid iç çarpımının  $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{E}^{2n+2})$ ,  $X = \sum_{i=1}^{2n+2} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y = \sum_{i=1}^{2n+2} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  için

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{2n+2} u_i v_i$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Şimdi, 1 yarıçaplı ve orijin merkezli  $S^{2n+1}(1)$  hiperküresini tanımlayalım:

$$S^{2n+1}(1) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}) \in \mathbb{E}^{2n+2} : \sum_{i=1}^{2n+2} x_i^2 = 1 \right\}$$

olsun.  $\mathbb{E}^{2n+2}$  üzerinden  $S^{2n+1}(1)$  altmanifolduna indirgenen metrik tensörü ise

$$g = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{S^{2n+1}(1)}$$

ile gösterelim.  $(S^{2n+1}(1), g)$  de bir Riemann manifolddur. Bu manifold üzerinde,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n+1} \\ I_{n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{E}^{2n+2}$  üzerinde bir kompleks yapı  $(J^2 = -I_{2n+2})$  olmak üzere  $\xi$  karakteristik vektör alanı,

$$\xi = -JN = - \begin{bmatrix} 0 & -I_{n+1} \\ I_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{n+1+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1+i} \\ -x_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1+i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_{n+1+i}}$$

olarak tanımlanır. Burada  $N = x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}) \in \chi^\perp(S^{2n+1}(1))$ , orijin ile hiperküre

üzerindeki  $x \in S^{2n+1}(1)$  noktasını birleştiren birim normal göstermektedir. Bu gösterimi

kullanabilmemizin sebebi,  $\mathbb{E}^{2n+2}$  hem bir afin uzay, hem de bir vektör uzayı olduğundan

her bir noktasına, orijin ile birleşen bir vektör gözü ile bakabilmemizdir.

$N = x \in \chi^\perp(S^{2n+1}(1))$  olduğunu daha açık bir şekilde yazalım.  $S^{2n+1}(1)$  in denklemi

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n+2} x_i^2 - 1 = 0$$

olduğundan,

$$\text{grad}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{2n+2}} \right) = 2(x_1, x_2, \dots, x_{2n+2})$$

ve

$$\|gradf\| = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{2n+2} x_i^2} = 2$$

dir. Dolayısıyla,

$$N = \frac{gradf}{\|gradf\|} = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}) = x$$

birim normaldir.

Daha sonra,  $\eta$  1-formunu,  $\forall Y = \sum_{i=1}^{2n+2} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(S^{2n+1}(1))$  için

$$\begin{aligned} \eta(Y) &= g(Y, \xi) = \left\langle \sum_{i=1}^{2n+2} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1+i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_{n+1+i}} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} v_i x_{n+1+i} - \sum_{i=1}^{n+1} v_{n+1+i} x_i \end{aligned}$$

veya kısaca

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1+i} dx_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_i dx_{n+1+i}$$

olarak tanımlarız. (1,1)-tipinden  $\varphi$  tensör alanını ise

$$\varphi Y = JY - \eta(Y)N$$

ile tanımlarsak,  $S^{2n+1}(1) = (S^{2n+1}(1), \varphi, \xi, \eta, g) \subset \mathbb{E}^{2n+2}$  üzerindeki bu yapılarla bir Sasakian manifold olur [14].

$S^{2n+1}(1) \subset \mathbb{E}^{2n+2}$  hiperküresinin şekil operatörü,  $A_N = -I$  olduğunu biliyoruz. Böylece ikinci temel form,

$$h: \mathcal{X}(S^{2n+1}(1)) \times \mathcal{X}(S^{2n+1}(1)) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(S^{2n+1}(1)),$$

$$h(X, Y) = \langle A_N X, Y \rangle N = -\langle X, Y \rangle N$$

dir. Gauss ve Weingarten formüllerinden,  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(S^{2n+1}(1))$  ve  $N \in \mathcal{X}^\perp(S^{2n+1}(1))$  için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle X, Y \rangle N,$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X = X$$

yazabiliriz. Burada  $\bar{\nabla}$  ile  $\mathbb{E}^{2n+2}$  nin Levi-Civita koneksiyonu,  $\nabla$  ile  $S^{2n+1}(1)$  üzerine indirgenen koneksiyon gösterilmektedir.

$S^{2n+1}(1) = (S^{2n+1}(1), \varphi, \xi, \eta, g) \subset \mathbb{E}^{2n+2}$  manifoldunun gerçekten bir Sasakian manifold olduğunu gösterelim. Tanım gereği,  $Y = \xi$  için

$$\eta(\xi) = g(\xi, \xi) = \langle -JN, -JN \rangle = \langle JN, JN \rangle = \langle N, N \rangle = 1$$

bulunur. Şimdi,  $\forall Y \in \chi(S^{2n+1}(1))$  için,  $J$  nin anti-simetrikliğinden ve  $JN \in \chi(S^{2n+1}(1))$ ,

$N \in \chi^\perp(S^{2n+1}(1))$  olmasından dolayı

$$\begin{aligned} \eta(\varphi Y) &= g(\varphi Y, \xi) = \langle JY - \eta(Y)N, -JN \rangle \\ &= -\langle JY, JN \rangle + \eta(Y)\langle N, JN \rangle \\ &= -\langle Y, N \rangle = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son eşitliği de kullanarak,  $\forall Y \in \chi(S^{2n+1}(1))$  için

$$\varphi^2 Y = -Y + \eta(Y)\xi$$

eşitliğini doğrulayalım. Gerçekten

$$\begin{aligned} \varphi^2 Y &= \varphi(\varphi Y) = J(\varphi Y) - \eta(\varphi Y)N \\ &= J(JY - \eta(Y)N) \\ &= J^2 Y - \eta(Y)JN = -Y - \eta(Y)(-\xi) \\ &= -Y + \eta(Y)\xi \end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= g(JX - \eta(X)N, JY - \eta(Y)N) \\ &= \langle JX, JY \rangle - \eta(Y)\langle JX, N \rangle - \eta(X)\langle N, JY \rangle + \eta(X)\eta(Y)\langle N, N \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle + \eta(Y)\langle X, JN \rangle + \eta(X)\langle JN, Y \rangle + \eta(X)\eta(Y) \\ &= \langle X, Y \rangle + \eta(Y)\langle X, -\xi \rangle + \eta(X)\langle -\xi, Y \rangle + \eta(X)\eta(Y) \\ &= g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X) - \eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Şimdi,  $\nabla_X \xi$  ve  $\nabla \varphi$  ifadelerini hesaplayalım.  $\bar{\nabla} J = 0$

