T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAUSS WEIERSTRASS İNTEGRAL OPERATÖRÜ İLE YAKLAŞIM

ÇAĞRI TANRIÖVER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ramazan AKGÜN (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, OCAK-2025

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Gauss Weierstrass İntegral Operatörü ile Yaklaşım**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Çağrı TANRIÖVER

ÖZET

GAUSS WEIERSTRASS İNTEGRAL OPERATÖRÜ İLE YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ÇAĞRI TANRIÖVER
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN)
BALIKESİR, OCAK - 2025

Bu tezde, genel Weierstrass singüler integralinin Orlicz uzaylarında yaklaşımı incelenmiştir. Tez, beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, kullanılan yöntem ve amaç belirtilmiştir.

İkinci bölümde, normlu uzay, Lebesgue uzayı, konvolüsyon, integral operatörü, yoğun alt küme, Fejer tipi singüler integral ve quasi-konveks fonksiyonlar gibi temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, Lebesgue uzayının genelleştirilmiş hali olan Orlicz uzayları ele alınmış ve bu uzaylarda Young fonksiyonu ile eşlenik Young fonksiyonu incelenmiştir. Bu fonksiyonlar kullanılarak Orlicz uzayları tanımlanmış ve belirli koşullar altında dual uzaylar ve bazı yoğun alt kümeler hakkında bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Fejer tipinde bir singüler integral olan Gauss-Weierstrass singüler integrali tanımlanmış ve genel Gauss-Weierstrass singüler integrali ile ilgili bazı tanım ve teoremler açıklanmıştır.

Son bölümde ise, genel Weierstrass singüler integralinin Orlicz uzaylarında yaklaşımı ele alınmış ve bu yaklaşımın ispatı yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Orlicz uzayı, Gauss-Weierstrass singüler integrali, Genel Weierstrass singüler integrali, Lebesgue uzayları, yaklaşım teorisi.

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 26

ABSTRACT

APPROXIMATION BY GAUSS WEIERSTRASS INTEGRAL OPERATOR
MSC THESIS
ÇAĞRI TANRIÖVER
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. RAMAZAN AKGÜN)
BALIKESİR, JANUARY - 2025

In this thesis, the approximation of the general Weierstrass singular integral in Orlicz spaces is investigated. The thesis consists of five chapters. The first chapter defines the method and purpose of the study.

In The second chapter presents fundamental definitions and theorems, such as normed space, Lebesgue space, convolution, integral operator, dense subset, Fejer type singular integral, and quasi-convex functions.

In the third chapter, Orlicz spaces, which are the generalization of Lebesgue space, are discussed and the Young function and its conjugate Young function in these spaces are examined. Using these functions, Orlicz spaces are defined and information about dual spaces and some dense subsets under certain conditions is given.

In the fourth chapter defines the Gauss-Weierstrass singular integral, a Fejer type singular integral, and explains the some definitions and theorems related to the general Gauss-Weierstrass singular integral.

In the final chapter, the approximation of the general Weierstrass singular integral in Orlicz spaces is addressed, and the proof of this approximation is presented.

KEYWORDS: Orlicz space, Gauss-Weierstrass singular integral, General Weierstrass singular integral, Lebesgue spaces, approximation theory.

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 26

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{A}$	: (a,b), $0 \le a < b \le \infty$
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar Kümesi
$\mathbb{K}$	: Reel sayılar cismi veya Kompleks sayılar cismi
$\mathbb{P}$	: Sıfır dahil tüm pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{AC^r}$	: r -inci türevi mutlak sürekli olan tüm fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{BV}$	: Sınırlı varyasyonlu fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{C}$	: $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli olan tüm fonksiyoların kümesi
$\boldsymbol{C^\infty}$	: Her dereceden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar kümesi
$\boldsymbol{C_{loc}}$	: Her sonlu aralıkta sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{C_0}$	: $f \in C$ için, $\lim_{\lvert x \rvert \to \infty} f(x) = 0$
$\boldsymbol{D}$	: X normlu reel uzay ve $D \subseteq X$
$\boldsymbol{K(x,t)}$	: Çekirdek fonksiyonu
$\boldsymbol{\mathcal{L}^p}$	: p-inci kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{L^p}$	: Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{L^\Phi(\Omega)}$	: Orlicz uzayı
$\boldsymbol{Lip(X;\alpha)}$	: Lipschitz sınıfı
$\boldsymbol{Lip^*(X;\alpha)}$	: Genelleştirilmiş Lipschitz sınıfı
$\boldsymbol{NL^1}$	: L^1 uzayında yer alan ve $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = \sqrt{2\pi}$ olacak şekilde normalize edilmiş fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{W(f;x;t)}$	: Gauss Weierstrass singüler integral operatörü
$\boldsymbol{X_{2\pi}}$	: $C_{2\pi}$ veya $L_{2\pi}^p$ sınıflarından birini belirtir
$\boldsymbol{X}(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı C veya L^p uzayları
$\boldsymbol{f}$ ^	: Fourier dönüşümü
$\boldsymbol{f}^{\sim}$	: Hilbert dönüşümü
$\boldsymbol{f * g}$	: f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu
$\boldsymbol{f = O(g)}$	: En az bir $M > 0$ için, $f(x) \le Mg(x)$
$\boldsymbol{f = o(g)}$	: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$
$\boldsymbol{\Delta_h^r f}$	: r. tek taraflı fark
$\boldsymbol{\nabla_h^r f}$	: r. Taylor farkı
$\boldsymbol{\Diamond_h^r f}$	: r. Peano farkı
$\lVert \cdot \rVert_\Phi$	: Orlicz normu
$\boldsymbol{\Phi}$	: Young fonksiyonları Sınıfı
$\boldsymbol{\Psi}$	: Φ ’nin Eşlenik fonksiyonları Sınıfı
~	: Denklik Bağıntısı
:=	: Tanım gereği eşittir

