

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



SERBEST ÇÖZÜMLER VE KOSZUL KOMPLEKSLER

HİHAL DÜLGEROĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Pınar METE (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Seher TUTDERE KAVUT
Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

BALIKESİR, OCAK - 2026

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Serbest Çözümler ve Koszul Kompleksler**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Hilal DÜLGEROĞLU

ÖZET

SERBEST ÇÖZÜMLER VE KOSZUL KOMPLEKSLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HİHAL DÜLGEROĞLU
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. PINAR METE)
BALIKESİR, OCAK - 2026

Değişmeli cebirde, serbest çözümler, tensör çarpımlar, zincir ve Koszul kompleksler, modüllerin homolojik özelliklerini incelemede temel araçlar arasında yer almaktadır. Bu tez çalışması, modül teorisindeki cebirsel yapıların homolojik yöntemler ile incelenmesi üzerine bir derlemedir.

Bu amaç doğrultusunda, modül teorisindeki temel kavramlar, serbest modüller, sızgi modülleri ve tam diziler ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Ardından tensör çarpımın evrensel özelliği ve tam dizilerle olan ilişkisi incelenmiş; zincir kompleksleri ve homoloji modülleri aracılığıyla modüllerin homolojik davranışları açıklanmıştır. Bu çerçevede doğrultusunda, regüler diziler ile Koszul kompleksleri arasındaki ilişki ele alınarak, Koszul komplekslerinin serbest çözümler ve modül homolojisi bağlamındaki rolü ortaya konmuştur.

ANAHTAR KELİMELEER: Homolojik cebir, Koszul kompleksleri, serbest çözümler, tam diziler, tensör çarpımı

Bilim Kod / Kodları : 20401

Sayfa Sayısı : 53

ABSTRACT

FREE RESOLUTIONS AND KOSZUL COMPLEXES
MSC THESIS
HİLAL DÜLGEROĞLU
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. PINAR METE)
BALIKESİR, JANUARY - 2026

In commutative algebra, free resolutions, tensor products, chain and Koszul complexes are fundamental tools for studying the homological properties of modules. This thesis is a survey on the investigation of algebraic structures in module theory using homological methods.

For this purpose, the fundamental concepts in module theory, free modules, syzygy modules, and exact sequences, are discussed in detail. After that, the universal property of the tensor product and its relationship with exact sequences are examined; the homological behavior of modules is explained through chain complexes and homology modules. Within this framework, the relationship between regular sequences and Koszul complexes is addressed, revealing the role of Koszul complexes in the context of free resolutions and module homology.

KEYWORDS: Homological algebra, Koszul complexes, free resolutions, exact sequences, tensor products

Science Code / Codes : 20401

Page Number : 53

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
1. GİRİŞ	1
2. MODÜLLER VE TAM DİZİLER	3
2.1 Modüller ve Modül Homomorfizmaları	3
2.2 Serbest Modüller	7
2.3 Sizigiler	10
2.4 Tam Diziler	11
2.5 Serbest Çözümler	16
3. TENSÖR ÇARPIMLAR	18
3.1 Vektör Uzayların Tensör Çarpımı	18
3.2 Modüllerin Tensör Çarpımı	21
3.3 Tensör Çarpımların İnşası.....	24
3.4 Multilineer Dönüşümler ve Tensör Çarpımlar	27
3.5 Homomorfizmaların Tensör Çarpımı	29
3.6 Tensör Çarpımlar ve Tam Diziler	30
4. HOMOLOJİ CEBİRİ	35
4.1 Zincir Kompleksler.....	35
4.2 Homoloji Modülü	37
4.3 Projektif Çözümler	41
5. KOSZUL KOMPLEKSLER	45
5.1 Simetrik ve Ters Simetrik Çarpımlar.....	45
5.2 Koszul Kompleksler	48
5.3 Regüler Diziler	50
6. KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	53

SEMBOL LİSTESİ

\mathbf{R}	: Halka
\mathbf{M}	: R-modül
$\mathbf{1}_R$: R halkasının birim elemanı
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$\mathbf{Hom}_R(\mathbf{M}, \mathbf{N})$: M'den N'ye tüm R-modül homomorfizmalarının kümesi
$\mathbf{Ker}(\varphi)$: φ dönüşümünün çekirdeği
$\mathbf{Im}(\varphi)$: φ dönüşümünün görüntüsü
$\mathbf{Coker}(\varphi)$: φ dönüşümünün eşçekirdeği
$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{M}_i$: $\{ \mathbf{M}_i \mid i \in I \}$ modüllerinin direkt toplamı
$\prod_{i \in I} \mathbf{M}_i$: $\{ \mathbf{M}_i \mid i \in I \}$ modüllerinin direkt çarpımı
$\mathbf{Syz}(\mathbf{M})$: M modülünün 1. sızı modülü
$\mathbf{F}[x_1, \dots, x_n]$: F cismi üzerinde n bilinmeyenli polinom halkası
$\mathbf{M} \otimes_R \mathbf{N}$: M ve N, R-modüllerinin tensör çarpımı
$\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$: f ve g dönüşümlerinin tensör çarpımı
(\mathbf{C}, \mathbf{d})	: Zincir kompleks
$\mathbf{H}_n(\mathbf{C}, \mathbf{d})$: (\mathbf{C}, \mathbf{d}) zincir kompleksinin n. Homoloji modülü
$\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$: R halkası üzerinde n-boyutlu kare matrislerin kümesi
$\mathbf{iz}(A)$: A matrisinin izi
$\mathbf{Sym}^n \mathbf{M}$: M, R-modülünün kendisi ile n-kere simetrik çarpımı
$\wedge^n \mathbf{M}$: M, R-modülünün kendisi ile n-kere dış çarpımı
$\binom{n}{i}$: Binom katsayısı
$\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)$: x_1, \dots, x_n elemanlarının Koszul kompleksi

ÖNSÖZ

İlk olarak, bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, sabrıyla her sorumu yanıtlayıp, karşılaştığım her güçlükte yol göstererek akademik gelişimime katkı sağlayan sayın danışman hocam Doç. Dr. Pınar METE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca desteklerini benden esirgemeyen, maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan kıymetli aileme, tezime odaklanabilmem için gerekli anlayışı ve uygun çalışma ortamını sağlayan tüm yöneticilerime ve iş arkadaşlarıma, her daim yanımda olan sevgili dostlarıma ve varlığı ile en büyük motivasyon kaynağım olan kedim Ceviz'e içtenlikle teşekkür ederim.

Balıkesir, 2026

Hilal DÜLGEROĞLU

1. GİRİŞ

Değişmeli cebirde, cebirsel yapıların geometrik ve homolojik özelliklerini anlamak amacıyla geliştirilen pek çok yöntem, serbest modüller ve bunlar aracılığıyla elde edilen çözümlere dayanmaktadır. Özellikle sonlu üretilmiş modüllerin, serbest modüllerle ilişkilendirilmesi, modüllerin yapısının daha açık ve hesaplanabilir bir biçimde incelenmesine olanak tanır. Bu yaklaşım, değişmeli cebirin temel problemlerinden biri olarak kabul edilen modül çözümlerinin incelenmesinde merkezi bir rol oynamaktadır.

Serbest çözümlü, bir sonlu üretilmiş modül ile ilişkilendirme fikri ilk olarak David Hilbert'in 1890 tarihli makalesinde [1] tanıtılmaktadır. Bu makalede polinom halkası üzerindeki ideallerin ve modüllerin, sonlu uzunlukta serbest çözümlere sahip olduğunu göstermiştir ve bu sonuç, günümüzde Hilbert'in Syzygy (Sizigi) Teoremi olarak bilinmektedir.

Serbest çözümlü açık bir şekilde yazmak, değişmeli cebirin temel problemlerinden biridir. Bir serbest çözümlü, bir modülün üreteçlerini ve bu üreteçler arasındaki bağıntıları ardışık biçimde ortaya koyan tam dizilerden oluşur. Bu çözümler boyunca ortaya çıkan sizigi modülleri, modülün yalnızca elemanlarıyla değil, aynı zamanda bu elemanlar arasındaki ilişkilerle tanımlandığını gösterir. Bu nedenle sizigiler ve tam diziler, modül teorisinin yapısal özelliklerini anlamada vazgeçilmez araçlar arasında yer alır.

Modüller arasındaki ilişkilerin incelenmesinde ise tensör çarpım kavramı devreye girer. Tensör çarpımı, bilinear dönüşümlerin evrensel özelliği temsil etmesi sayesinde, modüllerin homolojik davranışlarının analizinde işimize yarar. Özellikle tam dizilerle birlikte kullanıldığında, tensör çarpım, modül teorisi ile homoloji cebiri arasındaki bağlantının anlaşılmasında oldukça kullanışlıdır.

Homoloji cebiri, zincir kompleksleri ve homoloji modüllerini kullanarak cebirsel yapıların daha karmaşık özelliklerini incelemeyi amaçlar. Serbest çözümlerin homolojik yorumları, modüllerin önemli özelliklerinin anlaşılmasına katkı sağlar.

Koszul kompleksler ise, serbest çözümler ve homoloji cebiri arasındaki ilişkiyi somut ve

hesaplanabilir bir biçimde ortaya koyan önemli yapılardır. Bir elemanlar dizisi yardımıyla inşa edilen Koszul kompleksleri, regüler diziler ve modüllerin homolojik özelliklerinin incelenmesinde temel bir rol oynar.

Bu tezde [2], [3], [4] ve [5] kaynakları baz alınarak, yukarıda belirtilen çerçeve doğrultusunda, Koszul kompleksleri anlamak için zemin hazırlanmıştır.

Tezin 2. bölümünde, modül teorisinin temel kavramları ele alınmaktadır. Modüller, modül homomorfizmaları, serbest modüller, sizigiler ve tam diziler ayrıntılı biçimde incelenmektedir.

Tezin 3. bölümünde, tensör çarpımı kavramı önce vektör uzaylar, ardından modüller için tanıtılmakta ve evrensel özellikleri ile birlikte çalışılmaktadır.

Tezin 4. bölümünde, homoloji cebirinin temel araçları olan zincir kompleksleri, homoloji modülleri ve bunlar arasındaki morfizmaları tanımlayarak, homolojik yöntemler kısaca açıklanmaktadır.

Tezin 5. bölümünde, simetrik ve ters simetrik çarpımlar ile Koszul kompleksleri arasındaki ilişki ortaya konularak, regüler dizilerin, modüllerin yapısal ve homolojik özelliklerini belirlemedeki rolü ele alınmaktadır.

2. MODÜLLER VE TAM DİZİLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan modül teorisinin temel kavramları ele alınmaktadır. Öncelikle modül tanımı ve temel örnekler verilerek, modüller arasındaki homomorfizmalar tanıtılmaktadır. Ardından serbest modüller ve bu modüllerle ilişkili sızigi kavramı incelenerek, modüller arasındaki ilişkiler tam diziler aracılığıyla açıklanmaktadır. Bu bölümün amacı, sonraki bölümlerde kullanılacak homolojik yöntemler için gerekli altyapıyı oluşturmaktır.

2.1 Modüller, Modül Homomorfizmaları

Soyut cebirde, bir halka üzerindeki modül kavramı, cisim üzerindeki vektör uzayı kavramı ile benzerdir. Modül teori, en iyi şekilde, halka üzerindeki lineer cebir olarak tanımlanabilir.

2.1.1 Tanım R değişmeli bir halka olsun. $\emptyset \neq M$ kümesi,

$$\begin{aligned} + : M \times M &\rightarrow M & \cdot : R \times M &\rightarrow M \\ (x, y) &\rightarrow x + y & (a, x) &\rightarrow a \cdot x \end{aligned}$$

işlemleri ile birlikte, eğer $(M, +)$ bir değişmeli grup ve her $a, b \in R$, $x, y \in M$ için

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$(a + b)x = ax + bx$$

$$(ab)x = a(bx)$$

özellikleri sağlanıyor ise M 'ye R -modül denir. R halkası birimli halka ve her $x \in M$ için,

$$1_R \cdot x = x$$

ise, M modülüne birimli R -modül denir.

2.1.2 Örnek A değişmeli bir grup, $n \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\mathbb{Z} \times A \rightarrow A \quad (n, a) \rightarrow n \cdot a = \begin{cases} a + \cdots + a, & n > 0 \\ (-a) + \cdots + (-a), & n < 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

ile, A bir \mathbb{Z} -modüldür.