olduğundan, Gauss ve Weingarten formüllerini kullanırsak,  $\forall X \in \chi(S^{2n+1}(1))$  için

$$\begin{aligned}
\nabla_x \xi &= \bar{\nabla}_x \xi + \langle X, \xi \rangle N \\
&= \bar{\nabla}_x (-JN) + \eta(X)N \\
&= -\bar{\nabla}_x JN + \eta(X)N \\
&= -\left[ (\bar{\nabla}_x J)N + J\bar{\nabla}_x N \right] + \eta(X)N \\
&= -J\bar{\nabla}_x N + \eta(X)N \\
&= -JX + \eta(X)N \\
&= -(JX - \eta(X)N) \\
&= -\varphi X
\end{aligned}$$

buluruz. Diğer taraftan,  $\forall X, Y \in \chi(S^{2n+1}(1))$  için

$$\begin{aligned}
(\nabla_x \varphi)Y &= \nabla_x \varphi Y - \varphi \nabla_x Y \\
&= \bar{\nabla}_x \varphi Y + \langle X, \varphi Y \rangle N - \varphi (\bar{\nabla}_x Y + \langle X, Y \rangle N) \\
&= \bar{\nabla}_x (JY - \eta(Y)N) + \langle X, JY - \eta(Y)N \rangle N \\
&\quad - \left[ J(\bar{\nabla}_x Y + \langle X, Y \rangle N) - \eta(\bar{\nabla}_x Y + \langle X, Y \rangle N)N \right] \\
&= \bar{\nabla}_x JY - X \left[ \langle Y, \xi \rangle \right] N - \eta(Y) \bar{\nabla}_x N + \langle X, JY \rangle N - \eta(Y) \langle X, N \rangle N \\
&\quad - J\bar{\nabla}_x Y - \langle X, Y \rangle JN + \langle \bar{\nabla}_x Y, \xi \rangle N + \langle X, Y \rangle \langle N, \xi \rangle N \\
&= (\bar{\nabla}_x J)Y - \langle \bar{\nabla}_x Y, \xi \rangle N - \langle Y, \bar{\nabla}_x \xi \rangle N - \eta(Y)X + \langle X, JY \rangle N \\
&\quad - \langle X, Y \rangle JN + \langle \bar{\nabla}_x Y, \xi \rangle N \\
&= \langle X, Y \rangle \xi - \eta(Y)X - \langle Y, \bar{\nabla}_x \xi \rangle N + \langle X, JY \rangle N \\
&= g(X, Y) \xi - \eta(Y)X - \langle Y, \nabla_x \xi - \langle X, \xi \rangle N \rangle N + \langle X, JY \rangle N \\
&= g(X, Y) \xi - \eta(Y)X - \langle Y, -JX + \eta(X)N \rangle N + \langle X, JY \rangle N \\
&= g(X, Y) \xi - \eta(Y)X + \langle Y, JX \rangle N + \langle X, JY \rangle N \\
&= g(X, Y) \xi - \eta(Y)X - \langle JY, X \rangle N + \langle X, JY \rangle N \\
&= g(X, Y) \xi - \eta(Y)X
\end{aligned}$$

olarak hesaplarız. Bu son iki özelliği hesaplarken,  $\bar{\nabla}J = 0$  olduğunu da kullandık.

Gerçekten,  $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{B}^{2n+2})$ ,  $X = \sum_{i=1}^{2n+2} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y = \sum_{i=1}^{2n+2} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  için

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n+1} \\ I_{n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$JY = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n+1} \\ I_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{n+1+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{n+1+i} \\ v_i \end{bmatrix} = -\sum_{i=1}^{n+1} v_{n+1+i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n+1} v_i \frac{\partial}{\partial x_{n+1+i}}$$

dir. Buradan,

$$\bar{\nabla}_X JY = X(JY) = -\sum_{i=1}^{n+1} X[v_{n+1+i}] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n+1} X[v_i] \frac{\partial}{\partial x_{n+1+i}}$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$\bar{\nabla}_X Y = X(Y) = \sum_{i=1}^{n+1} X[v_i] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n+1} X[v_{n+1+i}] \frac{\partial}{\partial x_{n+1+i}}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} J\bar{\nabla}_X Y &= \begin{bmatrix} 0 & -I_{n+1} \\ I_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[v_i] \\ X[v_{n+1+i}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X[v_{n+1+i}] \\ X[v_i] \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{i=1}^{n+1} X[v_{n+1+i}] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n+1} X[v_i] \frac{\partial}{\partial x_{n+1+i}} \end{aligned}$$

buluruz. Sonuç olarak,

$$(\bar{\nabla}_X J)Y = \bar{\nabla}_X JY - J\bar{\nabla}_X Y = 0$$

dır. Tüm bu özellikler ve yapılar ile birlikte,  $(S^{2n+1}(1), \varphi, \xi, \eta, g)$  bir Sasakian manifolddur.

$(S^{2n+1}(1), \eta)$  manifoldunun bir kontakt manifold olduğu da ayrıca gösterelim. Tanım gereği

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1+i} dx_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_i dx_{n+1+i}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} d\eta &= d\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1+i} dx_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_i dx_{n+1+i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} dx_{n+1+i} \wedge dx_i - \sum_{i=1}^{n+1} dx_i \wedge dx_{n+1+i} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n+1} dx_{n+1+i} \wedge dx_i \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan,  $(d\eta)^n$  hesaplarken  $(n+1)$ -tane  $\{dx_{n+1+j} \wedge dx_j\}$  arasından  $n$ -tanesini seçip onların şapka (wedge) çarpımını almamız gerekir.

- Tüm  $\binom{n+1}{n} = n+1$  çiftli seçim yapılır.
- Her seçim,  $n$  adet 2-formun şapka(wedge) çarpımıdır.
- Bu işlem tüm sıralamalar için yapılır.