ÖNSÖZ

Bu tezi yazarken, büyük emek ve zaman harcayarak bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Prof. Dr. Ramazan Akgün'e,

Yüksek lisans eğitimim süresince eğitimime katkı sağlayan başta Prof. Dr. Ali Güven'e ve tüm Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında görev yapan hocalarıma,

Bu yoğun çalışma sürecinde bana güvenip inanan, benimle birlikte emek veren değerli eşim Fatma Tanrıöver'e,

Ve her koşulda bana destek olan aileme,

TEŞEKKÜRLERİMİ SUNARIM.

Balıkesir, 2025 **Çağrı Tanrıöver**

1. GİRİŞ

Normlu uzaylar, bir dizi fonksiyonun birbirleriyle karşılaştırılmasında ve analizinde rol oynar. Norm, bir fonksiyonun büyüklüğünü ölçerken, uzayların yapısı, çeşitli matematiksel işlemlerin gerçekleştirilmesinde belirleyici olmaktadır. Bu nedenle, normlu uzayların özellikleri, birçok analitik teoremin temelini oluşturur. L^p Lebesgue uzayları ise, bu normların daha genel bir çerçevede değerlendirilmesine olanak tanır. L^p uzayları, Lebesgue integrali ile tanımlanan fonksiyonların belirli büyüklük ölçüleri altında gruplandırılmasını sağlar ve özellikle Fourier analizi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır.

Matematiksel analiz, matematikteki en temel yapı taşlarından biri olup, fonksiyonların, serilerin ve integral hesaplamalarının incelenmesinde rol oynamaktadır. Bu disiplin, reel ve kompleks sayılarla tanımlanan fonksiyonların davranışlarını anlamak için çeşitli araçlar sunarak, daha karmaşık matematiksel yapıları inşa etmemize olanak tanır. Analizin temel konularından biri olan integral operatörleri, farklı fonksiyonları dönüştürerek bu fonksiyonların özelliklerini ve birbirleriyle olan ilişkilerini keşfetmemizi sağlar. Bu operatörler, yalnızca teorik matematikte değil, aynı zamanda mühendislik, fizik ve iktisat gibi uygulamalı bilimlerde de önemli bir yere sahiptir. Özellikle Gauss-Weierstrass integral operatörü, bu bağlamda dikkat çeken bir yapı sunarak, hem teorik hem de uygulamalı matematikte geniş bir etki alanı vardır.

Bu çalışmanın bir diğer önemli bileşeni ise, integral operatörü çekirdeği ile ilgili kavramlardır. İntegral operatörleri, belirli bir çekirdek altında fonksiyonları dönüştürerek yeni sonuçlar elde etmemizi sağlar. Bu çekirdeklerin özellikleri, analitik ve sayısal yöntemlerin geliştirilmesinde önemli bir katkı sağlar. Konveks fonksiyonlar, en küçük değerlerin belirlenmesi ve çeşitli matematiksel modelleme işlemlerinde kullanılan araçlardır. Singüler integraller, belirli matematiksel işlemler için oldukça önemli bir araçtır. Özellikle, bir fonksiyonun yerel özelliklerini incelemek ve bu özellikleri global ölçekte değerlendirmek için kullanılır. Bu bağlamda, konvolüsyon işlemi, iki fonksiyonun etkileşimlerini anlamada yardımcı olur. Gauss-Weierstrass integral operatörü, belirli bir çekirdek fonksiyonu aracılığıyla bir fonksiyonun farklı bir biçime dönüşümünü sağlar. Bu dönüşüm, belirli bir alanda tanımlı olan bir fonksiyonun, o alandaki başka bir fonksiyonla entegrasyonu yoluyla gerçekleşir. Gauss çekirdeği, genellikle istatistikteki normal dağılım ile ilişkilidir ve bu nedenle olasılık teorisi gibi birçok alanda önemli bir yer tutar. Bu operatör, sürekli fonksiyonlar üzerinde çalışabilmesi ve çeşitli büyüme koşullarına sahip fonksiyonları inceleyebilmesi sayesinde analitik problemlerin çözümünde önemli bir rol oynar. Gauss-Weierstrass operatörünün sağladığı bu esneklik, matematiksel analizde pek çok farklı alanda kullanımını mümkün kılmaktadır.