2.1.3 Örnek R değişmeli ve birimli bir halka, I , R 'nin bir ideali olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : R \times I &\rightarrow I \\ (r, a) &\rightarrow r \cdot a \end{aligned}$$

ile, I ideali bir R -modüldür.

2.1.4 Örnek R birimli ve değişmeli bir halka olsun.

$$\begin{aligned} R^n &= R \times R \cdots \times R \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R\} \end{aligned}$$

ile tanımlanan R^n , R halkasının kendisiyle n -kere kartezyen çarpımıdır.

$$\begin{aligned} R \times R^n &\rightarrow R^n \\ (a, (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\rightarrow (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \end{aligned}$$

ile R^n , R halkası üzerinde bir R -modüldür.

2.1.5 Tanım M ve N , R -modüller olsun. $\varphi : M \rightarrow N$ dönüşümü $\forall m_1, m_2 \in M$ ve $a \in R$ için,

$$\begin{aligned} \varphi(m_1 + m_2) &= \varphi(m_1) + \varphi(m_2) \\ \varphi(a \cdot m_1) &= a \cdot \varphi(m_1) \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyor ise, φ 'ye R -modül homomorfizması denir.

M den N ye bütün R -modül homomorfizmalarının kümesi $Hom_R(M, N)$ ile gösterilir ve modül homomorfizmalarının kümesi de bir modül yapısına sahiptir.

2.1.6 Örnek $Hom_R(M, N) = \{\varphi \mid \varphi : M \rightarrow N \text{ ve } \varphi, R\text{-modül homomorfizması}\}$ kümesi üzerinde, M, N birer R -modül ve $m \in M$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} + : Hom_R(M, N) \times Hom_R(M, N) &\rightarrow Hom_R(M, N) \\ (\varphi, \psi) &\rightarrow (\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m) \\ \cdot : R \times Hom_R(M, N) &\rightarrow Hom_R(M, N) \\ (a, \varphi) &\rightarrow (a \cdot \varphi)(m) = a \cdot \varphi(m) \end{aligned}$$

işlemleri tanımlansın. Bu durumda, $Hom_R(M, N)$ bir R -modüldür.

2.1.7 Tanım M bir R -modül olsun. $\emptyset \neq N \subset M$ olsun. Eğer, $n_1, n_2 \in N$ ve $a \in R$ için,

$$n_1 + n_2 \in N$$

$$a \cdot n_1 \in N$$

şartlarını sağlıyor N 'ye M 'nin altmodülü denir. M 'nin her altmodülü de yine bir R -modüldür.

2.1.8 Tanım $\varphi : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun.

$$Ker(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$$

$$Im(\varphi) = \{\varphi(m) \mid m \in M\}$$

kümelerine, sırasıyla φ modül homomorfizmasının çekirdeği ve görüntüsü denir. $Ker(\varphi)$, M modülünün, $Im(\varphi)$, N modülünün altmodülleridir.

2.1.9 Tanım M bir R -modül ve N , M 'nin altmodülü olsun.

$$M/N = \{m + N \mid m \in M\}$$

bölüm grubu,

$$\cdot : R \times M/N \rightarrow M/N$$

$$(a, m + N) \rightarrow a \cdot m + N$$

ile bir R -modüldür. Bu modüle, bölüm modülü denir.

2.1.10 Tanım $\varphi : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun.

$$Coker(\varphi) = N/Im\varphi$$

bölüm modülüne, φ 'nin eş çekirdeği (cokernel) denir.

2.1.11 Teorem R bir halka, M ve N , R -modüller,

$$\begin{aligned}\varphi : M &\rightarrow N \\ m &\rightarrow \varphi(m)\end{aligned}$$

bir R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda,

$$Im(\varphi) \cong M/Ker(\varphi).$$

İspat:

$$\begin{aligned}\lambda : M/Ker(\varphi) &\rightarrow Im(\varphi) \\ m + Ker(\varphi) &\rightarrow \lambda(m + Ker(\varphi)) := \varphi(m)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer,

$$\begin{aligned}m + Ker(\varphi) = m + Ker(\varphi) &\Rightarrow m - m \in Ker(\varphi) \\ &\Rightarrow \varphi(m - m) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(m) = \varphi(m).\end{aligned}$$

Dolayısıyla λ iyi tanımlıdır. λ 'nın tanımından örten olduğu açıktır.

Şimdi, $\lambda(m + Ker(\varphi)) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\varphi(m) = 0$ olur ve böylece $m \in Ker(\varphi)$ elde edilir. Dolayısıyla, $m + Ker(\varphi) = Ker(\varphi)$, yani, $M/Ker(\varphi)$ 'nin sıfır elemanına karşılık gelir. Böylece λ 'nın birebir olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak, $m_1, m_2 \in M$ için

$$\begin{aligned}\lambda((m_1 + Ker(\varphi)) + (m_2 + Ker(\varphi))) &= \varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2) \\ \lambda(a(m + Ker(\varphi))) &= \varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m)\end{aligned}$$

özellikleri sağlandığından R -modül homomorfizması olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, λ bir izomorfizmadır ve

$$Im(\varphi) \cong M/Ker(\varphi)$$

sonucu elde edilir.

2.1.12 Tanım R bir halka ve M_i , $\emptyset \neq I$ kümesi ile indekslenmiş R -modüller olsun.

$\bigoplus_{i \in I} M_i$ direkt toplamı,

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i \text{ ve sonlu sayıda } i \text{ için } m_i \neq 0\}$$

ve $\prod_{i \in I} M_i$ direkt çarpımı,

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $I = \{1, \dots, n\}$ sonlu bir indeks kümesi ise, direkt toplam ve direkt çarpım çakışır ve

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

ile gösterilir.

2.2 Serbest Modüller

Serbest modüller, tabanlarının açık biçimde seçilebilmesi nedeniyle modül teorisinin en anlaşılır yapılarından birini oluşturur. Her elemanın tek bir doğrusal kombinasyonla ifade edilebildiği bu modüller, homolojik inşalara doğal bir temel sağlamaları bakımından önemlidir. Serbest modüller, çözümlerin başlangıç noktasını oluşturdukları için homoloji cebirindeki pek çok yapının tanımlanmasında temel bir rol oynar.

2.2.1 Tanım M bir R -modül olsun. $r_i \in R$ olmak üzere

$$r_1 m_1 + \dots + r_k m_k$$

toplamına, $m_1, \dots, m_k \in M$ elemanlarının bir R -lineer bileşimi denir. M modülünün her elemanı, m_1, \dots, m_k elemanlarının bir lineer bileşimi ise, $\{m_1, \dots, m_k\}$ kümesine, M modülünün üreteç kümesi, $\{m_1, \dots, m_k\}$ elemanlarına da M modülünün üreteçleri denir.

Lineer bileşimler, lineer cebirdekine benzer olarak, bir modülün yeni elemanlarını, eski elemanlardan oluşturmanın temel yoludur.

2.2.2 Tanım M bir R -modül olsun. Eğer, $r_i \in R$, $1 \leq i \leq k$ için

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^k R \cdot m_i \\ &= r_1 m_1 + \dots + r_k m_k \end{aligned}$$

ise, M 'ye sonlu üretilmiş R -modül denir ve

$$M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle$$

şeklinde yazılır.

Çoğunlukla, sonlu sayıda üreteçleri olan modüller üzerinde durulacaktır. Fakat, sonsuz üreteç kümesine sahip önemli modüller de vardır. Bu nedenle sonsuz sayıda kümeye izin veren, üreteç kümesinin genel tanımını aşağıda verilmektedir.

2.2.3 Tanım M bir R -modül, I bir indeks kümesi olmak üzere, M 'nin $\{m_i\}_{i \in I}$ alt kümesini alalım. Her $m \in M$, sonlu sayıda i 'ler hariç, tüm i 'ler için $r_i = 0$ olmak üzere

$$m = \sum_{i \in I} r_i m_i$$

ise, bir başka deyişle, m_i elemanlarının sonlu bir R -lineer bileşimi ise, $\{m_i\}_{i \in I}$ kümesine M 'nin üreteç kümesi denir. Burada, m_i elemanlarının her lineer bileşiminin yalnızca sonlu sayıda sıfır olmayan katsayılarla sahip olması gerektiğine dikkat ediniz.

2.2.4 Tanım M bir R -modül ve $\{m_i\}_{i \in I}$, M 'nin bir alt kümesi olsun. $\forall i \in I$ için

$$\sum_{i \in I} r_i m_i = 0 \Rightarrow r_i = 0$$

oluyor ise, $\{m_i\}_{i \in I}$ R üzerinde lineer bağımsızdır denir. Eğer, bazı $i \in I$ için $r_i \neq 0$ oluyor ise $\{m_i\}_{i \in I}$ elemanlarına lineer bağımlıdır denir.

2.2.5 Tanım M bir R -modül ve $\{m_i\}_{i \in I}$, M 'nin bir alt kümesi olsun. $m_i \in M$, $r_i \in R$ olmak üzere

$$r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_k m_k$$

şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa, $\{m_1, \dots, m_k\}$ kümesine M modülünün tabanı denir.

Bir modülün tabanı, modülü üreten lineer bağımsız kümedir. Modüller her zaman bir tabana sahip olmayabilir.

2.2.6 Örnek F bir cisim olmak üzere, $R = F[x, y]$ polinom halkasında, $M = \langle x^2, y^2 \rangle$ idealini düşünelim. M ideali, $R = F[x, y]$ halkası üzerinde bir R -modüldür. $\{x^2, y^2\}$, M 'nin

üreteçleridir.

$$(y^2)x^2 + (-x^2)y^2 = 0$$

olduğundan $\{x^2, y^2\}$, R halkası üzerinde lineer bağımlıdır. Dolayısıyla, M modülü için bir taban olamaz.

2.2.7 Tanım F bir R -modül olsun. F modülünün bir tabanı varsa, F 'ye serbest modül, eğer F 'nin tabanı sonlu bir küme ise, F 'ye sonlu serbest modül denir.

2.2.8 Örnek R birimli ve değişmeli bir halka ve R^n , R halkasının n -kartezyen çarpımı olsun. Bu durumda,

$$R^n = \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in R\}$$

olarak yazabiliriz. R^n bir R -modüldür. R^n 'nin

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

altkümesini alalım. $r = (r_1, \dots, r_n) \in R^n$ olsun.

$$\begin{aligned} (r_1, \dots, r_n) &= r_1(1, 0, 0, \dots, 0) + r_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + r_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= r_1e_1 + r_2e_2 + \dots + r_ne_n \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

olarak yazılabilir. Böylece, $\{e_1, \dots, e_n\}$, R^n modülü için bir üreteç kümesidir.

$$r_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + r_n(0, 0, \dots, 1) = 0_{R^n} = (0, 0, \dots, 0)$$

olsun. Bu durumda,

$$(r_1, \dots, r_n) = (0, \dots, 0)$$

ve bu eşitlikten, her $i = 1, \dots, n$ için $r_i = 0$ olur. Bu, $\{e_1, \dots, e_n\}$, kümesinin lineer bağımsız olması demektir. $\{e_1, \dots, e_n\}$, hem lineer bağımsız bir küme ve hem de R^n 'yi ürettiği için, R^n modülünün bir (standart) tabanı olur. Böylece, R^n , bir sonlu serbest R -modüldür.

2.2.9 Uyarı R^n , R -modülünde, her $r = (r_1, \dots, r_n) \in R^n$ için, (2.2.1) eşitlikten

$$r = r_1 e_1 + \dots + r_n e_n$$

olarak yazılabildiğini biliyoruz.

$$r = [e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazılabildiğinden, $r \in R^n$ elemanı

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

ile temsil edilir.

2.2.10 Teorem F bir birimli R -modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i) F modülünün boş kümeden farklı bir tabanı vardır.
- (ii) $X \neq \emptyset$ kümesi ve $\iota : X \rightarrow F$ dönüşümü aşağıdaki özellik sağlanacak şekilde vardır: Verilen herhangi bir M birimli R -modülü ve $f : X \rightarrow M$ dönüşümü için $\tilde{f} \circ \iota = f$ olacak şekilde bir tek

$$\tilde{f} : F \rightarrow M$$

homomorfizması vardır. Bir başka ifadeyle,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{f} & \\ F & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

İspat: [3]

Bu teorem, bir serbest modülden, herhangi bir R -modül olan M 'ye dönüşümler tanımlamanın mümkün olduğunu söyler.