Böylece,

$$\begin{aligned}
(d\eta)^n &= \left( 2 \sum_{i=1}^{n+1} dx_{n+1+i} \wedge dx_i \right)^n \\
&= \underbrace{\left( 2 \sum_{i=1}^{n+1} dx_{n+1+i} \wedge dx_i \right) \wedge \left( 2 \sum_{i=1}^{n+1} dx_{n+1+i} \wedge dx_i \right) \wedge \dots \wedge \left( 2 \sum_{i=1}^{n+1} dx_{n+1+i} \wedge dx_i \right)}_{n \text{ tane}} \\
&= 2^n n! \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \Lambda(dx_{n+1+j} \wedge dx_j)
\end{aligned}$$

dir. Burada,  $\Lambda(dx_{n+1+j} \wedge dx_j)$  ifadesi ile,  $i$ . çiftliyi içermeyen  $2n$ -formlar gösterilmektedir. Sonuç olarak,

$$\eta \wedge (d\eta)^n = 2^n n! \sum_{i=1}^{n+1} (x_{n+1+i} dx_i - x_i dx_{n+1+i}) \wedge \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \Lambda(dx_{n+1+j} \wedge dx_j) \neq 0$$

hesaplanır. Çünkü, bu  $(2n+1)$ -form, ancak  $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n+2} = 0$  durumunda sıfıra eşit olur. Ancak, orijin  $S^{2n+1}(1)$  küresi üzerinde değildir. Böylece,  $\eta$  bir kontakt yapıdır.

### 3.4 $S^3(1)$ Küresi Üzerinde Legendre ve Slant Eğri Örneklerinin Hesaplanması ve $D$ -Homotetik Dönüşümün Bu Eğrilere Etkisinin İncelenmesi

Bu alt bölümde 3-boyutlu birim kürenin Sasakian yapısı kullanılarak uygulamalar yapılacaktır. Bölüm 3.3 deki yapılar kullanılarak,  $n = 1$  seçilirse

$$S^3(1) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{E}^4$$

(hiper)küresi elde edilir.  $M = (S^3(1), \varphi, \xi, \eta, g)$  Sasakian manifoldunda, teorik sonuçları Legendre ve slant eğriler üzerinde uygulayacağız.

$$\gamma : I \rightarrow S^3(1) \subset \mathbb{E}^4,$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (c_1 \cos(t), c_1 \sin(t), c_2 \cos(t), c_2 \sin(t))$$

eğri ailesini tanımlayalım. Burada  $c_1^2 + c_2^2 = 1$  dir.

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 = c_1^2 + c_2^2 = 1$$

olduğundan eğri  $S^3(1)$  de yatar. Teğet vektör alanı,

$$T = \gamma' = (-c_1 \sin(t), c_1 \cos(t), -c_2 \sin(t), c_2 \cos(t))$$

olarak hesaplanır. Dikkat edilirse,

$$g|_{S^3(1)}(\gamma', \gamma') = \langle \gamma', \gamma' \rangle = c_1^2 + c_2^2 = 1$$

dir, yani  $\gamma$  eğrisi birim hızlıdır. Eğri boyunca karakteristik vektör alanı,

$$\xi = (c_2 \cos(t), c_2 \sin(t), -c_1 \cos(t), -c_1 \sin(t))$$

şeklinde yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \eta(T) &= \left\langle (-c_1 \sin(t), c_1 \cos(t), -c_2 \sin(t), c_2 \cos(t)), (c_2 \cos(t), c_2 \sin(t), -c_1 \cos(t), -c_1 \sin(t)) \right\rangle \\ &= -c_1 c_2 \sin(t) \cos(t) + c_1 c_2 \cos(t) \sin(t) + c_1 c_2 \sin(t) \cos(t) - c_1 c_2 \cos(t) \sin(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,  $\gamma$  bir Legendre eğrisidir. Geodezik olduğunu gösterelim.  $\bar{\nabla}$  ve  $\nabla$  ile, sırasıyla  $\mathbb{E}^4$  ve  $S^3(1)$  in Levi-Civita koneksiyonları ifade edilsin. Gauss formülünden

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \bar{\nabla}_T T + \langle T, T \rangle N|_\gamma = \gamma'' + \gamma \\ &= (-c_1 \cos(t), -c_1 \sin(t), -c_2 \cos(t), -c_2 \sin(t)) + (c_1 \cos(t), c_1 \sin(t), c_2 \cos(t), c_2 \sin(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\gamma$  bir Legendre geodeziktir.

Şimdi,  $S^3(1)$  manifoldundan  $D$ -homoteti ile başka bir Sasakian yapı elde edeceğiz ve bu eğrilere etkilerini inceleyeceğiz. Özel olarak,  $a = 1/9$  seçelim.  $S^3(1)$  Sasakian manifoldu,  $D$ -homotetik dönüşümün ardından;

$$\tilde{\varphi} = \varphi = J - \eta \otimes N,$$

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{a} \xi = 9(x_3, x_4, -x_1, -x_2) = (9x_3, 9x_4, -9x_1, -9x_2),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= a\eta = \frac{1}{9}\eta = \frac{1}{9}(x_3 dx_1 + x_4 dx_2 - x_1 dx_3 - x_2 dx_4) \\ &= \frac{1}{9}x_3 dx_1 + \frac{1}{9}x_4 dx_2 - \frac{1}{9}x_1 dx_3 - \frac{1}{9}x_2 dx_4 \end{aligned}$$

$$\tilde{g} = a g|_{S^3(1)} + (a^2 - a)\eta \otimes \eta = \frac{1}{9} \langle \cdot, \cdot \rangle|_{S^3(1)} - \frac{8}{81} \eta \otimes \eta$$

olmak üzere,  $\tilde{M} = (S^3(1), \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  Sasakian manifolduna dönüşür.  $\gamma : I \rightarrow \tilde{M}$ ,

$$t \mapsto \gamma(t) = (c_1 \cos(t), c_1 \sin(t), c_2 \cos(t), c_2 \sin(t))$$

eğrisi için,

$$\gamma' = (-c_1 \sin(t), c_1 \cos(t), -c_2 \sin(t), c_2 \cos(t))$$

olduğundan,  $D$ -homotetik dönüşümün ardından eğrinin hızı,

$$v = \sqrt{\tilde{g}(\gamma', \gamma')} = \sqrt{\frac{1}{9} \langle \gamma', \gamma' \rangle_{S^3(1)} - \frac{8}{81} \eta(\gamma')^2} = \frac{1}{3}$$

bulunur. Böylece eğrinin hızı, üçte birine iner. Eğriyi birim hızlı hale getirelim.