Orlicz uzayları, matematiksel analizde önemli bir diğer yapı olan klasik L^p uzaylarının genel bir biçimidir. Orlicz uzayları, belirli büyüme fonksiyonları kullanılarak tanımlanır ve bu sayede farklı büyüme koşullarına sahip fonksiyonların analizi için bir çerçeve sunar. Klasik L^p uzayları, L^p normuna göre sınırlı fonksiyonlar ile çalışırken, Orlicz uzayları daha geniş bir fonksiyon sınıfını kapsar. Bu esneklik, özellikle değişken büyüme koşullarına sahip fonksiyonların incelenmesi açısından büyük bir avantaj sağlar. Orlicz uzaylarının sunduğu bu yapısal farklılıklar, analitik sonuçların elde edilmesinde ve çeşitli matematiksel teorilerin geliştirilmesinde rol oynar.

Tezin ilk bölümünde, bu çalışma boyunca kullanılacak temel tanımlar ve teoremler detaylı bir şekilde sunulacaktır. Bu temel bilgiler, ilerleyen bölümlerdeki kavramların daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacak bir zemin oluşturacaktır.

Tezin ikinci bölümünde Orlicz uzaylarına giriş yapılacaktır. Orlicz uzayları, daha genel büyüklük ölçüleri altında fonksiyonları gruplandırma amacı taşır ve Young fonksiyonları ile tanımlanır. Bu alan, çeşitli eşitsizliklerin, özellikle de Jensen eşitsizliğinin, daha kapsamlı bir şekilde incelenmesine olanak tanır. Orlicz uzaylarında Hölder eşitsizliği gibi önemli sonuçlar, matematiksel analizdeki derinlikleri artırmakta ve yeni araştırma alanlarının kapılarını aralamaktadır.

Tezin üçüncü bölümünde Gauss-Weierstrass singüler integrali, bu çalışmanın ana odak noktalarından birini oluşturmaktadır. Bu integral, matematiksel teoride önemli bir yer tutmakla kalmaz, aynı zamanda çeşitli uygulamalarda da karşımıza çıkar. Weierstrass yaklaşım teoremi, fonksiyonların belirli sınıflar içinde nasıl temsil edilebileceği konusunda önemli bilgiler sunar ve bu teorem, birçok matematiksel modelin geliştirilmesinde rol oynar.

Bu çalışma, Genel Weierstrass integral operatörünün Orlicz uzaylarındaki etkilerini incelemeyi amaçlamaktadır. Elde edilecek bulguların, mevcut literatüre katkıda bulunması ve gelecekteki araştırmalar için yeni yollar açması beklenmektedir. Böylece, bu çalışma, matematiksel analizin sınırlarını genişletmeyi ve yeni araştırma alanlarının kapılarını aralamayı hedeflemektedir.

Temel kavramlar ve tanımlar bölümünde ise sıkça kullanılan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Tanım 2.1.1: (Normlu uzay)

X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$\|x\| \geq 0,$

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$\|ax\| = |\alpha| \|x\|,$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

özelliklerini sağlayan $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [1].

Tanım 1.1.2: (Lebesgue Uzayı)

X, $\mathbb{R}$ 'nin ölçülebilir bir alt kümesi, $\mathcal{A}$ σ cebiri ve μ ölçüm olsun. $M(X, \mathcal{A}), X$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi, $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise X üzerinde tanımlı μ ölçümüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı olmak üzere, $0 < p < \infty$ için,

$\mathcal{L}^p = \left\{ f \in M(X, \mathcal{A}) : |f|^p \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu) \right\}$

kümesine *p-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı* denir [2].