2.3 Sizigiler

Sizigiler, bir çözümüm içinde ortaya çıkan ve modül üzerindeki ilişkileri belirleyen temel yapılardır. Her sizigi, çözümümde yer alan bir homomorfizmanın çekirdeğini temsil eder ve bu

sayede modülün bağıntı yapısını daha açık biçimde görünür kılar. Çözülümün her adımında ortaya çıkan bu modüller, verilen modülün homolojik özelliklerinin anlaşılmasında önemli bir rol üstlenir.

2.3.1 Tanım R birimli, değişmeli, her ideali sonlu üretilmiş olan bir halka ve $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ bir R -modül olsun. Bu durumda, M 'nin sizigisi,

$$\begin{aligned} \text{Syz}(M) &= \left\{ \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \in R^n \mid [m_1, m_2, \dots, m_n] \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \in R^n \mid g_1 m_1 + g_2 m_2 \cdots + g_n m_n = 0 \right\} \end{aligned}$$

kümesidir. $\text{Syz}(M)$, R^n 'nin sonlu üretilmiş bir altmodülüdür. $\text{Syz}(M)$ modülüne 1.sizigi modülü de denir ve M 'nin üreteçlerinin seçimine bağlıdır. $\text{Syz}(M)$ modülünün üreteçlerini bulmak genelde oldukça zor bir problemdir.

2.3.2 Örnek $R = F[x, y]$ polinom halkasında $M = \langle x^2, y^2 \rangle$ modülünü alalım.

$$(y^2)x^2 + (-x^2)y^2 = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \text{Syz}(M) &= \{(g_1, g_2) \in R^2 \mid g_1 x^2 + g_2 y^2 = 0\} \\ &= \{(y^2, -x^2)\} \end{aligned}$$

kümesidir.

M ve $\text{Syz}(M)$ arasındaki ilişki, tam diziler kullanılarak kodlanabilir.

2.4 Tam Diziler

Tam diziler, ardışık homomorfizmalardan oluşan ve her homomorfizmanın görüntüsünün bir sonraki homomorfizmanın çekirdeğini veren dizilerdir. Bu yapı, modüller arasındaki ilişkilerin hassas biçimde analiz edilmesini sağlar.

X ve Y , herhangi iki cebirsel yapı (gruplar veya modüller) olmak üzere, bir

$$\phi : X \rightarrow Y$$

dönüşümü verildiğinde, bu iki farklı şekilde görülebilir. Bu dönüşümün en basit yorumu, ϕ dönüşümünün, X kümesinin bir elemanını kullanarak, Y kümesinde bir eleman oluşturmasıdır. Bu anlamda, $Im(\phi) \subseteq Y$, ϕ ile oluşturulan öğeleri temsil eder. Diğer bakış açısı ise, X kümesindeki her bir $x \in X$, Y 'deki bir $y \in Y$ 'ye, ϕ dönüşümü ile belirlenen kurallara göre ilişkilendirilir. Bu durumda,

$$\phi : X \rightarrow Y$$

dönüşümü, her $x \in X$ elemanına, bir $y = \phi(x) \in Y$ elemanı atar ve ϕ 'nin x elemanını, Y kümesindeki $0 \in Y$ elemanına gönderip gönderilmediğine bakılır.

$$Ker(\phi) = \{x \in X \mid \phi(x) = 0_y\}$$

kümesi olduğu düşünüldüğünde, $Ker(\phi)$, aslında ϕ dönüşümü ile test edilen elemanların başarısız olanlarının kümesi olarak yorumlanır.

2.4.1 Örnek

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\rightarrow 2n \end{aligned}$$

dönüşümü, tam sayılardan, çift tamsayıları inşa eder.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ n &\rightarrow [n] \end{aligned}$$

dönüşümü, bir tam sayının, 2 ile bölünüp bölünmediğini görmek için bir test olarak yorumlanabilir.

2.4.2 Örnek

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\rightarrow 6n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_3 \\ n &\rightarrow [n] \end{aligned}$$

dönüşümlerini alalım. Burada,

$$Im(\psi) = \{\psi(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$Ker(\phi) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \phi(n) = 0_{\mathbb{Z}_3}\}$$

$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid [n] = [0]\}$$

$$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{3}\}$$

kümeleri kolayca bulunabilir.

$$x \in Im(\psi) \Rightarrow x = 6n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 3(2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow x \in Ker(\phi)$$

olur. Ancak, 9 tamsayısı,

$$9 \equiv 0 \pmod{3}$$

olmasından, $9 \in Ker(\phi)$ olur. Fakat, 9 tamsayısı 6 tamsayısının bir katı olmadığı için $9 \notin Im(\psi)$. Böylece,

$$Im(\psi) \subsetneq Ker(\phi)$$

olur. Bu, 3 tamsayısının katlarına yönelik

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_3$$

inşasının başarısız olduğunu söyler.

Kusurlu ψ dönüşümlerinin inşasının olasılığına izin vermesinden dolayı, $Im(\psi) \subseteq Ker(\phi)$ koşulunu sağlayan dizilerle ilgilenilir.

2.4.3 Örnek

$$0 \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{g} 0$$

dizisini düşünelim. Burada,

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} & , & \phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ n \rightarrow 6n & & n \rightarrow [n] \end{array}$$

dönüşümleri, f gömme dönüşümü ve g sıfır dönüşümüdür. $Im(f) = \{0\}$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} Ker(\psi) &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \psi(n) = 0\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid 6n = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

olduğundan $Im(f) = Ker(\psi)$ bulunur.

$$\begin{aligned} Im(\psi) &= \{\psi(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ Ker(\phi) &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \phi(n) = 0_{\mathbb{Z}_2}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid [n] = [0]\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{2}\} \\ &= \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

kümeleridir. Buradan $Im(\psi) \subset Ker(\psi)$ sağlanır.

$$\begin{aligned} Im(\phi) &= \{\phi(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{[n] \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{[0], [1]\}, \\ Ker(g) &= \{[n] \in \mathbb{Z} \mid g([n]) = 0\} \\ &= \{[0], [1]\} \end{aligned}$$

olur. Bu, $Im(\phi) = Ker(g)$ olması demektir. Böylece, bu dizi, ilgilendiğimiz şekildedir.

2.4.4 Tanım R bir halka olsun. M_k 'ler R -modül ve φ_k 'ler de R -modül homomorfizması olmak üzere

$$\cdots \rightarrow M_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} M_k \xrightarrow{\varphi_k} M_{k-1} \rightarrow \cdots$$

dizisi

- $Im(\varphi_{k+1}) \subset Ker(\varphi_k)$ koşulunu sağlıyorsa her M_k üzerinde komplekstir,
- $Im(\varphi_{k+1}) = Ker(\varphi_k)$ koşulunu sağlıyorsa her M_k üzerinde tamdır

denir. Eğer dizi her i için M_i üzerinde tam ise diziye tam dizi denir.

2.4.5 Örnek M ve M' , R -modüller olsun.

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \text{ dizisi tamdır} \Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = 0.$$

Dolayısıyla φ , birebirdir.

$$M' \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0 \text{ dizisi tamdır} \Leftrightarrow \text{Im}(\psi) = \text{Ker}(0) = M$$

Böylece ψ , örten olur.

2.4.6 Örnek M , M' ve M'' birer R -modül olsun.

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow{\psi} M'' \rightarrow 0 \text{ tam dizidir.} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ker}(\varphi) = \{0\} \\ \text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) \\ \text{Im}(\psi) = M'' \end{cases}$$

2.4.7 Tanım M , M' ve M'' birer R -modül olmak üzere,

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow{\psi} M'' \rightarrow 0$$

tam dizisine, kısa tam dizi denir.

2.4.8 Sonuç M ve $\text{Syz}(M)$ arasındaki ilişki şu şekilde kurulur;

$M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ sonlu üretilmiş R -modül, $\text{Syz}(M)$, M 'nin sizigi modülü ve R^n serbest modülünün $\{e_1, \dots, e_n\}$ standart tabanı olmak üzere,

$$0 \rightarrow \text{Syz}(M) \xrightarrow{\subseteq} R^n \xrightarrow{\tau} M \rightarrow 0$$

$$e_i \rightarrow m_i$$

formunda kısa tam dizisi vardır. τ , bir R -modül homomorfizması ve $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ sonlu üretilmiş olduğundan, τ örtendir.

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\tau) &= \left\{ \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \in R^n \mid \tau(g_1, \dots, g_n) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \in R^n \mid \tau(g_1 e_1 + \dots + g_n e_n) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \in R^n \mid g_1 \tau(e_1) + \dots + g_n \tau(e_n) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \in R^n \mid g_1 m_1 + \dots + g_n m_n = 0 \right\} = \text{Syz}(M)
\end{aligned}$$

böylece dizi tamdır.

Bir modülün üreteçlerinden gerekli bilgi alınmadığında, bu üreteçlerin arasındaki bağıntılar analiz edilir. Tüm bu bağıntıların kümesi de yine bir sonlu üretilmiş R -modüldür. Böylece, bir dizi elde edilir. Yine, 1. sizigi modülü adı verilen bu sonlu üretilmiş olan bağıntılar modülünün de üreteçlerinin arasında bağıntılar kümesi vardır. Bu sürecin zincirleme bir şekilde devam etmesiyle, nihayetinde bir (serbest) çözüm elde edilir.

2.5 Serbest Çözümler

Bir çözüm, verilen bir modülün uygun bir kompleks içine yerleştirilmesiyle elde edilir. Bu kompleks, modülün homolojik davranışını açıklamak için kullanılır.

Bu bölümde, önceki kısımlarda inşa edilen sizigi ve tam dizi kavramları birleştirilerek, serbest çözümlerin yapısı incelenecektir.

2.5.1 Tanım M sonlu üretilmiş bir R -modül ve $i \geq 0$ için F_i sonlu üretilmiş serbest modüller olsun.

$$\dots \rightarrow F_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} F_k \xrightarrow{\varphi_k} \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

tam dizisine M modülünün bir serbest çözümü denir. Eğer $\forall k > n$ için $F_k = 0$ ve n bu özellikte minimal sayı ise, serbest çözüm, sonlu uzunluktadır denir.

Bir M , R -modülünün her zaman sonlu bir serbest çözümü var mıdır? Genellikle bu cevap olumlu değildir. Ancak polinom halkalarında cevap olumludur.

2.5.2 Teorem $R = F[x_1, \dots, x_n]$, n bilinmeyenli polinom halkası olsun. Her sonlu üretilmiş R -modül, uzunluğu en fazla n olan bir sonlu serbest çözüme sahiptir.

İspat: [2]

2.5.3 Örnek $A = \mathbb{Z}$ ve $M = \langle x, y \rangle \subseteq \mathbb{Z}[x, y]$ ve $2x - y = 0$ bağıntısı ile verilen $\mathbb{Z}[x, y]$ -modül olsun. $a, b \in \mathbb{Z}[x, y]$ için,

$$\begin{aligned} \tau : (\mathbb{Z}[x, y])^2 &\rightarrow M \\ (a, b) &\rightarrow ax + by \end{aligned}$$

dönüşümü bir \mathbb{Z} -modül homomorfizmasıdır.

$$\begin{aligned} \text{Im}(\tau) &= \{\tau(a, b) \mid (a, b) \in (\mathbb{Z}[x, y])^2\} \\ &= \{ax + by \mid (a, b) \in (\mathbb{Z}[x, y])^2\} \\ &= \langle x, y \rangle = M. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, τ örtendir.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\tau) &= \{(a, b) \mid \tau(a, b) = 0\} \\ &= \{(a, b) \mid ax + by = 0\} \\ &= \{(a, b) \mid ax = -by\} \\ &= \{(a, b) \mid ax = -b(2x)\} \\ &= \{(a, b) \mid a = -2b\} \\ &= \{b(-2, 1) \mid b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \text{Syz}(M). \end{aligned}$$

Böylece,

$$0 \rightarrow \text{Syz}(M) \xrightarrow{\subseteq} (\mathbb{Z}[x, y])^2 \xrightarrow{\tau} M \rightarrow 0$$

serbest çözümü elde edilmiş olur.