$\tilde{\beta}: J \rightarrow \tilde{M}$ ,  $\tilde{\beta}(s) = \gamma(t) = \gamma(h^{-1}(s))$  ile eğrinin birim hızlı yeniden parametrizasyonunu gösterelim. Burada,

$$\begin{aligned} s = h(t) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\|_{\tilde{g}} du \\ &= \int_0^t \frac{1}{3} du = \frac{1}{3}t \end{aligned}$$

yay parametresidir. Böylece,

$$\tilde{\beta}(s) = \gamma(3s) = (c_1 \cos(3s), c_1 \sin(3s), c_2 \cos(3s), c_2 \sin(3s))$$

dir. Eğrinin tanjant vektör alanı,

$$\tilde{T}(s) = \tilde{\beta}'(s) = (-3c_1 \sin(3s), 3c_1 \cos(3s), -3c_2 \sin(3s), 3c_2 \cos(3s)) = 3\gamma'(t)$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\tilde{\eta}(\tilde{T}) = \left(\frac{1}{9}\eta\right)(3\gamma'(t)) = \frac{1}{3}\eta(\gamma'(t)) = 0 \text{ dır.}$$

Dolayısıyla,  $\tilde{\beta}$  bir Legendre eğrisidir. Yani, Legendre eğrisi olma özelliği korunmuş olur.

Son olarak,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-a)[\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y]$$

özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{T}} \tilde{T} &= \nabla_{\tilde{T}} \tilde{T} + \frac{8}{9}[\eta(\tilde{T})\varphi \tilde{T} + \eta(\tilde{T})\varphi \tilde{T}] \\ &= \nabla_{3\gamma'(t)}(3\gamma'(t)) + \frac{16}{9}\eta(3\gamma'(t))\varphi(3\gamma'(t)) \\ &= 9\nabla_{\gamma'}\gamma' + 16\eta(\gamma'(t))\varphi(\gamma') \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece,  $\tilde{\beta}$  bir geodeziktir. Sonuç olarak,  $D$ -homotetik dönüşüm öncesi bir Legendre geodezik olan  $\gamma$  eğrisi için, dönüşüm sonrasında Legendre geodezik olma özelliği korunmuştur.

Şimdi, Legendre olmayan slant eğrileri inceleyelim.

$$\gamma_{1,2}: I \rightarrow S^3(1) \subset \mathbb{E}^4,$$

$$t \mapsto \gamma_1(t) = (\cos(t), 0, -\sin(t), 0)$$

ve

$$t \mapsto \gamma_2(t) = (\cos(t), 0, \sin(t), 0)$$

eğrilerini tanımlayalım. Bu eğriler sırası ile,  $\xi|_{\gamma_1}$  ve  $\xi|_{\gamma_2}$  doğrultuları ile 0 ve  $\pi$  radyan kontakt açısına sahip slant eğrilerdir. Yani, karakteristik vektör alanının integral eğrileridir. Dolayısı ile slant geodezik olurlar.  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası, Sonuç 3.2.5 gereği kontakt açısı sabit kalır. Sonuç 3.2.8 den ise geodezik olma özellikleri korunur.

Bu alt bölümü, geodezik olmayan bir slant eğri ile bitireceğiz.  $\gamma : I \rightarrow S^3(1) \subset \mathbb{E}^4$ ,

$$\gamma(t) = \left( \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right), \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right), -\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right), -\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

eğrisi,  $\theta = \frac{\pi}{6}$  kontakt açısına,  $\kappa_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \kappa_2 = \frac{1}{2}$  eğriliklerine sahip bir Hopf helisidir ve slant eğridir ([8] ve [9] nolu kaynaklara bakınız).  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası, eğrinin hızı,

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{1}{9} \langle \gamma', \gamma' \rangle|_{S^3(1)} - \frac{8}{81} \eta(\gamma')^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{8}{81} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

bulunur. Yani, eğrinin hızı  $\sqrt{3}/9$  katına düşmüştür. Sonuç 3.2.5 gereği, kontakt açısı için,

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\theta} &= \operatorname{sgn}(\cos \theta) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta}} \\ &= \operatorname{sgn}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \sqrt{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğundan,  $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{3}$  olan bir slant eğriye dönüşür. Son durum ile ilk durum arasındaki açı farkı,

$$\tilde{\theta} - \theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ radyan} = 30^\circ$$

olduğundan değme açısı artmıştır. Açımın değişim oranı ise,

$$\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \%100$$

dür. Yani,  $\gamma$  eğrisinin  $\xi$  ile arasındaki açıklık (açı),  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası artarak iki katına çıkmıştır.

### 3.5 $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasakian Manifoldu Üzerinde Legendre ve Slant Eğriler ile Uygulama

Bu alt bölümde  $\mathbb{R}^3(-3)$  Sasakian manifoldu üzerinde uygulamalar yapılacaktır. Öncelikle bu manifoldu hatırlayalım.

$M = \mathbb{R}^3$  ve  $\{x, y, z\}$  koordinat fonksiyonları olsun.  $M$  üzerinde,

$$\xi = 2 \frac{\partial}{\partial z}$$

karakteristik vektör alanı,

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$$

1-formu,  $X = U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z} \in \chi(M)$  olmak üzere

$$\varphi X = V \frac{\partial}{\partial x} - U \frac{\partial}{\partial y} + Vy \frac{\partial}{\partial z}$$

(1,1)-tipinden tensör alanı,

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2)$$

Riemann metriği alınarak elde edilen  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  manifoldu, bir Sasakian manifolddur.