Yukarıdaki tanıma göre $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$ dir, zira f'nin integrallenebilir olması ile $|f|$'nin integrallenebilir olması aynı şeydir. $f \in \mathcal{L}^p$ olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\alpha f \in \mathcal{L}^p$ dir, çünkü $|f|^p$ integrallenebilir olduğundan $|\alpha|^p |f|^p$ de integrallenebilirdir. Dolayısıyla $|\alpha f|^p$ integrallenebilirdir. Ayrıca $f, g \in \mathcal{L}^p$ ise

$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$

olacağından $|f + g|^p$ integrallenebilir ve dolayısıyla $f + g \in \mathcal{L}^p$ olur. O halde $\mathcal{L}^p$ kümesi bir *vektör uzayıdır,* $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\| f \|_p = \left(\int_{\chi} | f |^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathcal{L}^p$ üzerinde bir yarı normdur.

$\mathcal{L}^p$ üzerinde

hemen hemen her yerde $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ (2.1)

biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla bu bağıntı $\mathcal{L}^p$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi L^p ile gösterilir. O halde L^p 'nin elemanları $[f]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. L^p uzayı

$[f]+[g]=[f+g]$, $\lambda[f]=[\lambda f]$

Şeklinde tanımlanan toplama ve skalar ile çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır. $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|[f]\|_p = \| f \|_p = \left(\int_X | f |^P \, d\mu \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_p$ fonksiyonu, L^p üzerinde bir normdur. L^p bu norma göre bir Banach uzayıdır [2].

Not 1.1.3: Burada $1 \leq p < \infty$ iken $\|.\|_p$ bir norm belirtir. Bir $M > 0$ sayısı için hemen hemen her yerde $|f| \leq M$ şartını sağlayan $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının (2.1) bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesi $L^\infty \to \mathbb{C}$ ile gösterilir ve L^∞ bir vektör uzayıdır.

hemen hemen her yerde $\| f \|_\infty := \inf \{ M > 0 : | f | \leq M \}$

fonksiyonu L^∞ üzerinde bir normdur. L^∞ bu norma göre bir Banach uzayıdır [2].

Tanım 1.1.4: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere L^p Banach uzayına ***Lebesgue uzayı*** denir [2].

Tanım 1.1.5: $a \leq \alpha < x < \beta \leq b$ için $\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \phi_n(t,x)\, dt = 1$ olması koşuluyla, $(a \leq t \leq b, a < x < b)$ karesinde tanımlı $\phi_n(t,x)$ $n = (n = 1, 2...)$ fonksiyonuna çekirdek denir.

$\phi_n(t,x)$ çekirdek olmak üzere,

$$f_n(x)=\int_a^b \phi_n(t,x)\, f(t)\,dt$$

biçiminde ki integrallere singüler integral denir [3].

Tanım 1.1.6: (Konvolüsyon)

İntegrallenebilir fonksiyon uzayının elemanları olan iki f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu $f*g$ biçiminde gösterilen ve hemen hemen her yerde

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

formülü ile tanımlanan fonksiyona konvolüsyon denir.

Konvolüsyon, integral fonksiyonlar uzayı üzerinde bir işlemdir ve bu işlem f ve g fonksiyonlarına yeni bir fonksiyon karşı getirmektedir. Bu yeni fonksiyon çoğu zaman $h(x)$ olarak gösterilir ve bundan dolayı $h(x)=(f*g)(x)$ işareti kabul edilir [3].

Tanım 1.1.7: (İntegral operatörü)

X, D kümesinde tanımlı ve Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olsun. Yani $X=\left\{ f:D\to R, \int_D |f|\,d\mu<\infty \right\}$ olsun. Bu uzayda dönüşüm yapan bir lineer integral operatörü;

$$\int_D f(t)K(x,t)\,dt \qquad , \qquad x\in D$$

biçiminde verilebilir. Burada $K(x,t)$, $D\times D$ de tanımlı, önceden özellikleri belli olan bir fonksiyondur. Bu integral operatörün tüm özellikleri $K(x,t)$ fonksiyonunun özellikleri bağlı olduğundan $K(x,t)$ fonksiyonuna L_λ integral operatörün çekirdeği denir [4].

Tanım 1.1.8: (Konveks fonksiyon)

I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$için,

$$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizliğin yön değiştirmesi durumuna ise konkav fonksiyon denir [5].

Tanım 1.1.9: (Yoğun alt küme)

(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $X = \overline{A}$ ise A kümesine X içerisinde yoğun alt küme denir [6].

Tanım 1.1.10: Her $x \in \mathbb{R}$ için, e^x fonksiyonuna doğal eksponansiyel fonksiyon denir ve $\exp(x)$ olarak tanımlanır [7].