3. TENSÖR ÇARPIMLAR

Tensör çarpımlar, fizik, mühendislik gibi birçok uygulama alanında kullanılmaktadırlar. 1884 yılında Gibbs [6], \mathbb{R}^3 'deki vektörlerin tensör çarpımını tanıtmıştır ve daha sonra 1886 yılında bunu \mathbb{R}^n 'e genişletmiştir. \otimes notasyonunu, 1936 yılında Murray ve Von Neumann [7], Hilbert uzayların tensör çarpımlarında kullanmışlardır. A ve B , değişmeli gruplar olmak üzere, A ve B 'nin tensör çarpımı, Whitney'e [8] aittir fakat $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ yerine $A \circ B$ yazmıştır. Bir değişmeli halka üzerindeki modüllerin tensör çarpımı da 1948 yılında Bourbaki [9] tarafından verilmiştir.

Tensör çarpımlar, ilk olarak vektör uzaylar için ortaya çıkmıştır. Bu sebeple, vektör uzayların tensör çarpımlarını açıklamakla başlanacaktır. Bu bölümde [4], [10] temel kaynak olarak kullanılmıştır.

3.1 Vektör Uzayların Tensör Çarpımı

3.1.1 Tanım F bir cisim ve U, V, W, F cismi üzerinde vektör uzaylar olsun.

$$f : U \times V \rightarrow W$$

dönüşümü, $a, b \in F$, $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ için,

(i) $f(au_1 + bu_2, v) = af(u_1, v) + bf(u_2, v)$

(ii) $f(u, av_1 + bv_2) = af(u, v_1) + bf(u, v_2)$

koşullarını sağlıyorsa f 'ye bilinear dönüşüm denir.

3.1.2 Örnek F cismi üzerinde,

$$F^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in F, i = 1, \dots, n\}$$

vektör uzayını alalım.

$$f : F^n \times F^n \rightarrow F$$

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \rightarrow x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

dönüşümü,

(i) $a, b \in F$, $u_1 = (x_1, \dots, x_n), u_2 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in F^n$, $v = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$ için

$$\begin{aligned}
f(au_1 + bu_2, v) &= f(a(x_1, \dots, x_n) + b(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), (y_1, \dots, y_n)) \\
&= f((ax_1 + b\bar{x}_1, \dots, ax_n + b\bar{x}_n), (y_1, \dots, y_n)) \\
&= (ax_1 + b\bar{x}_1)y_1 + \dots + (ax_n + b\bar{x}_n)y_n \\
&= (ax_1y_1 + b\bar{x}_1y_1) + \dots + (ax_ny_n + b\bar{x}_ny_n) \\
&= (ax_1y_1 + \dots + ax_ny_n) + (b\bar{x}_1y_1 + \dots + b\bar{x}_ny_n) \\
&= a(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) + b(\bar{x}_1y_1 + \dots + \bar{x}_ny_n) \\
&= af((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) + bf((\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), (y_1, \dots, y_n)) \\
&= af(u_1, v) + bf(u_2, v)
\end{aligned}$$

(ii) $a, b \in F$, $u_1 = (x_1, \dots, x_n) \in F^n$, $v_1 = (y_1, \dots, y_n), v_2 = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in F^n$ için

$$\begin{aligned}
f(u, av_1 + bv_2) &= f((x_1, \dots, x_n), a(y_1, \dots, y_n) + b(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)) \\
&= f((x_1, \dots, x_n), (ay_1 + b\bar{y}_1, \dots, ay_n + b\bar{y}_n)) \\
&= x_1(ay_1 + b\bar{y}_1) + \dots + x_n(ay_n + b\bar{y}_n) \\
&= (ax_1y_1 + bx_1\bar{y}_1) + \dots + (ax_ny_n + bx_n\bar{y}_n) \\
&= (ax_1y_1 + \dots + ax_ny_n) + (bx_1\bar{y}_1 + \dots + bx_n\bar{y}_n) \\
&= a(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) + b(x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n) \\
&= af((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) + bf((x_1, \dots, x_n), (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)) \\
&= af(u, v_1) + bf(u, v_2)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından Tanım 3.1.1'den f , F cismi üzerinde bir bilineer dönüşümdür.

3.1.3 Uyarı U, V, W, F cismi üzerinde vektör uzaylar olsun.

$$BiLin(U, V; W) = \{f : U \times V \rightarrow W \mid f \text{ bilineer dönüşüm}\}$$

kümesi, $U \times V \rightarrow W$ tanımlanan üzerinde tüm bilineer dönüşümlerin kümesi olsun. Bu küme, toplama ve bir skaler ile çarpma işlemleri ile F cismi üzerinde bir vektör uzaydır.

3.1.4 Tanım V_1 ve V_2 , F cismi üzerinde iki vektör uzay olsun. Y, F cismi üzerinde bir vektör uzay ve $\mu : V_1 \times V_2 \rightarrow F$ bir bilineer dönüşüm olmak üzere, eğer β_1, V_1 vektör uzayı

için ve β_2, V_2 için F üzerinde bir taban iken

$$\mu (\beta_1 \times \beta_2) = \{ \mu (x_1, x_2) \mid x_1 \in \beta_1, x_2 \in \beta_2 \}$$

kümesi, Y vektör uzayı için bir taban oluyor ise, (Y, μ) ikilisine, V_1 ve V_2 vektör uzaylarının tensör çarpımı denir. Y vektör uzayı için $V_1 \otimes V_2$ ve $\mu(x_1, x_2)$ için $x_1 \otimes x_2$ yazılır.

V ve W, F cismi üzerinde vektör uzaylar olsun. Tensör çarpımları çalışmanın iki yolu vardır. Bu yöntemlerden ilki $V \otimes W$ uzayını elemanları ile birlikte düşündürmektir. $V \otimes W$ 'nin elemanları, $a_i \in F, v_i \in V$ ve $w_i \in W$ olmak üzere

$$\sum_i a_i v_i \otimes w_i$$

formundadır. Diğer yöntem ise, $V_1 \otimes V_2$ uzayını ve $V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$ dönüşümünü bilinen bir obje ile özdeşleştirmektir. Böyle bir tanımlamanın doğal olarak yapılabileceği pek çok örnek vardır. Bunu yaparken sadece $V_1 \otimes V_2$ olarak tanımlanan vektör uzayını değil, aynı zamanda bu tanımlamayı yapmak için kullanılan çarpımı da (bilineer dönüşümü) belirtmek önemlidir.

3.1.5 Örnek F bir cisim ve tek değişkenli ve katsayıları F 'de olan

$$F[x] = \{ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n \geq 0, a_i \in F \}$$

polinom halkasını alalım. $F[x]$, toplama ve bir skaler ile çarpma işlemlerine göre F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$\mu : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$$

$$(f(x), g(x)) \rightarrow \mu(f(x), g(x)) = f(x) \otimes g(x) = f(x)g(x)$$

olarak tanımlanan μ dönüşümü bilineerdir.

$\beta = \{1, x, x^2, \dots\}$, $F[x]$ vektör uzayının bir tabanı ve

$$\begin{aligned} \mu (\beta \times \beta) &= \beta \otimes \beta = \{ \mu(x_1, x_2) \mid x_1 \in \beta, x_2 \in \beta \} \\ &= \{ x^i \otimes x^j \mid i, j = 0, 1, 2, \dots \} \\ &= \{ x_1^i x_2^j \mid i, j = 0, 1, 2, \dots \} \end{aligned}$$

olduğundan, $\beta \otimes \beta, F[x_1, x_2]$ iki değişkenli polinom uzayı için bir tabandır.

3.2 Modüllerin Tensör Çarpımı

Modüller için tensör çarpım, vektör uzaylardaki gibi tanımlanabilir. Ancak, \otimes çarpımının sağlaması gereken özellikler, modüller her zaman bir tabana sahip olmadıkları için, sadece belli bir tabanda değil genel olarak ortaya konulmalıdır.

3.2.1 Tanım R birimli ve değişmeli bir halka ve M , $\forall m \in M$ için $1_R \cdot m = m$ özelliği olan bir R -modül olsun. M, N ve X , R -modüller olmak üzere

$$B : M \times N \rightarrow X$$

dönüşümü eğer, $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$ için

$$B(m + m', n) = B(m, n) + B(m', n)$$

$$B(rm, n) = rB(m, n)$$

$$B(m, n + n') = B(m, n) + B(m, n')$$

$$B(m, rn) = rB(m, n)$$

özelliklerini sağlıyor ise B 'ye R -bilineer dönüşüm denir.

3.2.2 Örnek M bir R -modül olsun.

$$B : R \times M \rightarrow M$$
$$(r, m) \rightarrow r \cdot m$$

dönüşümünün bilineer olduğunu gösterelim. $r_1, r_2 \in R, m, m' \in M, r \in R$ alalım. M 'nin bir R -modül olduğu göz önüne alınırsa,

$$B(r_1 + r_2, m) = (r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m = B(r_1, m) + B(r_2, m)$$

$$B(r \cdot r_1, m) = (r \cdot r_1)m = r(r_1 \cdot m) = r \cdot B(r_1, m)$$

$$B(r, m + m') = r(m + m') = rm + rm' = B(r, m) + B(r, m')$$

$$B(r_1, r \cdot m) = r_1(r \cdot m) = (r_1 \cdot r)m = (r \cdot r_1)m = r(r_1 \cdot m) = rB(r_1, m)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, Tanım 3.2.1'den, B bir bilineer dönüşümdür.

3.2.3 Örnek M bir R -modül ve $m_1, m'_1 \in M$ olmak üzere

$$T : M \times M \rightarrow M$$
$$(m, m') \rightarrow m + m'$$

dönüşümünü alalım. $m_1, m_2, m'_1, m'_2 \in M$ için,

$$\begin{aligned} T((m_1, m'_1) + (m_2, m'_2)) &= T(m_1 + m_2, m'_1 + m'_2) \\ &= (m_1 + m_2) + (m'_1 + m'_2) \\ &= (m_1 + m'_1) + (m_2 + m'_2) \\ &= T(m_1, m'_1) + T(m_2, m'_2) \end{aligned}$$

ve $r \in R$, $m, m' \in M$ için,

$$\begin{aligned} T(r(m, m')) &= T(rm, rm') \\ &= rm + rm' \\ &= r(m + m') \\ &= r.T(m, m') \end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü lineerdir. $m_1, m_2, m' \in M$ olmak üzere, T 'nin tanımından

$$T(m_1 + m_2, m') = (m_1 + m_2) + m'$$

yazılır. Ancak,

$$T(m_1, m') + T(m_2, m') = (m_1 + m') + (m_2, m')$$

eşitliğinden,

$$T(m_1 + m_2, m') \neq T(m_1 + m') + T(m_2, m')$$

elde edilir. Bu, T dönüşümünün bilinear olamayacağı anlamına gelir.

Serbest modüllerinkine benzer olarak, modüllerin tensör çarpımları da tanımlanabilir.

3.2.4 Tanım M, N ve X , R -modüller olsun. Her,

$$\varphi : M \times N \rightarrow X$$

R -bilineer dönüşümü için

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R N & & \\ \uparrow \tau & \searrow \phi & \\ M \times N & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

diyagramında,

$$\varphi : \phi \circ \tau$$

olacak şekilde bir tek

$$\phi : M \otimes_R N \rightarrow X$$

lineer dönüşümü var ise,

$$\tau : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$$

R -bilineer dönüşümü ile birlikte $M \otimes_R N$ ile gösterilen R -modüle, M ve N modüllerinin tensör çarpımı denir. Alışılmış notasyonda, τ gibi bir sembol kullanılmaz. Bunun yerine, $m \times n$ 'nin τ altındaki görüntüsü

$$\tau(m \times n) = m \otimes n$$

ile gösterilir.

3.2.5 Örnek $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_7$ tensör çarpımını inceleyelim. $\forall m \in \mathbb{Z}_5, n \in \mathbb{Z}_7$ için

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (m \otimes n) = (0 \cdot m) \otimes n \\ &= (5 \cdot m) \otimes n = m \otimes 5n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (m \otimes n) = m \otimes (0 \cdot n) \\ &= m \otimes (7 \cdot n) \\ &= 7m \otimes n = 2m \otimes n \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} (5m \otimes n) - 2(2m \otimes n) &= (5 - 2 \cdot 2)m \otimes n \\ &= m \otimes n \end{aligned}$$

olur. Fakat,

$$(5m \otimes n) - 2(2m \otimes n) = 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

olur. Bu, $m \otimes n = 0$ demektir. Böylece, $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_7$ 'nin tüm tensörleri 0'dır. Bu, $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_7 = 0$ anlamına gelir.