Bu manifold, çok iyi bilinen  $\mathbb{R}^3(-3)$  manifoldudur [4].  $\chi(M)$  in ortonormal bazı

$$\left\{ X = 2 \frac{\partial}{\partial y}, Y = \varphi X = 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \right), \xi = 2 \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

dir. Bu baza göre, Levi-Civita koneksiyonu

$$\nabla_X X = \nabla_Y Y = 0, \nabla_X Y = \xi, \nabla_Y X = -\xi,$$

$$\nabla_x \xi = \nabla_\xi X = -Y, \quad \nabla_y \xi = \nabla_\xi Y = X, \quad \nabla_\xi \xi = 0$$

olarak hesaplanır [4].  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3(-3)$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  birim hızlı bir slant eğri olsun. Bu durumda, teğet vektör alanı

$$\begin{aligned} T &= \gamma'_1(t) \frac{\partial}{\partial x} + \gamma'_2(t) \frac{\partial}{\partial y} + \gamma'_3(t) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} \{ \gamma'_2(t) X + \gamma'_1(t) Y + [\gamma'_3(t) - \gamma'_1(t) \gamma_2(t)] \xi \} \end{aligned}$$

dir.  $\gamma$  eğrisi slant olduğundan, eğer kontakt açısı  $\theta$  ile gösterilirse,

$$\eta(T) = \cos \theta = \frac{1}{2} (\gamma'_3(t) - \gamma'_1(t) \gamma_2(t))$$

elde edilir. Böylece, slant olma koşulunu,

$$\gamma'_3(t) = 2 \cos \theta + \gamma'_1(t) \gamma_2(t)$$

buluruz. Buna göre, teğet vektör alanını

$$T = \frac{1}{2} \{ \gamma'_2(t) X + \gamma'_1(t) Y \} + \cos \theta \xi$$

şeklinde yeniden düzenleyebiliriz.  $g(T, T) = 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= g \left( \frac{1}{2} \{ \gamma'_2(t) X + \gamma'_1(t) Y \} + \cos \theta \xi, \frac{1}{2} \{ \gamma'_2(t) X + \gamma'_1(t) Y \} + \cos \theta \xi \right) \\ &= \frac{1}{4} [\gamma'_2(t)]^2 + \frac{1}{4} [\gamma'_1(t)]^2 + \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\gamma'_2(t)]^2 + [\gamma'_1(t)]^2 = 4 \sin^2 \theta$$

birim hızlı olma koşulu elde edilir. Levi-Civita koneksiyonu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \nabla_T \left\{ \frac{1}{2} \{ \gamma'_2 X + \gamma'_1 Y + 2 \cos \theta \xi \} \right\} \\ &= \frac{1}{2} [\gamma''_2 X + \gamma'_2 \nabla_T X + \gamma'_1 Y + \gamma'_1 \nabla_T Y + 2 \cos \theta \nabla_T \xi] \\ &= \frac{1}{2} \{ (\gamma''_2 + 2 \cos \theta \gamma'_1) X + (\gamma''_1 - 2 \cos \theta \gamma'_2) Y \} \end{aligned}$$

bulunur. Eğer,  $\gamma$  bir Legendre eğrisi ise,  $\cos \theta = 0$  olacağından,

$$\gamma'_3(t) = \gamma'_1(t) \gamma_2(t), \quad (\text{Legendre olma koşulu})$$

$$T = \frac{1}{2} \{ \gamma'_2(t) X + \gamma'_1(t) Y \}, \quad (\text{teğet vektör alanı})$$

$$[\gamma'_2(t)]^2 + [\gamma'_1(t)]^2 = 4, \quad (\text{birim hızlı olma koşulu})$$

$$\nabla_T T = \frac{1}{2} \{ \gamma_2''(t) X + \gamma_1''(t) Y \}$$

eşitlikleri,  $\mathbb{R}^3(-3)$  ün Legendre eğrileri için geçerlidir. Ek olarak, eğer  $\gamma$  bir geodezik ise,

$$\nabla_T T = \frac{1}{2} \{ \gamma_2''(t) X + \gamma_1''(t) Y \} = 0 \quad (\text{geodezik olma koşulu})$$

$$\Rightarrow \gamma_1''(t) = \gamma_2''(t) = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\gamma_1''(t) = \gamma_2''(t) = 0, \quad \gamma_3'(t) = \gamma_1'(t) \gamma_2'(t)$$

diferansiyel denklem sisteminin çözümü var olduğundan 3-boyutlu Sasakian manifoldlarda Legendre geodezikler için elde ettiğimiz sonuçlar da anlamlıdır. Denklem çözülürse,

$$\gamma_1(t) = c_1 t + d_1,$$

$$\gamma_2(t) = c_2 t + d_2,$$

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{2} c_1 c_2 t^2 + c_1 d_2 t + d_3$$

çıkar. Böylece,  $\mathbb{R}^3(-3)$  ün Legendre geodezikleri,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3(-3)$ ,

$$t \mapsto \gamma(t) = \left( c_1 t + d_1, c_2 t + d_2, \frac{1}{2} c_1 c_2 t^2 + c_1 d_2 t + d_3 \right)$$

şeklindedir. Burada,  $c_1, c_2, d_1, d_2, d_3$  keyfi sabitler ve birim hızlı koşulu gereği  $c_1^2 + c_2^2 = 4$  tür.