Tanım 1.1.11: $f \in X(\mathbb{R})$ için

$$I(f;x;\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\chi(u;\rho)\,du \tag{2.2}$$

konvolüsyonu, $\{\chi(x;\rho)\}$ çekirdeği tarafından üretilen bir singüler integrali tanımlar. Çekirdek pozitif (sürekli) ise singüler integral de pozitiftir(süreklidir).

Her $\chi \in NL^1$ için $\{\rho\chi(\rho x)\}$ Fejer tipi bu çekirdeklerde, (2.2) singüler integrali

$$J(f;x;\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\chi(\rho u)\,du$$

ile gösterilir ve Fejer tipi singüler integral olarak adlandırılır [8].

Tanım 1.1.12: $\mathbb{P}$ üzerinde tanımlanan ve

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2 f(k)\right| < \infty,$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir. Yani, $\mathbb{P}$ üzerindeki her sınırlı ve konveks fonksiyona quasi-konveks denir, ancak tersi doğru değildir [8].

Tanım 1.1.13: (Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği) $p \in [1,\infty]$ olsun ve $F(x,y)$, $(0,\infty)\times(0,\infty)$ üzerinde tanımlanmış iki değişkenli ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Hemen hemen her $F(\cdot,y) \in L^p(0,\infty)$ ve $y \in (0,\infty)$ sabiti için aşağıdaki eşitsizlik tanımlanır

$$\int_0^{\infty} \left\|F(\cdot,y)\right\|_p dy < \infty.$$

O zaman $\int_0^{\infty} F(\cdot,y)\,dy$ hemen hemen her yerde $x \in (0,\infty)$ için yakınsaktır ve

$$\left\|\int_0^{\infty} F(x,y)\,dy\right\| \le \int_0^{\infty} \left\|F(\cdot,y)\right\|_p dy \text{ [9].}$$

3. ORLICZ UZAYLARI

3.1 Giriş

Orlicz uzayları 1932 yılında W. Orlicz tarafından, L^p $\left(1<p<\infty\right)$ Lebesgue uzaylarının genellemesi olarak verilmiştir. Bu genellemede L^p uzayları tanımındaki x^p fonksiyonu yerine N fonksiyonu olarak bilinen daha genel bir konveks Φ fonksiyonu alınmış ve Lebesgue uzayı üzerinde bir norm tanımlanmıştır. Orlicz uzayları üzerinde ilk ayrıntılı çalışma ise 1961 yılında M. A. Krasnosel'skii ve Yz. B. Rtuickii tarafından yapılmış ve Φ fonksiyonu N fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Bununla birlikte bazı kaynaklarda N fonksiyonu Young fonksiyon olarak adlandırılmıştır. Diğer yandan, Orlicz uzayları üzerinde uygulamaları da kapsayan daha geniş çalışmalar 1991 ve 2002 yıllarında M. M. Rao ve Z. D. Ren tarafından yapılmıştır [10].

Bu bölümde, Orlicz uzayı ile ilgili temel tanım ve teoremleri verilecektir.

Tanım 3.1.1: $\Omega\subset\mathbb{R}$ açık küme olsun. Bir $u:\Omega\to\mathbb{C}$ fonksiyonu verildiğinde eğer

$$\int_\Omega \left|u\left(x\right)\right|^p dx<\infty \tag{3.1}$$

ise $u\in L^p$ denir. $L^p\left(\Omega\right)$'da norm

$$\left\|u\right\|_p := \left(\int_\Omega \left|u\left(x\right)\right|^p dx\right)^{1/p} \tag{3.2}$$

verilmiştir.

Şimdi, $t\in\left[0,\infty\right)$ olmak üzere $\Phi\left(t\right)=t^p$ tanımlanır, (3.1) ve (3.2) yeniden yazılır ise

$$\int_\Omega \Phi\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)dx<\infty$$

ve

$$\left\|u\right\|_p=\Phi^{-1}\left(\int_\Omega \Phi\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)dx\right)$$

olur. Burada Φ^{-1}, Φ'nin ters fonksiyonudur: $\Phi^{-1}\left(t\right)=t^{1/p}$ [9].

Tanım 3.1.2: $\Phi=\left[0,\infty\right)\to\mathbb{R}$, $\Phi\geq 0$, Φ ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$\int_\Omega \Phi\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)dx<\infty$$

koşulunu sağlayan $\Phi:\Omega\to\mathbb{C}$ Lebesgue ölçülebilir Φ fonksiyonlarının ailesini gösteren $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$ kümesine Orlicz sınıfı denir. Ayrıca

$$\varrho(u,\Phi):=\int_{\Omega}\Phi(|u(x)|)\,dx$$

gösterimi kullanılır [9].

Not 3.1.3: $L^{p}(\Omega)$ da olduğu gibi hemen hemen her yerde eşitlik fonksiyonların eşitliği olarak alınacaktır [9].