3.3 Tensör Çarpımların İnşası

Şimdi, M ve N modüllerinin tensör çarpımı olarak adlandırılan ve bir R -modül olan T modülü oluşturulacaktır. Bu modül,

$$T = M \otimes_R N = M \otimes N$$

ile gösterilecek, $M \times N$ 'yi kapsayacak ve

$$M \times N \rightarrow X$$

olan R -bilineer dönüşümü

$$T \rightarrow X$$

R -modül homomorfizmasına karşılık gelecek şekilde inşa edilecektir.

3.3.1 Teorem M, N ve X , R -modüller olsun. T bir R -modül ve her $f : M \times N \rightarrow X$ bilinear dönüşümü için

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ f \downarrow & \swarrow f' & \\ X & & \end{array}$$

diyagramında $f = f' \circ g$ ve bir tek $f' : T \rightarrow X$ dönüşümü R -modül homomorfizması olacak şekilde (T, g) ikilisi vardır. Üstelik, eğer bu özellikte, (T, g) ve (T', g') ikilileri var ise, bu durumda,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ g' \downarrow & \swarrow j & \\ T' & & \end{array}$$

diyagramında $g' = j \circ g$ olan bir tek $j : T \rightarrow T'$ izomorfizması vardır.

İspat: İlk olarak (T, g) 'nin varlığını görelim:

$$\begin{aligned} C &= R^{(M \times N)} \\ &= \{ \text{Katsayılar } R \text{ halkasından olacak şekilde } M \times N \text{'nin elemanlarının lineer bileşimleri} \} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot (x_i, y_i) \mid n \geq 0, a_i \in R, x_i \in M, y_i \in N, \forall i \right\} \end{aligned}$$

kümesini alalım. D, C 'nin, $x, x' \in M$, $y, y' \in N$, $a \in R$ iken

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$$

$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$$

$$(ax, y) - a \cdot (x, y)$$

$$(x, ay) - a \cdot (x, y)$$

formundaki elemanları ile üretilen bir altmodülü olsun.

$T = C/D$ alalım. $x \in M$ ve $y \in N$ için, g dönüşümü,

$$g : M \times N \rightarrow T$$

$$(x, y) \rightarrow g(x, y) = x \otimes y = (x, y) + D$$

olarak tanımlansın. g dönüşümü, $C \rightarrow C/D$ olan dönüşümün doğal bir kısıtlamasıdır. Şimdi,

g dönüşümünün bilinear olduğunu görelim. $x, x' \in M$, $y \in N$, $a, b \in R$ için

$$\begin{aligned} g(ax + bx', y) &= (ax + bx', y) + D \\ &= (ax + bx', y) - [(ax + bx', y) - (ax, y) - (bx', y)] + D \\ &= (ax, y) + (bx', y) + D \\ &= (ax, y) + (bx', y) - [(ax, y) - a \cdot (x, y) + (bx', y) - b \cdot (x', y)] + D \\ &= (ax, y) - [(ax, y) - a \cdot (x, y)] + (bx', y) - [(bx', y) - b \cdot (x', y)] + D \\ &= a \cdot (x, y) + b \cdot (x', y) + D \\ &= (a \cdot (x, y) + D) + (b \cdot (x', y) + D) \\ &= a \cdot ((x, y) + D) + b \cdot ((x', y) + D) \\ &= a \cdot g(x, y) + b \cdot g(x', y) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $x \in M$, $y, y' \in N$ ve $a, b \in R$ için

$$g(x, ay + by') = a \cdot g(x, y) + b \cdot g(x, y')$$

olduğu gösterilebilir. Böylece, g dönüşümü R -bilineer olur.

$$f : M \times N \rightarrow X$$

bir R -bilineer dönüşüm olsun.

$$\begin{aligned} \bar{f} : C &\rightarrow X \\ \sum_{i=1}^n a_i \cdot (x_i, y_i) &\rightarrow \sum_{i=1}^n a_i f(x_i, y_i) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. \bar{f} bir R -modül homomorfizmasıdır. $x, x' \in M$, $y, y' \in N$, $a \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}\bar{f}((x + x', y) - (x, y) - (x', y)) &= f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y) \\ &= f(x, y) + f(x', y) - f(x, y) - f(x', y) = 0\end{aligned}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\bar{f}((x, y + y') - (x, y) - (x, y')) &= f(x, y + y') - f(x, y) - f(x, y') \\ &= f(x, y) + f(x, y') - f(x, y) - f(x, y') \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{f}((x, ay) - a \cdot (x, y)) &= f(x, ay) - af(x, y) \\ &= af(x, y) - af(x, y) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, \bar{f} , D üzerinde sıfırlanır. Dolayısıyla, \bar{f} homomorfizması,

$$\begin{aligned}f' : T = C/D &\rightarrow X \\ \alpha + D &\rightarrow \bar{f}(\alpha)\end{aligned}$$

ile tanımlı bir R -modül homomorfizması oluşturur. Buradan,

$$\begin{array}{ccc}M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ f \downarrow & \swarrow f' & \\ X & & \end{array}$$

elde edilir. Bu diyagramda, her $x \in M$, $y \in N$ için

$$\begin{aligned}(f' \circ g)(x, y) &= f'(g(x, y)) \\ &= f'((x, y) + D) \\ &= \bar{f}(x, y) \\ &= f(x, y)\end{aligned}$$

olduğundan, $f' \circ g = f$ yazılır. Üstelik, f' , bu özelliklere sahip tek homomorfizmadır.

Şimdi (T, g) 'nin tekliliğini görelim: (T', g') 'nin verilen özelliğe sahip bir başka ikili olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\begin{array}{ccc}M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ & \searrow g' & \\ & & T'\end{array}$$

yazılır. (T, g) ve (T', g') için olan özelliklerden, aşağıdaki diyagramlarda,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ & \searrow g' & \downarrow j \\ & & T' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ & \searrow g' & \uparrow j' \\ & & T' \end{array}$$

$$g' = j \circ g \qquad g = j' \circ g'$$

olacak şekilde bir tek j ve j' dönüşümleri vardır. Böylece,

$$g = j' \circ g' = j' \circ (j \circ g) = (j' \circ j) \circ g$$

olur. Buradan,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ & \searrow g' & \downarrow j' \circ j \\ & & T \end{array}$$

elde edilir. $I_T : T \rightarrow T$ birim homomorfizması olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ & \searrow g' & \downarrow I_T \\ & & T \end{array}$$

olmasından, $j' \circ j = I_T$ yazılır. Benzer şekilde $j \circ j' = I_T$ elde edilebilir. Bu, j homomorfizmasının birebir ve örten olduğu anlamına gelir. Böylece j bir izomorfizma olur.

3.4 Multilineer Dönüşümler ve Tensör Çarpımlar

Multilineer dönüşümler, birden fazla değişken üzerinde, lineerlik şartlarını aynı anda sağlayan fonksiyonlardır. Bu tür dönüşümler, çoklu modül etkileşimlerini tek bir yapıda incelemeye imkan verir ve tensör çarpımın evrensel özelliği ile yakından ilişkilidir.

3.4.1 Tanım M_1, \dots, M_k ve M, R -modüller olsun.

$$f : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k \rightarrow M$$

dönüşümü, eğer her $m_i \in M_i$ için R -lineer oluyor ise f 'ye multilineer veya k -multilineer dönüşüm denir. Bir başka ifadeyle, f , k -multilineer dönüşüm ise,

$$\forall i = 1, \dots, k, \quad m_i, m'_i \in M_i \quad \text{ve} \quad a, b \in R \quad \text{için,}$$

$$f(m_1, \dots, m_{i-1}, am_i + bm'_i, \dots, m_k) = af(m_1, \dots, m_i, \dots, m_k) + bf(m_1, \dots, m'_i, \dots, m_k)$$

eşitliği sağlanır.

3.4.2 Uyarı M_1, M_2 ve M , R -modüller olmak üzere

$$f : M_1 \times M_2 \rightarrow M$$

2-multilineer dönüşümü aynı zamanda bir bilineer dönüşümdür.

3.4.3 Teorem M_1, \dots, M_k ve X , R -modüller olsun. T bir R -modül ve $f : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow X$ multilineer dönüşümü için

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \dots \times M_k & \xrightarrow{g} & T \\ f \downarrow & \swarrow f' & \\ X & & \end{array}$$

diyagramında $f = f' \circ g$ ve bir tek $f' : T \rightarrow X$ dönüşümü, R -modül homomorfizması olacak şekilde (T, g) ikilisi vardır. Üstelik, eğer bu özellikte, (T, g) ve (T', g') ikilileri var ise, bu durumda

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \dots \times M_k & \xrightarrow{g} & T \\ g' \downarrow & \swarrow j & \\ T' & & \end{array}$$

diyagramında $g' = j \circ g$ olan bir tek $j : T \rightarrow T'$ izomorfizması vardır.

İspat: [4]

C ve D kümeleri Teorem 3.3.1'deki gibi olmak üzere Teorem 3.6.3'deki özellikler sağlanacak şekilde

$$m_1 \otimes \dots \otimes m_k = (m_1, \dots, m_k) + D$$

elemanları ile üretilen

$$T = M \otimes \dots \otimes M_k$$

tensör çarpımı, Teorem 3.3.1'in ispatındakine benzer olarak elde edilebilir.

3.4.4 Örnek M, N, P, Q ve T , R -modüller ve

$$f : M \times N \rightarrow P \quad , \quad g : P \times Q \rightarrow T$$

dönüşümleri bilineer dönüşümler ise,

$$\begin{aligned} h : M \times N \times Q &\rightarrow T \\ (m, n, q) &\rightarrow g(f(m, n), q) \end{aligned}$$

dönüşümü 3-lineer dönüşümdür: $a, b \in R$, $m_1, m_2 \in M$ alalım.

$$\begin{aligned}
h(am_1 + bm_2, n, q) &= g(f(am_1 + bm_2, n), q) \\
&= g(af(m_1, n) + bf(m_2, n), q) \\
&= ag(f(m_1, n), q) + bg(f(m_2, n), q) \\
&= ah(m_1, n, q) + bh(m_2, n, q)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, $n_1, n_2 \in N$ ve $q_1, q_2 \in Q$ için

$$\begin{aligned}
h(rn, an_1 + bn_2, q) &= ah(m, n_1, q) + bh(m, n_2, q) \\
h(m, n, aq_1 + bq_2) &= ah(m, n, q_1) + bh(m, n, q_2)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, h dönüşümü 3-lineer olur.

3.5 Homomorfizmaların Tensör Çarpımı

R değışmeli ve birimli bir halka, M, M', N, N', R -modüller ve

$$f : M \rightarrow M' \quad \text{ve} \quad g : N \rightarrow N'$$

R -modül homomorfizmaları olsun.

$$f \otimes g : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$$

homomorfizmasını oluşturalım.

$$\begin{aligned}
h : M \times N &\rightarrow M' \otimes N' \\
(x, y) &\rightarrow h(x, y) = f(x) \otimes g(y)
\end{aligned}$$

dönüşümünü alalım. $a, b \in R$, $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
h(ax_1 + bx_2, y) &= f(ax_1 + bx_2) \otimes g(y) \\
&= (af(x_1) + bf(x_2)) \otimes g(y) \\
&= a(f(x_1) \otimes g(y)) + b(f(x_2) \otimes g(y)) \\
&= ah(x_1, y) + bh(x_2, y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
h(x, ay_1 + by_2) &= f(x) \otimes g(ay_1 + by_2) \\
&= f(x) \otimes (ag(y_1) + bg(y_2)) \\
&= a(f(x) \otimes g(y_1)) + b(f(x) \otimes g(y_2)) \\
&= ah(x, y_1) + bh(x, y_2)
\end{aligned}$$

olduğundan, h , bilineer bir dönüşümdür. Böylece,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & M \otimes N \\ h \downarrow & \swarrow f \otimes g & \\ M' \otimes N' & & \end{array}$$

diyagramında $(f \otimes g) \circ \phi = h$ olacak şekilde bir tek $f \otimes g$ homomorfizması vardır. Burada,

$$\begin{aligned} f \otimes g : M \otimes N &\rightarrow M' \otimes N' \\ x \otimes y &\rightarrow (f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \end{aligned}$$

olur.

3.6 Tensör Çarpımlar ve Tam Diziler

Modüllerin ve modül homomorfizmalarının tensör çarpımları alınabildiği için, tensörleri kullanarak verilen tam dizilerden yeni tam diziler oluşturulabilir. İlk olarak, tensör çarpımlar ile modül homomorfizmaları arasındaki ilişki gösterilecektir.