Benzer şekilde, Legendre olmayan slant geodezikler için de bir parametrizasyon bulabiliriz. Kontakt açısı  $\theta$  ise,  $\nabla_T T = 0$  eşitliğinden,

$$0 = \frac{1}{2} \{ (\gamma_2'' + 2 \cos \theta \gamma_1') X + (\gamma_1'' - 2 \cos \theta \gamma_2') Y \}$$

$$\Rightarrow \gamma_2'' + 2 \cos \theta \gamma_1' = 0, \quad \gamma_1'' - 2 \cos \theta \gamma_2' = 0$$

denklemlerini buluruz. Slant eğri olma koşulunu da eklersek,

$$\gamma_2'' + 2 \cos \theta \gamma_1' = 0,$$

$$\gamma_1'' - 2 \cos \theta \gamma_2' = 0,$$

$$\gamma_3' = 2 \cos \theta + \gamma_1' \gamma_2'$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi çözelim. Öncelikle, birim hızlı olma koşulundan, bir  $f(t)$  fonksiyonu için,

$$\gamma_1' = 2 \sin \theta \cos f, \quad \gamma_2' = 2 \sin \theta \sin f$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\gamma_1'' = 2 \sin \theta (-\sin f) f',$$

$$\gamma_2'' = 2 \sin \theta (\cos f) f'$$

denklemlerini,  $\gamma_2'' + 2 \cos \theta \gamma_1' = 0$  denkleminde yerine yazarsak,

$$2 \sin \theta (\cos f) f' + 2 \cos \theta (2 \sin \theta \cos f) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin \theta (\cos f) [f' + 2 \cos \theta] = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \text{ veya } \cos f = 0 \text{ veya } f' + 2 \cos \theta = 0$$

bulunur. Benzer şekilde,  $\gamma_1'' - 2 \cos \theta \gamma_2' = 0$  denkleminde yerine yazarsak,

$$2 \sin \theta (-\sin f) f' - 2 \cos \theta (2 \sin \theta \sin f) = 0$$

$$\Rightarrow -2 \sin \theta \sin f [f' + 2 \cos \theta] = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \text{ veya } \sin f = 0 \text{ veya } f' + 2 \cos \theta = 0$$

bulunur. Böylece,  $\sin \theta = 0$  veya  $f' + 2 \cos \theta = 0$  olmak zorundadır. Çünkü,  $\cos f$  ve  $\sin f$  aynı anda sıfır olamaz. Sonuç olarak,  $\sin \theta = 0$  veya  $f(t) = -2 \cos \theta t + c$  dir.

Burada,  $c$  keyfi sabittir. Öncelikle  $\sin \theta = 0$  olsun. Bu durumda,

$$\gamma_1' = 0, \gamma_2' = 0 \Rightarrow \gamma_1 = c_1, \gamma_2 = c_2$$

olacak şekilde  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi sabitleri vardır. Bu durumda  $\cos \theta = \pm 1$  ve slant olma koşulundan,

$$\gamma_3' = 2 \cos \theta + \gamma_1' \gamma_2' = \pm 2 \Rightarrow \gamma_3 = \pm 2t + c_3$$

olur. Burada  $c_3$  keyfi sabittir. Böylece, dikkat edilirse,  $\sin \theta = 0$  durumu  $T = \pm \xi$  olması durumudur ve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3(-3)$ ,

$$t \mapsto \gamma(t) = (c_1, c_2, \pm 2t + c_3)$$

şeklinde elde edilir. Diğer durumda,  $\sin \theta \neq 0$  ise,  $f(t) = -2 \cos \theta t + c$  dir. Bu durumda,

$$\gamma_1' = 2 \sin \theta \cos(-2 \cos \theta t + c),$$

$$\gamma_2' = 2 \sin \theta \sin(-2 \cos \theta t + c)$$

olduğundan,

$$\gamma_1 = -\tan \theta \sin(-2 \cos \theta t + c) + c_2,$$

$$\gamma_2 = \tan \theta \cos(-2 \cos \theta t + c) + c_3$$

çıkar. Ayrıca,

$$\gamma_3' = 2 \cos \theta + \gamma_1' \gamma_2' = 2 \cos \theta + [2 \sin \theta \cos(-2 \cos \theta t + c)][\tan \theta \cos(-2 \cos \theta t + c) + c_3]$$

olduğundan,

$$\gamma_3(t) = 2 \cos \theta t - \frac{1}{4} \tan \theta \{4c_3 \sin(-2 \cos \theta t + c) + \tan \theta [\sin(-4 \cos \theta t + 2c) + 2c] - 4 \sin \theta t\} + c_4$$

bulunur. Burada,  $c, c_2, c_3, c_4$  keyfi sabitlerdir. Böylece,  $f' + 2 \cos \theta = 0$  durumunda,

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3(-3)$ ,  $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  eğrisi, birim hızlı slant geodezik olur.

Şimdi,  $\mathbb{R}^3(-3)$  manifoldundan  $D$ -homoteti ile başka bir Sasakian yapı elde edeceğiz ve bu

eğrilere etkilerini inceleyeceğiz. Özel olarak,  $a = 4$  seçelim.  $\mathbb{R}^3(-3)$  Sasakian manifoldu,

$D$ -homotetik dönüşümün ardından;  $\mathbb{R}^3$  üzerinde,

$$\tilde{\varphi} = \varphi,$$

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{a} \xi = \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\tilde{\eta} = a\eta = 4 \cdot \frac{1}{2} (dz - ydx) = 2(dz - ydx),$$

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= ag + (a^2 - a)\eta \otimes \eta = 4g + 12\eta \otimes \eta \\ &= 4 \left( \eta \otimes \eta + \frac{1}{4} (dx^2 + dy^2) \right) + 12\eta \otimes \eta \\ &= 16\eta \otimes \eta + (dx^2 + dy^2) \end{aligned}$$

olmak üzere,  $\tilde{M} = (\mathbb{R}^3, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$  Sasakian manifolduna dönüşür. Bu manifold üzerinde,

$$\gamma: I \rightarrow \tilde{M},$$

$$t \mapsto \gamma(t) = \left( c_1 t + d_1, c_2 t + d_2, \frac{1}{2} c_1 c_2 t^2 + c_1 d_2 t + d_3 \right)$$

eğrisi için teorik sonuçlarımızı doğrulayalım. Beklenen sonuç, bu eğrinin yine bir