3.2 Young Fonksiyonu, Jensen Eşitsizliği

Tanım 3.2.1: Bir $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\varphi(0)=0$, $s\geq 0$ için $\varphi(s)>0$, her $s\geq 0$ noktasında φ sağdan sürekli, $[0,\infty)$da φ azalmayan ve $\lim_{s\to\infty}\varphi(s)=\infty$ koşullarını sağlıyorsa,

$$\Phi(t):=\int_{0}^{t}\varphi(s)\,ds \qquad , \qquad t\geq 0$$

Koşulunu sağlayan Φ ye Young fonksiyonu denir [9].

Önerme 3.2.2: Φ Young fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde sürekli, negatif olmayan, kesin artan ve konveks fonksiyondur. Dahası,

i. $\Phi(0)=0,$

ii. $\Phi(\infty):=\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty,$

iii. $\lim_{t\to 0^{+}}\dfrac{\Phi(t)}{t}=0,$

iv. $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\Phi(t)}{t}=\infty,$

v. $\Phi(\alpha t)\leq\alpha\Phi(t)$, $\forall\alpha\in[0,1],$

vi. $\Phi(\beta t)\leq\beta\Phi(t)$, $\forall\beta>1$ ve $t\geq 0$,

olur [9].

Teorem 3.2.3: Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$ konveks kümedir ve $\mu(\Omega)<\infty$ iken $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)\subset L^{1}(\Omega)$ [9].

Teorem 3.2.4: $\mu(\Omega) < \propto$, $u \in L^1(\Omega)$ olsun. O zaman en az bir Φ young fonksiyon: $u \in \mathcal{L}^\Phi(\Omega)$ olur [9].

Teorem 3.2.5: (Jensen eşitsizliği)

Φ, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir konveks fonksiyon olsun.

(i) Eğer $t_1,...,t_n \in \mathbb{R},\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,...,\alpha_n > 0$ ise

$$\Phi\left(\frac{\alpha_1 t_1 + ... + \alpha_n t_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}\right) \le \frac{\alpha_1 \Phi(t_1) + ... + \alpha_n \Phi(t_n)}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}$$

(ii) $\alpha = \alpha(x)$ hemen hemen her $x \in \Omega$ için pozitif ise bu durumda,

$$\Phi\left(\frac{\int_\Omega u(x)\alpha(x)dx}{\int_\Omega \alpha(x)dx}\right) \le \frac{\int_\Omega \Phi(u(x))\alpha(x)dx}{\int_\Omega \alpha(x)dx}$$

eşitsizliği her $u(x) \ge 0$ fonksiyonu için sağlanır [9].

3.2.1 Eşlenik Fonksiyon

Tanım 3.2.6: Bir Young fonksiyonu

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \qquad , \qquad 0 \le t < \infty$$

olarak verilsin. Bu durumda

$$\psi(t) = \sup_{\varphi(s)\le t} s$$

olmak üzere

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds\ ,\ 0 \le t < \infty$$

fonksiyonu Φ'nin eşlenik fonksiyon adı alır [9].

Not 3.2.7: Eğer φ, $[0,\infty)$ da sürekli ve kesin artan ise ψ φ'nin ters fonksiyonu (yani $\psi = \varphi^{-1}$) olur. Bu durumda Φ ve Ψ birbirlerinin eşlenik fonksiyonlarıdır [9].

Teorem 3.2.8: (Young eşitsizliği)

Φ ve Ψ eşlenik Young fonksiyonlar çifti olsun. Bu durumda her $a,b \in [0,\infty)$ için

$$a,b \le \Phi(a) + \Psi(b)$$

sağlanır [9].

Teorem 3.2.9: Φ ve Ψ eşlenik young fonksiyonları çifti, $u \in \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$, $v \in \mathcal{L}^{\Psi}(\Omega)$ ise

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|\,dx \leq \varrho(u,\Phi) + \varrho(v,\Psi)$$

ve $uv \in L^{1}(\Omega)$ sağlanır [9].

3.3 Orlicz Uzayları

Tanım 3.3.1: Φ bir Young fonksiyon ve Ψ, Φ'nin eşlenik Young fonksiyonu olsun. $u, \Omega \subset \mathbb{R}$ de hemen hemen her yerde tanımlı ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$\|u\|_{\Phi} := \sup_{\varrho(v,\Psi)\leq 1} \int_{\Omega} |u(x)v(x)|\,dx \tag{3.3}$$

ifadesi u fonksiyonunun Orlicz normu adını alır.