3.6.1 Teorem M, N ve P, R -modüller ve

$$Hom_R(N, P) = \{\varphi \mid \varphi : N \rightarrow P, R\text{-modül homomorfizması}\}$$

olsun. Bu durumda,

$$Hom_R(M \otimes N, P) \cong Hom(M, Hom(N, P)).$$

İspat:

$$\phi : Hom(M \otimes N, P) \rightarrow Hom(M, Hom(N, P))$$

dönüşümü, her $f \in Hom(M \otimes N, P)$ için, $x \in M, y \in N$ iken

$\phi(f) \in Hom(M, Hom(N, P))$ olmak üzere,

$$[\phi(f)(x)](y) = f(x \otimes y)$$

olarak tanımlansın. İlk olarak, $\phi(f)(x) \in Hom(N, P)$ olduğunu gösterelim. $y_1, y_2 \in N$ için

$$\begin{aligned} [\phi(f)(x)](y_1 + y_2) &= f(x \otimes (y_1 + y_2)) \\ &= f((x \otimes y_1) + (x \otimes y_2)) \\ &= f(x \otimes y_1) + f(x \otimes y_2) \\ &= [\phi(f)(x)](y_1) + [\phi(f)(x)](y_2) \end{aligned}$$

elde edilir. $a \in R$ ve $y \in N$ için

$$\begin{aligned} [\phi(f)(x)](ay) &= f(x \otimes ay) \\ &= af(x \otimes y) \\ &= a[\phi(f)(x)](y) \end{aligned}$$

olur. $\phi(f) \in \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$ olduğunu görmeye çalışalım. $x_1, x_2 \in M, y \in N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [\phi(f)(x_1 + x_2)](y) &= f((x_1 + x_2) \otimes y) \\ &= f((x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y)) \\ &= f(x_1 \otimes y) + f(x_2 \otimes y) \\ &= ([\phi(f)(x_1)] + [\phi(f)(x_2)])(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi,

$$\begin{aligned} \phi : \text{Hom}(M \otimes N, P) &\rightarrow \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P)) \\ f &\rightarrow [\phi(f)(x)](y) = f(x \otimes y) \end{aligned}$$

dönüşümünün bir izomorfizma olduğunu gösterelim. Öncelikle, ϕ bir modül homomorfizması olmalıdır.

$f_1, f_2 \in \text{Hom}(M \otimes N, P)$ için, $x \in M, y \in N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [\phi(f)(x_1 + x_2)](y) &= (f_1 + f_2)(x \otimes y) \\ &= f_1(x \otimes y) + f_2(x \otimes y) \\ &= [\phi(f_1)(x)](y) + [\phi(f_2)(x)](y) \end{aligned}$$

ve $a \in R, f \in \text{Hom}(M \otimes N, P), x \in M, y \in N$ için

$$\begin{aligned} [\phi(af)(x)](y) &= (af)(x \otimes y) \\ &= af(x \otimes y) \\ &= a[\phi(f)(x)](y) \end{aligned}$$

eşitliklerinden ϕ bir modül homomorfizmasıdır. $f_1, f_2 \in \text{Hom}(M \otimes N, P)$ ve $\phi(f_1) = \phi(f_2)$ olduğunu varsayalım. $x \in M, y \in N$ iken

$$\begin{aligned} f_1(x \otimes y) &= [\phi(f_1)(x)](y) \\ &= [\phi(f_2)(x)](y) \\ &= f_2(x \otimes y) \end{aligned}$$

olur. Buradan, $x \otimes y$, $M \otimes N$ 'nin üreteçleri olmak üzere

$$f_1(x \otimes y) = f_2(x \otimes y)$$

elde edilir. Bu, $f_1 = f_2$ demektir. Şimdi ϕ dönüşümünün örten olduğunu gösterelim.

$g \in \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$ alalım. $\phi(f') = g$ olacak şekilde

$$f' : M \otimes N \rightarrow P$$

modül homomorfizması bulmalıyız. $\forall x \in M, y \in N$ için

$$\begin{aligned} f : M \times N &\rightarrow P \\ (x, y) &\rightarrow g(x)(y) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. $a, b \in R, x_1, x_2 \in M, y \in N$ için

$$\begin{aligned} f(ax_1 + bx_2, y) &= g(ax_1 + bx_2)(y) \\ &= (ag(x_1) + bg(x_2))(y) \\ &= ag(x_1)(y) + bg(x_2)(y) \\ &= af(x_1, y) + bf(x_2, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $a, b \in R, x \in M, y_1, y_2 \in N$ için

$$\begin{aligned} f(x, ay_1 + by_2) &= g(x)(ay_1 + by_2) \\ &= ag(x)(y_1) + bg(x)(y_2) \\ &= af(x, y_1) + b(x, y_2) \end{aligned}$$

bulunur. Bu, f dönüşümünün bilineer olması demektir. Böylece,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \\ f \downarrow & \swarrow f' & \\ P & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek f' modül homomorfizması vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} [\phi(f')(x)](y) &= f'(x \otimes y) \\ &= f(x \otimes y) \\ &= g(x)(y) \end{aligned}$$

eşitliğinden, $\phi(f') = g$ elde edilir. Bu, ϕ 'nin örten dönüşüm olması demektir. ϕ , birebir ve örten bir modül homomorfizması olduğundan ϕ bir modül izomorfizmasıdır. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

3.6.2 Teorem M, M' ve M'' , R -modüller olmak üzere

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

dizisi tam ve N bir R -modül olsun. Bu durumda, $1 = I_N : N \rightarrow N$ birim homomorfizması olmak üzere

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \rightarrow 0$$

dizisi de bir tam dizidir.

İspat: [5], [10]

3.6.3 Örnek $R = \mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\rightarrow 2n \end{aligned}$$

dönüşümünü alalım. Bu durumda,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$

dizisi,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = 0_{\mathbb{Z}}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid 2n = 0\} \\ &= \{0_{\mathbb{Z}}\} \\ &= \text{Im}(0) \end{aligned}$$

olduğundan tam dizidir. \mathbb{Z}_2 bir \mathbb{Z} -modül olmak üzere,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$$

dizisinin bir tam dizi olmadığını görelim. $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}(f \otimes 1)(x \otimes y) &= f(x) \otimes 1(y) \\ &= 2x \otimes y \\ &= x \otimes 2y \\ &= x \otimes 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $f \otimes 1$, sıfır homomorfizması olur.

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$$

modülü sıfır modül değildir. Bu, $f \otimes 1$ homomorfizmasının birebir olmadığını söyler.

4. HOMOLOJİ CEBİRİ

Homoloji kavramı ilk olarak topolojide ortaya çıkmış, daha sonra cebirsel yapılara uyarlanmıştır. Zamanla bu fikir, soyut cebir ve modül teorisi içinde önemli bir araç haline gelmiştir.

Homoloji cebiri ise cebirsel yapıların homolojik özelliklerini inceleyen bir alandır ve karmaşık yapıları daha basit cebirsel araçlarla anlamayı amaçlar. Özellikle modüller ve zincir kompleksleri, homoloji cebirinin temel kavramlarını oluşturur. Burada amaç, verilen bir kompleksin homolojisini tanımlamak ve bu yapının modüller üzerindeki davranışını anlamaktır.

4.1 Zincir Kompleksler

Zincir kompleksler, ardışık modüller ve bu modüller arasındaki sınır homomorfizmalarından oluşan yapılar olup, bu cebirsel nesnelerin homolojik özelliklerini sistematik biçimde incelememize olanak tanır. Bu bölümde zincir komplekslerin temel tanımları ve özellikleri verilerek, homoloji modüllerinin elde ediliş süreci [11] kaynağı kullanılarak açıklanmaktadır.

4.1.1 Tanım Her $i \in \mathbb{Z}$ için $\{A_i\}$ değişmeli gruplar ve

$$d_i : A_i \rightarrow A_{i-1}$$

$d_{i-1} \circ d_i = 0$ olacak şekilde grup homomorfizmaları olsun. Bu durumda, d dönüşümüne sınır morfizması ve

$$\cdots A_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} A_i \xrightarrow{d_i} A_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

dizisine bir zincir kompleks denir. (A_\bullet, d) ile gösterilir.

4.1.2 Önerme Her $i \in \mathbb{Z}$ için $\{A_i\}$ değişmeli gruplar ve

$$d_i : A_i \rightarrow A_{i-1}$$

grup homomorfizmaları olsun. Bu durumda,

$$d_{i-1} \circ d_i = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(d_i) \subseteq \text{Ker}(d_{i-1}).$$

İspat: İlk önce, $d_{i-1} \circ d_i = 0$ olduğunu varsayalım. $y \in Im(d_i)$ alalım.

$$Im(d_i) = \{d_i(x) \mid x \in A_i\}$$

olduğundan, bir $x \in A_i$ için $y = d_i(x)$ olur.

$$\begin{aligned} d_{i-1}(y) &= d_{i-1}(d_i(x)) \\ &= (d_{i-1} \circ d_i) \\ &= 0(x) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden $y \in Ker(d_{i-1})$ elde edilir. Bu, $Im(d_i) \subseteq Ker(d_{i-1})$ olması demektir.

Şimdi, $Im(d_i) \subseteq Ker(d_{i-1})$ olduğunu varsayalım. $x \in A_i$ için,

$$(d_{i-1} \circ d_i)(x) = 0$$

olduğunu görmeliyiz.

$$(d_{i-1} \circ d_i)(x) = d_{i-1}(d_i(x))$$

yazabiliriz. $d_i(x) \in Im(d_i)$ ve varsayımdan

$$d_i(x) \in Ker(d_{i-1})$$

elde edilir. Tanım 2.1.8'den ,

$$d_{i-1}(d_i(x)) = 0 \Rightarrow (d_{i-1} \circ d_i)(x) = 0$$

bulunur. Bu, $d_{i-1} \circ d_i = 0$ olması anlamına gelir.

Örnek 2.1.2'den, \mathbb{Z} halkası üzerindeki modüller ile değişmeli grupların aynı olduklarını biliyoruz. Bu durumda, herhangi bir R halkası için R -modüller üzerinde de zincir kompleksleri tanımlamak anlamlıdır.

4.1.3 Tanım Her $i \in \mathbb{Z}$ için $\{C_i\}$ 'ler R -modüller ve

$$d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$$

$d_{i-1} \circ d_i = 0$ olacak şekilde R -modül homomorfizmaları olsun. Bu durumda,

$$\cdots C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

dizisine bir zincir kompleksi denir ve (C_\bullet, d) ile gösterilir.

R -modüller üzerindeki zincir kompleksleri son derece ilginçtirler. Zincir komplekslerini incelerken, genellikle bunların diğer zincir komplekslerine göre nasıl davrandığı ile ilgilenilir. Bu sebeple, zincir kompleksler arasında geçiş yapılabilmesi için bir yola ihtiyaç vardır. Bu, zincir kompleks dönüşümü ile yapılmaktadır.

4.1.4 Tanım Her $i \in \mathbb{Z}$ için, $\{C_i\}$ ve $\{D_i\}$ 'ler R -modüller ve $d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ ve $d'_i : D_i \rightarrow D_{i-1}$ dönüşümleri

$$d_{i-1} \circ d_i = 0 \quad \text{ve} \quad d'_{i-1} \circ d'_i = 0$$

olacak şekilde R -modül homomorfizmaları olsun. $i \in \mathbb{Z}$ için,

$$u_i : C_i \rightarrow D_i$$

R -modül homomorfizması olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_{i+2}} & C_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \cdots \\ & & \downarrow u_{i+1} & & \downarrow u_i & & \downarrow u_{i-1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{d'_{i+2}} & D_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & D_i & \xrightarrow{d'_i} & D_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & \cdots \end{array}$$

diyagramı değişmeli, bir başka ifadeyle,

$$u_i \circ d_{i+1} = d'_{i+1} \circ u_{i+1}$$

olacak şekilde, R -modül homomorfizmalarının

$$U : (C_\bullet, d) \rightarrow (D_\bullet, d')$$

koleksiyonuna zincir kompleks dönüşümü denir.

4.2 Homoloji Modülü

Homolojiler ve homoloji modülleri, her boyuttaki deliklerin sayısını hesaplamak için zincir komplekslerin kullanılacağı araçları sağlar. Bu şekiller ve topolojiler ile hesaplanabilir cebir arasında köprü görevi gören homolojik cebirin özünü tanımlar.