Legendre geodezik olmasıdır. Gerçekten,  $\tilde{M}$  üzerinde,

$$\gamma'(t) = (c_1, c_2, c_1 c_2 t + c_1 d_2)$$

için,

$$v^2 = \tilde{g}(\gamma', \gamma') = 16\eta(\gamma')\eta(\gamma') + (c_1^2 + c_2^2) = 4 \neq 1$$

olduğundan, eğrinin hızı  $v = \|\gamma'\|_{\tilde{g}} = \sqrt{4} = 2$  dir ve sabittir; ancak, birim hızlı olma özelliği

korunmaz. Eğriyi birim hızlı hale getirelim.  $\tilde{\beta}: J \rightarrow \tilde{M}$ ,  $\tilde{\beta}(s) = \gamma(t) = \gamma(h^{-1}(s))$  ile

eğrinin birim hızlı yeniden parametrizasyonunu gösterelim. Burada,

$$s = h(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|_g du$$

$$= \int_0^t 2 du = 2t$$

yay parametresidir. Böylece,

$$\tilde{\beta}(s) = \gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \left(\frac{1}{2}c_1s + d_1, \frac{1}{2}c_2s + d_2, \frac{1}{8}c_1c_2s^2 + \frac{1}{2}c_1d_2s + d_3\right)$$

dir. Eğrinin tanjant vektör alanı,

$$\tilde{T}(s) = \tilde{\beta}'(s) = \left(\frac{1}{2}c_1, \frac{1}{2}c_2, \frac{1}{4}c_1c_2s + \frac{1}{2}c_1d_2\right) = \frac{1}{2}\left(c_1, c_2, \frac{1}{2}c_1c_2s + c_1d_2\right) = \frac{1}{2}\gamma'(t)$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\tilde{T}) &= 2(dz - ydx)|_{\tilde{\beta}}\left(\frac{1}{2}\left(c_1, c_2, \frac{1}{2}c_1c_2s + c_1d_2\right)\right) \\ &= \left(dz - \left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)dx\right)\left(c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial y} + c_1\left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial y} + c_1\left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)dx\left(c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial y} + c_1\left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= c_1\frac{\partial z}{\partial x} + c_2\frac{\partial z}{\partial y} + c_1\left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)\frac{\partial z}{\partial z} - \left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)\left(c_1\frac{\partial x}{\partial x} + c_2\frac{\partial x}{\partial y} + c_1\left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)\frac{\partial x}{\partial z}\right) \\ &= c_1\left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right) - \left(\frac{1}{2}c_2s + d_2\right)c_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,  $\tilde{\beta}$  bir Legendre eğrisidir. Yani, Legendre eğrisi olma özelliği korunmuş olur. Son olarak, (3.3) eşitliği gereği

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (1-a)[\eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y]$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{T}} \tilde{T} &= \nabla_{\tilde{T}} \tilde{T} - 3[\eta(\tilde{T})\varphi \tilde{T} + \eta(\tilde{T})\varphi \tilde{T}] \\ &= \nabla_{\frac{1}{2}\gamma'(t)}\left(\frac{1}{2}\gamma'(t)\right) - 6\eta\left(\frac{1}{2}\gamma'(t)\right)\varphi\left(\frac{1}{2}\gamma'(t)\right) \\ &= \frac{1}{4}\nabla_{\gamma'}\gamma' - \frac{3}{2}\eta(\gamma'(t))\varphi(\gamma') \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece,  $\tilde{\beta}$  bir geodeziktir. Sonuç olarak,  $D$ -homotetik dönüşüm öncesi bir Legendre geodezik olan  $\gamma$  eğrisi için, dönüşüm sonrasında Legendre geodezik olma özelliği korunmuştur.

Benzer tartışma, Legendre olmayan slant geodezikler için de yapılabilir. Slant olma özelliğinin korunduğunu, kontakt açısının ve geodezik olma özelliğinin genellikle korunmadığını; ancak, Legendre eğrisi olma veya  $\pm\xi$  nin integral eğrisi olma durumunda, slant geodezik olma özelliğinin korunduğunu söyleyebiliriz. Yani,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3(-3)$ ,  $\gamma(t) = (c_1, c_2, \pm 2t + c_3)$  slant geodezik eğrileri için de,  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası bu özellikleri korunur.

Son bir uygulama ile bölümü tamamlayalım.  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3(-3)$ ,  $\gamma(t) = (t, 0, \sqrt{3}t)$  eğrisini ele alalım.  $\chi(\mathbb{R}^3(-3))$  ün  $\{X, Y, \xi\}$  ortonormal bazı cinsinden,  $\gamma$  eğrisinin tanjant vektör alanı,

$$T = \gamma'(t) = (1, 0, \sqrt{3}) = \frac{1}{2}Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi$$

dir. Yani, eğri birim hızlıdır.  $\eta(T) = g(T, \xi) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sabit}$  olduğundan,  $\gamma$  eğrisi  $\theta = \frac{\pi}{6}$

radyan kontakt açısına sahip bir slant eğridir. Daha sonra,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \nabla_T \left( \frac{1}{2}Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi \right) = \frac{1}{2}\nabla_T Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\nabla_T \xi \\ &= \frac{1}{2}\nabla_{\frac{1}{2}Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi} Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\nabla_{\frac{1}{2}Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi} \xi \\ &= \frac{1}{4}\nabla_Y Y + \frac{\sqrt{3}}{4}\nabla_\xi Y + \frac{\sqrt{3}}{4}\nabla_Y \xi + \frac{3}{4}\nabla_\xi \xi \\ &= \frac{1}{4}.0 + \frac{\sqrt{3}}{4}X + \frac{\sqrt{3}}{4}X + \frac{3}{4}.0 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}X = \kappa_1 E_2 \end{aligned}$$

olduğundan  $\kappa_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ve  $E_2 = X$  tir. Devam edilirse,

$$\begin{aligned}
\nabla_T E_2 &= \nabla_T X = \nabla_{\frac{1}{2}Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi} X \\
&= \frac{1}{2} \nabla_Y X + \frac{\sqrt{3}}{2} \nabla_\xi X \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} Y - \frac{1}{2} \xi \\
&= -\kappa_1 T + \kappa_2 E_3 \\
\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2} Y + \frac{\sqrt{3}}{2} \xi \right) + \kappa_2 E_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} Y - \frac{1}{2} \xi \\
\Rightarrow \kappa_2 E_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} Y + \frac{1}{4} \xi \\
\Rightarrow \kappa_2 &= \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \text{ ve } E_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} Y + \frac{1}{2} \xi
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,  $\gamma$  eğrisi bir slant helistir.  $D$ -homotetik dönüşümümüz yine bir önceki gibi  $a = 4$  olarak uygulansın.