Yani $L^{\Phi}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, u, \Omega \text{ da ölçülebilir fonksiyon ve } \varrho(u,\Psi) \leq 1 \text{ iken } \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)v(x)|\,dx < \infty \right\}$ kümesine Orlicz uzayı denir [9].

Önerme 3.3.2: Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega) \subset L^{\Phi}(\Omega) \tag{3.4}$$

ve

$\|u\|_{\Phi} \leq \varrho(u,\Phi) + 1$ [9].

Teorem 3.3.3: $L^{\Phi}(\Omega)$ vektör uzayıdır ve (3.3) ile tanımlanan fonksiyon $L^{\Phi}(\Omega)$ üzerinde bir norm olur [9].

Not 3.3.4: Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda Orlicz normu $\|.\|_{\Phi}$ monotondur; yani $u, w \in L^{\Phi}(\Omega)$ ve hemen hemen her $x \in \Omega$ için $|u(x)| \leq |w(x)|$ ise $\|u\|_{\Phi} \leq \|w\|_{\Phi}$ dir. Buna kısaca Lattice özelliği denir [9].

Önerme 3.3.5: Φ bir young fonksiyonu $E \subset \Omega$ ve $0 < \mu(E) < \infty$ olsun. O zaman

$$\|\chi_E\|_{\Phi} = \mu(E)\Psi^{-1}\left(\frac{1}{\mu(E)}\right).$$

Burada, Ψ Φ'nin eşlenik fonksiyonu, Ψ^{-1}, Ψ in tersidir [9].

3.3.1 Orlicz Uzayında Hölder Eşitsizliği

Not 3.3.6: (3.4)'den, eğer $u \in \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$ ise $u \in L^{\Phi}(\Omega)$ biliniyor. Bu bilgiyi şöyle genelleyebiliriz: eğer $\lambda > 0$ ve $\lambda u \in \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$ ise, o zaman $u \in L^{\Phi}(\Omega)$ dır.

Gerçekten de, eğer $\lambda u \in \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$ ise $\lambda u \in L^{\Phi}(\Omega)$ ve $L^{\Phi}(\Omega)$'nın vektör uzayı olması nedeniyle

$\lambda^{-1}(\lambda u) = u$, $u \in L^{\Phi}(\Omega)$

dır.

Bu bilginin tersi de doğrudur: eğer $u \in L^{\Phi}(\Omega)$ ise bir $\lambda > 0$ için $\lambda u \in \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$ dır [9].

Önerme 3.3.7: Φ bir Young fonksiyonu, $u \in L^{\Phi}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |u(x)| \frac{|v(x)|}{\varrho(v,\Psi)} dx \leq \|u\|_{\Phi} \quad , \quad \|u\|_{\Phi} \neq 0.$$

Buradan

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{\Phi}}\right) dx \leq 1 \text{ [9].}$$

Teorem 3.3.8: Φ ve Ψ birbirinin eşlenik Young fonksiyonları olsun, Hölder eşitsizliğinin

$$\left|\int_{\Omega} u(x) v(x) dx\right| \leq 2\|u\|_{\Phi} \|v\|_{\Psi} \tag{3.5}$$

Hölder eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir versiyonudur [9].

3.3.2 Δ_2 Koşulu

Tanım 3.3.9: Φ bir Young fonksiyonu olsun $k > 0$ ve $T \geq 0$ için

$\Phi(2t) \leq k\Phi(t)$ her $t \geq T$

Eşitliği sağlanıyor ise Δ_2 koşulunun sağlandığı ($\Phi \in \Delta_2$) söylenir [9].

Teorem 3.3.10: Φ bir Young fonksiyonu olsun ve $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds,\ t \in (0,\infty)$ olsun. O zaman Φ, Δ_2 koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty \text{ [9].}$$

Teorem 3.3.11: Φ Bir Young fonksiyonu ve Ψ, Φ'nin eşlenik Young fonksiyonu olsun. $\Phi \in \Delta_2 \Leftrightarrow \exists k_0 > 1 \wedge T_0 > 1$,

$\Psi(t) \leq \frac{1}{2k_0}\Psi(k_0 t)$ her $t \geq T_0$ [9].

3.4 $E^{\Phi}(\Omega)$ Uzayı

Tanım 3.4.1: Φ bir Young fonksiyonu olsun. $E^{\Phi}(\Omega)$ Uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$E^{\Phi}(\Omega) := \{u \in L^{\Phi}(\Omega); ku \in \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega) \text{ her } k > 0\}$ [9].

Not 3.4.2: Φ bir Young fonksiyonu olsun. $E^{\Phi}(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayıdır ve

$$E^{\Phi}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega) \subset L^{\Phi}(\Omega) \tag{3.6}$$

kapsamları geçerlidir [9].