4.2.1 Tanım Her $i \in \mathbb{Z}$ için $\{C_i\}$ 'ler R -modüller ve

$$d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$$

R -modül homomorfizmaları olmak üzere

$$\dots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} C_{i-2} \rightarrow \dots$$

dizisi, (C_\bullet, d) zincir kompleksi olsun. (C_\bullet, d) kompleksinin n . homoloji modülü

$$H_n(C_\bullet, d) = \text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1})$$

ile tanımlanır. Eğer, C zincir kompleksinin n -devirlerinin modülünü $Z_n(C) = \text{Ker}(d_n)$ ve n -sınırlarının modülünü $B_n(C) = \text{Im}(d_{n+1})$ ile gösterirsek, C 'nin n .homoloji modülü, C 'nin n . devrinin n .sınırına bölümü olarak tanımlanır ve böylece

$$H_n(C) = Z_n(C) / B_n(C)$$

olarak yazılır.

4.2.2 Uyarı Bir zincir kompleksin homolojisi, kompleksin tam olmaktan ne kadar saptığını ölçer.

4.2.3 Tanım (C_\bullet, d_C) ve (D_\bullet, d_D) zincir kompleksler ve

$$u : C \rightarrow D$$

bir morfizma olsun. Eğer, her n için,

$$\phi : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$$

modül homomorfizmaları, modül izomorfizmaları ise, u dönüşümüne yarı-izomorfizma denir.

4.2.4 Önerme (C_\bullet, d) zincir kompleksi için aşağıdakiler denktir:

- (i) (C_\bullet, d) kompleksi tamdır.
- (ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $H_n(C) = 0$.
- (iii) $u : 0 \rightarrow C$ dönüşümü yarı-izomorfizmadır.

İspat: (i) \Rightarrow (ii) (C_\bullet, d) kompleksinin tam olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\dots C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \rightarrow \dots$$

dizisinde $Im(d_{n+1}) = Ker(d_n)$ olur. Bu,

$$Ker(d_n)/Im(d_{n+1}) = H_n(C) = 0$$

demektir.

(ii) \Rightarrow (iii) Her $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$H_n(C) = 0$$

olduğunu varsayalım. $u : 0 \rightarrow C$ dönüşümünün yarı-izomorfizma olduğunu, bir başka ifadeyle,

$$\phi : H_n(0) \rightarrow H_n(C)$$

modül homomorfizmalarının, modül izomorfizması olduğunu görelim.

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{d_{n+1}=0} 0 \xrightarrow{d_n=0} 0 \xrightarrow{d_{n-1}=0} 0 \rightarrow \dots$$

sıfır kompleksi, sıfır modüllerinden ve her n için $d_n = 0$ sıfır dönüşümlerinden oluşur.

$$Im(d_{n+1}) = Ker(d_n) = 0$$

olduğundan,

$$H_n(0) = 0$$

olur. Bunun sonucunda,

$$\begin{aligned} \phi_n : H_n(0) &\rightarrow H_n(C) \\ 0 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

aşık dönüşümleridir. Böylece, her $n \in \mathbb{Z}$ için ϕ_n dönüşümleri izomorfizma olur. Bu,

$$u : 0 \rightarrow C$$

dönüşümünün yarı-izomorfizma olması demektir.

(iii) \Rightarrow (i) $u : 0 \rightarrow C$ dönüşümünün bir yarı-izomorfizma olduğunu varsayalım. Tanım 4.2.3'ten,

$$\phi_n : H_n(0) \rightarrow H_n(C)$$

dönüşümlerinin tümü izomorfizmadır. Sıfır zincir kompleksinin tanımından, $H_n(0) = 0$ olur.

$$H_n(0) = 0 \rightarrow H_n(C)$$

dönüşümü, sıfır dönüşümüdür. $u : 0 \rightarrow C$ bir yarı-izomorfizma olduğunu varsaydığımızdan

$$H_n(0) \rightarrow H_n(C)$$

sıfır dönüşümü bir izomorfizmadır. Böylece, her n için $H_n(C) = 0$ olur. Bu (C_\bullet, d) kompleksinin tam olması demektir.

Şimdi, homoloji modüllerinin nasıl kullanıldığını açıklamak için hesaplamalı bir örnek verelim.

4.2.5 Örnek

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\rightarrow 2n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ n &\rightarrow \begin{cases} \bar{0}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \bar{1}, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

dönüşümleri ile

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2$$

dizisini düşünelim.

$$\begin{aligned}Im(\psi) &= \{\psi(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}Ker(\varphi) &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(n) = \bar{0}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{2}\} \\ &= \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $Im(\psi) = Ker(\varphi)$ olur. Bu, bir k tamsayısının 2 ile bölünebilir olmasının ancak ve ancak bir $q \in \mathbb{Z}$ için $k = 2q$ ile mümkün olduğu anlamına gelir. Bir başka ifadeyle, $k = 2q$ tamsayıları, ψ dönüşümü ile inşa edilebilecek şeyleri temsil ederken, φ dönüşümü aracılığıyla, 2'ye bölünebilen tamsayılar ise, test edebileceğimiz şeyleri temsil eder. Dolayısıyla, bu dizinin homoloji modülü, $Ker(\varphi)/Im(\psi) = \{0\}$ test etmek istediğimiz şeyi ölçmede ne kadar başarılı olduğumuzu yansıtır.

4.2.6 Örnek

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\rightarrow 4n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ n &\rightarrow \begin{cases} \bar{0}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \bar{1}, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

dönüşümleri ile

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2$$

dizisini düşünelim. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}Im(\psi) &= \{\psi(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}Ker(\varphi) &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(n) = \bar{0}\} \\ &= \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$Im(\psi) \neq Ker(\varphi)$$

elde edilir. Böylece, 2 tamsayısının bazı katları $(2, 6, \dots)$ yakalanamaz. Bu durumda, homoloji modülü, $Ker(\varphi)/Im(\psi) \neq 0$ olacaktır. Sonuç olarak, bu yaklaşım bize, homojileri anlamının, topolojik uzaylarla doğrudan ilişkili olmayan farklı bir yolunu sunmaktadır.

4.3 Projektif Çözümler

Projektif çözümler, bir modülün yapısını projektif modüller üzerinden tanımlayan ve homolojik özelliklerini ortaya koyan düzenli komplekslerdir. Bu çözümler, serbest çözümlere benzer bir yapıya sahip olmakla birlikte daha geniş bir modül sınıfı kullanıldığı için daha esnek bir yaklaşım sunar. Kompleksin her adımında kullanılan projektif modüller, çekirdek ve görüntü ilişkilerinin açık biçimde izlenmesine imkan verir.

4.3.1 Tanım P, M ve N, R -modüller ve $\varphi : M \rightarrow N$ bir örten modül homomorfizması olsun. Herhangi bir $f : P \rightarrow N$ modül homomorfizması için

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \varphi(\text{örten}) \\ P & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

diyagramında, $\varphi \circ \tilde{f} = f$ olacak şekilde bir $\tilde{f} : P \rightarrow M$ homomorfizması var ise, P modülüne projektif modül denir.

Şimdi vereceğimiz önerme, çözümler konusunda, serbest R -modülleri incelemenin neden önemli olduğunu vurgular.

4.3.2 Önerme Her serbest modül, bir projektif modüldür.

İspat: F bir serbest R -modül olsun. Bu durumda, F 'nin

$$B = \{x_i \mid i \in I\}$$

tabanı vardır.

$$\psi : M \rightarrow N$$

bir örten R -modül homomorfizması ve

$$f : F \rightarrow N$$

bir homomorfizma olduğunu varsayalım.

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & & \downarrow \psi \\ F & \xrightarrow{f} & N \\ x_i & \longrightarrow & f(x_i) \end{array}$$

diyagramında ψ örten olduğundan, her $i \in I$, $f(x_i)$ elemanı için

$$\psi(y_i) = f(x_i)$$

olacak şekilde $y_i \in M$ vardır. F serbest modül olduğundan

$$\begin{array}{l} g : F \rightarrow M \\ x_i \rightarrow y_i \quad (i \in I) \end{array}$$

bir tek modül homomorfizması vardır ve her $i \in I$ için

$$(\psi \circ g)(x_i) = \psi(g(x_i)) = \psi(y_i) = f(x_i)$$

olduğundan $\psi \circ g = f$ olur. Böylece, F bir projektif modüldür.

4.3.3 Teorem P bir R -modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) P projektif modüldür.

(ii)
$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi için $g \circ h = I_p$ olacak şekilde

$$h : P \rightarrow B$$

dönüşümü vardır. Burada $I_P : P \rightarrow P$ birim dönüşümdür.

(iii) $P \oplus K$ serbest modül olacak şekilde bir K R -modülü vardır.

İspat: [3]

4.3.4 Tanım M bir R -modül, $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ projektif modüller ve $P_{-1} = M$ iken

$$\varphi_i : P_i \rightarrow P_{i-1}$$

modül homomorfizmaları olsun.

$$\mathcal{P} : \dots \xrightarrow{\varphi_3} P_3 \xrightarrow{\varphi_2} P_2 \xrightarrow{\varphi_1} P_1 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

zincir kompleksi tam ise, \mathcal{P} 'ye, M modülünün projektif çözülümü denir.

Herhangi bir M , R -modülünün bir serbest çözülümü olduğu bilinmektedir. Önerme 4.3.2'den, her serbest çözülüm bir projektif çözülümdür. Böylece herhangi bir R -modülün her zaman bir projektif çözüme sahip olduğu söylenebilir.

4.3.5 Örnek $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, \mathbb{Z} -modülünü alalım.

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x &\rightarrow x + 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

homomorfizması ve

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\rightarrow 2x\end{aligned}$$

ile

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

dizisini alalım.

$$\begin{aligned}Im(\varphi_1) &= \{\varphi_1(x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}Ker(\varphi_0) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \varphi_0(x) = 0_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 2\mathbb{Z} = 0 + 2\mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in 2\mathbb{Z}\} \\ &= 2\mathbb{Z}\end{aligned}$$

olduğundan $Im(\varphi_1) = Ker(\varphi_0)$ olur.

$$\begin{aligned}Ker(\varphi_1) &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \varphi_1(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 0\} \\ &= \{0\} = Im(0)\end{aligned}$$

Bu durumda,

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\cong} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Böylece, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 'nin bir sonlu projektif çözülümü elde edilir.

5. KOSZUL KOMPLEKSLER

Koszul kompleksler, değişmeli cebirde halkanın elemanlarından oluşan dizileri homolojik özelliklerle ilişkilendiren güçlü araçlardır. İlk olarak, Jean-Louis Koszul tarafından Lie cebirlerinin kohomolojisini hesaplamak için bir araç olarak tanıtılmıştır [12].

Bu bölümde, ters simetrik çarpımlar kullanılarak tanımlanan Koszul kompleksleri ve bu komplekslerin homolojik özellikleri incelenmektedir.

5.1 Simetrik ve Ters Simetrik Çarpımlar

Burada, modüller üzerinde tanımlanan simetrik ve ters simetrik çarpım yapıları ele alınmaktadır. Özellikle ters simetrik çarpımlar aracılığıyla elde edilen dış çarpım yapısı tanıtılarak, bu yapıların Koszul komplekslerinin inşasındaki rolü ortaya konulmaktadır.

5.1.1 Tanım M, N ve P, R -modüller,

$$f : M \times N \rightarrow P$$

bir bilinear dönüşüm olsun.

$$f(m, n) = f(n, m)$$

ise, f dönüşümüne simetrik,

$$f(m, n) = -f(n, m)$$

ise, f dönüşümüne ters simetriktir denir.

5.1.2 Örnek R değişmeli bir halka ve $M_n(R)$, R halkası üzerinde n -boyutlu kare matrislerin kümesi olsun. $\text{iz}(A)$, A matrisinin izi olmak üzere,

$$\begin{aligned} f : M_n(R) \times M_n(R) &\rightarrow R \\ (A, B) &\rightarrow \text{iz}(A \cdot B) \end{aligned}$$

dönüşümü,

$$f(A, B) = \text{iz}(A \cdot B) = \text{iz}(B \cdot A) = f(B, A)$$

olduğundan simetriktir.

5.1.3 Örnek R değişmeli bir halka olmak üzere,

$$\begin{aligned} f : R^2 \times R^2 &\rightarrow R \\ ((a, c), (b, d)) &\rightarrow ad - bc \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. $(a, c), (b, d) \in R^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f((a, c), (b, d)) &= ad - bc \\ &= -(bc - ad) \\ &= -f((b, d), (a, c)) \end{aligned}$$

olduğundan, f ters simetrik bir dönüşümdür.