$$\begin{aligned}
v^2 &= \tilde{g}(\gamma', \gamma') = 4g(\gamma', \gamma') + 12\eta(\gamma')^2 \\
&= 4 + 12 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\
&= 13
\end{aligned}$$

olduğundan eğrinin hızı  $\sqrt{13}$  katına çıkar. Eğrinin birim hızlı yeniden parametrisasyonu ise,

$$\tilde{\beta}(s) = \gamma \left( \frac{1}{\sqrt{13}} s \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{13}} s, 0, \sqrt{\frac{3}{13}} s \right)$$

dir. Bu eğri, yine bir slant eğridir, ancak kontakt açısı değişmiştir. Gerçekten,

$$\tilde{T}(s) = \tilde{\beta}'(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{13}}, 0, \sqrt{\frac{3}{13}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{13}} Y + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{13}} \xi$$

olup

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}(\tilde{T}) &= 4\eta(\tilde{T}) = 4\eta \left( \frac{1}{2\sqrt{13}} Y + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{13}} \xi \right) \\
&= 2\sqrt{\frac{3}{13}} = \text{sabit}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece,  $\tilde{\beta}$  eğrisi, kontakt açısı

$$\tilde{\theta} = \arccos\left(2\sqrt{\frac{3}{13}}\right) \approx 0.28103 \text{ radyan} \approx 16,1^\circ$$

olan bir slant eğridir. Son durum ile ilk durum arasındaki açı farkı,

$$\tilde{\theta} - \theta = \arccos\left(2\sqrt{\frac{3}{13}}\right) - \frac{\pi}{6} \approx -0,24256 \text{ radyan} \approx -13,9^\circ$$

olduğundan değme açısı azalmıştır. Açının değişim oranı ise,

$$\frac{\arccos\left(2\sqrt{\frac{3}{13}}\right) - \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} \approx -\%46,32$$

dir. Yani,  $\gamma$  eğrisinin  $\xi$  ile arasındaki açıklık (açı),  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası azalarak yaklaşık  $\%53,68$  ine düşmüştür.

Böylece, Sasakian manifoldlardaki  $D$ -homotetik dönüşümlerin çeşitli eğriler üzerinde açı ve uzunluk ölçümlerine etkisini detaylı hesaplamalar ile incelemiş olduk. Bu etkileri daha birçok eğriye uygulamak mümkündür.

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Sasakian manifoldların  $D$ -homotetik dönüşümlerinin Frenet eğrileri üzerindeki etkileri detaylı olarak çalışılmıştır. Özel olarak, küre yüzeyinin Sasakian yapısı ele alınmıştır. Legendre ve slant geodezikler ile ilgili uygulamalar yapılmıştır.

Bir Sasakian manifoldda yatan bir Frenet eğrisi için,  $D$ -homotetik dönüşüm sonrası, birim hızlı eğri olma özelliğinin korunmadığı; ancak, sabit hızlı eğri olma özelliğinin korunduğu görülmüştür. Legendre veya slant eğri olma özellikleri de korunmaktadır. Slant eğriler için kontakt açısı genel olarak korunmamaktadır. Geodezik olma özelliğinin ne zaman korunduğu da ispatlanmıştır. Küre üzerinde örnekler verilerek sonuçlar desteklenmiştir.

Yapılan çalışmaları, Sasakian manifoldlar dışında diğer manifoldlara uygulamak mümkün görülmektedir.

## 5. KAYNAKLAR

- [1] **S. Kobayashi and K. Nomizu**, *Foundations of Differential Geometry*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1996.
- [2] **H. H. Hacısalihoğlu**, *Diferensiyel Geometri*. İnönü Üniversitesi Yayınları, 1983.
- [3] **K. Yano and M. Kon**, *Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics*, 3. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1984.
- [4] **D. E. Blair**, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Second Edition, Progress in Mathematics*, 203. Boston, MA: Birkhauser Boston, Inc., 2010.
- [5] **S. Tanno**, “Topology of contact Riemannian manifolds”, *Illinois J. Math.*, 12, 700-717, 1968.
- [6] **Z. Olszak**, “Curvature properties of quasi-Sasakian manifolds”, *Tensor (N.S.)*, 38, 19-28, 1982.
- [7] **D. Ferus and S. Schirmacher**, “Submanifolds in Euclidean space with simple geodesics”, *Math Ann.*, 260, no. 1, 57-62, 1982.
- [8] **H. Hopf**, “Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche”, *Math. Ann.*, 104, no. 1, 637-665, 1931.
- [9] **D. W. Lyons**, “An elementary introduction to the Hopf fibration”, *Math. Mag.*, 76 (2), 87-98, 2003.
- [10] **K. Yano and M. Kon**, *Anti-invariant submanifolds, (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics)*, 21. New York-Basel: Marcel Dekker, Inc., 1976.
- [11] **D. E. Blair and C. Baikoussis**, “On Legendre curves in contact 3-manifolds”, *Geom. Dedicata*, 49, 135-142, 1994.
- [12] **J. T. Cho, J. I. Inoguchi and J. E. Lee**, “On slant curves in Sasakian 3-manifolds”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 74, no. 3, 359-367, 2006.
- [13] **M. Belkheffa, I. E. Hırıca and L. Verstraelen**, “On legendre curves in Riemannian and Lorentzian Sasaki spaces”, *Soochow J. Math.*, 28 (1), 81-91, 2002.
- [14] **D. Fetcu and C. Oniciuc**, “Explicit formulas for biharmonic submanifolds in Sasakian space forms”, *Pacific J. Math.*, 240, 85-107, 2009.
- [15] **R. Caddeo, S. Montaldo and C. Oniciuc**, “Biharmonic submanifolds of  $\mathbb{S}^3$ ”, *Internat. J. Math.*, 12, no. 8, 867-876, 2001.

# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Tuğba KUŞCU

Doğum tarihi ve yeri : 27.02.1996 / BALIKESİR

e-posta : tugbakuscu68@gmail.com

## Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Lisans	Balıkesir Üniversitesi / İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2018
Lise	Balıkesir Muharrem Hasbi Anadolu Lisesi	2014