5.1.4 Tanım M bir R -modül olsun. M 'nin kendisi ile simetrik çarpımı, $Sym^2 M$, tüm simetrik bilinear dönüşümler arasında evrensel, bir başka ifadeyle, $f : M \times M \rightarrow P$ bir diğer simetrik bilinear dönüşüm iken

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{f} & P \\ u \downarrow & \nearrow \phi & \\ Sym^2 M & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani, $\phi \circ u = f$ olacak şekilde bir tek

$$\phi : Sym^2 M \rightarrow P$$

R -lineer dönüşümü var ise,

$$u : m \times M \rightarrow Sym^2 M$$

simetrik bilinear dönüşümü ile birlikte tanımlanan bir R -modüldür.

5.1.5 Uyarı Tensör çarpımın evrensel özelliği

$$M \otimes_R M \rightarrow Sym^2 M$$

R -lineer dönüşümünü garanti eder.

5.1.6 Tanım M bir R -modül olsun. M 'nin kendisi ile dış (wedge) çarpımı, $\wedge^2 M$, tüm ters simetrik bilinear dönüşümler arasında evrensel, bir başka ifadeyle, $f : M \times M \rightarrow P$ bir

diğer ters simetrik bilinear dönüşüm iken

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{f} & P \\ u \downarrow & \nearrow \phi & \\ \wedge^2 M & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani, $\phi \circ u = f$ olacak şekilde bir tek

$$\phi : \wedge^2 M \rightarrow P$$

R -lineer dönüşümü var ise,

$$u : M \times M \rightarrow \wedge^2 M$$

ters simetrik bilinear dönüşümü ile birlikte tanımlanan bir R -modüldür.

5.1.7 Uyarı $(m, n) \in M \times M$ olsun. $u(m, n)$ elemanı, simetrik çarpımda, $m \cdot n = n \cdot m$ kuralı ile

$$u(m, n) = m \cdot n$$

ve dış çarpımda, $m \wedge n = -n \wedge m$ kuralı ile,

$$u(m, n) = m \wedge n$$

yazılır.

5.1.8 Örnek $M = \langle e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) \rangle \subset R^3$ olan bir R -modül olsun. $\wedge^2 M$ modülünü bulalım.

$$u : M \times M \rightarrow \wedge^2 M$$

$$(m, n) \rightarrow m \wedge n$$

$m, n \in M$ olduğundan,

$$m = ae_1 + be_2 + ce_3$$

$$n = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3$$

olacak şekilde a, a', b, b' ve $c, c' \in R$ vardır.

$$\begin{aligned}
m \wedge n &= (ae_1 + be_2 + ce_3) \wedge (a'e_1 + b'e_2 + c'e_3) \\
&= ae_1 \wedge (a'e_1 + b'e_2 + c'e_3) + be_2 \wedge (a'e_1 + b'e_2 + c'e_3) + ce_3 \wedge (a'e_1 + b'e_2 + c'e_3) \\
&= aa'(e_1 \wedge e_1) + ab'(e_1 \wedge e_2) + ac'(e_1 \wedge e_3) + ba'(e_2 \wedge e_1) + bb'(e_2 \wedge e_2) + bc'(e_2 \wedge e_3) + \\
&\quad ca'(e_3 \wedge e_1) + cb'(e_3 \wedge e_2) + cc'(e_3 \wedge e_3) \\
&= ab'(e_1 \wedge e_2) - ba'(e_1 \wedge e_2) + ac'(e_1 \wedge e_3) - ca'(e_1 \wedge e_3) + bc'(e_2 \wedge e_3) - cb'(e_2 \wedge e_3) \\
&= (ab' - ba')(e_1 \wedge e_2) + (ac' - ca')(e_1 \wedge e_3) + (bc' - cb')(e_2 \wedge e_3)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $m \wedge n$ elemanı, $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$ ve $e_2 \wedge e_3$ elemanlarının bir lineer bileşimidir denir. Bu $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$ ve $e_2 \wedge e_3$ 'ün $\wedge^2 M$ 'yi üretmesi demektir.

5.1.9 Uyarı M bir serbest R -modül ve $\{e_1, \dots, e_d\}$, M 'nin bir bazı olsun. Bu durumda, $\wedge^2 M$ 'de $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq d\}$ tabanına sahip bir serbest R -modüldür. Üstelik, $\wedge^2 M$ 'nin bazındaki eleman sayısı $\binom{d}{2}$ 'dir.

5.2 Koszul Kompleksler

Birçok çözümlü, Koszul kompleksinden inşa edilebilir. Koszul kompleksleri, bazen bir çözümlü olmaktan uzak olmalarına rağmen, minimallik özelliğine sahiptirler.

5.2.1 Tanım R birimli ve değişmeli bir halka ve $x_1, \dots, x_n \in R$ olsun. $K = K(x_1, \dots, x_n)$ Koszul kompleksi,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\partial_n} & R^n & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & R^{\binom{n}{n-2}} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \\
& & \cong & & \cong & & \cong \\
& & K_n & & K_{n-1} & & K_{n-2} \\
& & \in & & \in & & \in \\
& & e_{1, \dots, n} & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & R^{\binom{n}{i}} & \xrightarrow{\partial_i} & \dots & \xrightarrow{\partial_3} & R^{\binom{n}{2}} \xrightarrow{\partial_2} R^n \xrightarrow{\partial_1} R \longrightarrow 0 \\
& & \cong & & \cong & & \cong \\
& & K_i & & K_2 & & K_1 \\
& & \in & & \in & & \in \\
& & & & e_{ij} & & e_i \\
& & & & 1 \leq i, j \leq n & & 1 \leq i \leq n \\
& & & & & & 1 = e_\emptyset
\end{array}$$

dizisidir. Burada, $p \geq 1$ olmak üzere, K_p 'ler eleman sayısı $\binom{n}{p}$ olan

$\{e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_p} \mid 1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p \leq n\}$ bazına sahip

$$K_p = \wedge^p \left(\bigoplus_{i=1}^n Re_i \right)$$

serbest R -modülü ve ∂_p 'ler

$$\begin{aligned} \partial_p &= K_p \rightarrow K_{p-1} \\ e_{\wedge} &= e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_p} \rightarrow \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} f_{\lambda_j} e_{\wedge - \{\lambda_j\}} \end{aligned}$$

dönüşümüdür.

5.2.2 Örnek $f_1, f_2, f_3 \in R$ olsun. $K(f_1, f_2, f_3)$ Koszul kompleksini oluşturalım.

$$\partial_1 : R^3 \rightarrow R$$

olduğundan,

$$\partial_1(e_1) = f_1 e_0 = f_1$$

bulunur. Benzer şekilde, $\partial_1(e_2) = f_2$, $\partial_1(e_3) = f_3$ olur.

$$\partial_2 : R^{\binom{3}{2}} = R^3 \rightarrow R^3$$

diferansiyelinde,

$$\begin{aligned} \partial_2(e_{23}) &= f_2 e_3 - f_3 e_2 \\ \partial_2(e_{13}) &= f_1 e_3 - f_3 e_1 \\ \partial_2(e_{12}) &= f_1 e_2 - f_2 e_1 \end{aligned}$$

olur. Son olarak,

$$\partial_3 : R^{\binom{3}{3}=1} \rightarrow R^3$$

diferansiyelinde,

$$\partial_3(e_{123}) = f_1 e_{23} - f_2 e_{13} + f_3 e_{12}$$

bulunur. Bu durumda, $K(f_1, f_2, f_3)$ Koszul kompleksi

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\partial_3} & R^3 & \xrightarrow{\partial_2} & R^3 & \xrightarrow{\partial_1} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & \in & & \in & & \in & & \in & & \\ & & e_{123} & & \begin{matrix} e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \end{matrix} & & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & & 1 & & \end{array}$$

dizisidir.

5.3 Regüler Diziler

Koszul kompleksler her zaman bir çözümüm değildirler. Bir çözümüm olmaları için dizinin regüler olması gerekir. Değişmeli cebirde bir regüler dizi, değişmeli bir halkanın mümkün olduğunca bağımsız olan elemanlarından oluşan dizidir. Ek olarak çözümlenmesi en kolay idealler de regüler diziler tarafından üretilen ideallerdir.

5.3.1 Tanım R birimli ve değişmeli bir halka ve $f_1, \dots, f_n \in R$ olsun Eğer,

- f_1, R 'de sıfır bölen değil
- $f_2, R/\langle f_1 \rangle$ 'de sıfır bölen değil
- $f_3, R/\langle f_1, f_2 \rangle$ 'de sıfır bölen değil
- \vdots
- $f_n, R/\langle f_1, \dots, f_{n-1} \rangle$ 'de sıfır bölen değil

ve $\langle f \rangle \neq R$ ise, $\{f_1, \dots, f_n\}$ dizisine, R -regüler dizi denir.

5.3.2 Örnek $R = F[x, y, z]$ polinom halkasını alalım. x, R 'de sıfır bölen değildir. $y \in R$,

$$R/\langle x \rangle \cong F[y, z]$$

üzerinde sıfır bölen değildir ve son olarak, $z \in R$,

$$R/\langle x, y \rangle \cong F[z]$$

üzerinde sıfır bölen değildir. Böylece, Tanım 5.3.1'den, $\{x, y, z\}$ dizisi, R -regülerdir.

5.3.3 Teorem $\{f_1, \dots, f_n\}$, R halkasında bir regüler dizi ise, $K(f_1, \dots, f_n)$ Koszul kompleksi, $R/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ 'nin bir çözümümüdür. Eğer, R lokal halka, bir başka ifadeyle, bir tek m maksimal ideali olan halka ve $f_1, \dots, f_n \in R$ ise, bu çözümüm minimaldir.

İspat: [5]

5.3.4 Örnek $\{f_1, f_2\}$, R 'nin bir regüler dizisi olsun.

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow R & \xrightarrow{\partial} & R \rightarrow 0 \\ & & 1 \rightarrow 1 \end{array} \quad , \quad \partial(1) = f_1$$

Koszul kompleksi, $R/\langle f_1 \rangle$ 'in bir çözümüdür.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\partial_2} & R^2 & \xrightarrow{\partial_1} & R \longrightarrow 0 \\ & & \in & & \in & & \in \\ & & e_{12} & & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} & & 1 \end{array}$$

$\partial_1(e_1) = f_1$, $\partial_1(e_2) = f_2$, $\partial_1(e_{12}) = f_1e_2 - f_2e_1$ Koszul kompleksi $R/\langle f_1, f_2 \rangle$ 'nin bir çözümüdür.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Hilbert, D.** (1890). Über die Theorie der algebraischen Formen. *Mathematische Annalen*, 36, 473-534.
- [2] **Greuel, G. M. and Pfister, G.** (2007). A Singular Introduction to Commutative Algebra. Springer Science and Business Media, Berlin, 689.
- [3] **Hungerford, T. W.** (1980). Algebra. Springer, Berlin, 528.
- [4] **Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G.** (1994). Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Publishing Press, London, 140.
- [5] **Eisenbud, D.** (1999). Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. Springer-Verlag, Berlin, 800.
- [6] **Gibbs, J. W.** (1884). Elements of Vector Analysis Arranged for the Use of Student in Physics. Morehouse and Taylor, New Haven, 83.
- [7] **Murray, F.J. and Von Neumann, J.** (1936). On rings of operators. *Annals of Mathematics*, 37, 116-229.
- [8] **Whitney, H.** (1938). Tensor products of Abelian groups. *Duke Mathematical Journal*, 4, 495-528.
- [9] **Bourbaki, N.** (1948). Livre II Algèbre Chapitre III (état 4) Algèbre Multilinéaire, 98.
- [10] **Easdown, D.** (2009). Notes on commutative Algebra.
<https://www.maths.usyd.edu.au/u/de/AGR/CommutativeAlgebra/pp00-21.pdf>
(Erişim tarihi: 30 Nisan 2024)
- [11] **Eskenazi, A., You, K., Vauclain, W. and Murugadoss, R.** (2022). A beginner's guide to homological algebra: A comprehensive introduction for students, arXiv: 2208.11199v2[math.HO]
- [12] **Koszul, J.L.** (1950). Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression, Colloque de topologie (espaces fibrés), 73-81.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Hilal DÜLGEROĞLU

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2026
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2019
Lise	İnebey Anadolu Lisesi	2013