Önerme 3.4.3: Eğer Φ, Δ_2 koşulu sağlayan bir Young fonksiyonu ise ($T = 0$ ve $\mu(\Omega) = \infty$), o zaman

$$E^{\Phi}(\Omega) = \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega) = L^{\Phi}(\Omega) \tag{3.7}$$

olur [9].

İspat. $u \in L^{\Phi}(\Omega)$ olsun. O zaman $\lambda u \in \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ vardır. $k > 0$ olsun. O zaman $\Phi \in \Delta_2$ için

$\Phi(kt) \leq C\Phi(\lambda t)$, her $t \in [T, \infty)$

olacak şekilde bir $C > 0$ olduğu sonucu çıkar. Böylece,

$\int_{\Omega} \Phi(k|u(x)|)dx \leq C\int_{\Omega} \Phi(\lambda|u(x)|)dx < \infty$,

dolayısıyla $u \in E^{\Phi}(\Omega)$. Bu, $L^{\Phi}(\Omega) \subset E^{\Phi}(\Omega)$ olduğunu gösterir ve (3.7), (3.6)'den çıkar.

Lemma 3.4.4: $v \in L^{\Psi}(\Omega)$ olsun,

$F_v(u) = \int_{\Omega} u(x)v(u)dx$

şeklinde tanımlanan doğrusal fonksiyonel F_v, $\left[L^{\Phi}(\Omega)\right]'$ dual uzayına aittir ve bu uzaydaki normu $\|F_v\|$ için,

$$\|v\|_{\Psi} \le \|F_v\| \le 2\|v\|_{\Psi}$$

eşitsizliği sağlanır [11].

Teorem 3.4.5:

i) C_0, $E^{\Phi}(\Omega)$'nın yoğun alt kümesidir.

ii) $E^{\Phi}(\Omega)$ ayrılabilir [11].

Teorem 3.4.6:

i) Eğer J_ε düzgün fonksiyon ise, o zaman her $u \in E^{\Phi}(\Omega)$ için $\lim_{\varepsilon \to 0+} J_\varepsilon * u = u \quad E^{\Phi}(\Omega)$ normudur.

ii) C_0^{∞}, $E^{\Phi}(\Omega)$'nın yoğun alt kümesidir [11].

İspat. i'yi ele alalım ve $L^{\Psi}(\Omega)$ olsun. O zaman Hölder eşitsizliği (3.5) ile

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \left(J_\varepsilon * u(x) - u(x)\right) v(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} J(y)\,dy \int_{\mathbb{R}} |u(x-\varepsilon y) - u(x)||v(x)|\,dx$$

$$\le 2\|v\|_{\Psi} \int_{|y|\le 1} J(y) \|u_{\varepsilon y} - u\|_{\Phi}\,dy$$

olur, burada $u_{\varepsilon y}(x) = u(x-\varepsilon y)$. Böylece Teorem 3.4.4 yardımı ile

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_{\Phi} = \sup_{\|v\|_{\Psi}\le 1} \left|\int_{\mathbb{R}} \left(J_\varepsilon * u(x) - u(x)\right) v(x)\,dx\right|$$

$$\le 2\int_{|y|\le 1} J(y) \|u_{\varepsilon y} - u\|_{\mathbb{R}}\,dy.$$

Herhangi bir $\delta > 0$ verildiğinde $\|u - \tilde{u}\|_{\Phi} < \delta/6$ olacak şekilde $\tilde{u} \in C_0$ bulabiliriz. Ayrıca, $\|u_{\varepsilon y} - \tilde{u}_{\varepsilon y}\|_{\Phi} < \delta/6$ olur ve yeterince küçük ε ve $|y| \le 1$ için, $\|\tilde{u}_{\varepsilon y} - \tilde{u}\|_{\Phi} < \delta/6$. Böylece $\|J_\varepsilon * u - u\|_{\Phi} < \delta$ δ keyfi olduğundan son eşitsizlik i'yi verir.

ii) i ve Teorem 3.4.5'in sonucudur.

4. GAUSS-WEIERSTRASS SİNGÜLER İNTEGRALİ

4.1 Giriş

$f \in X(\mathbb{R})$ bir fonksiyon, $t \to 0+$ bir parametre olmak üzere

$$W(f;x;t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \exp\left\{\frac{-u^2}{4t}\right\} du \tag{4.1}$$

ile tanımlanan singüler integral Gauss-Weierstrass singüler integrali denir. (4.1) singüler integrali Fejer tipinde bir singüler integraldir.

$$\chi(x) = 2^{-1/2} \exp\left\{\frac{-x^2}{4}\right\} \equiv w(x); \qquad \rho = t^{-1/2} \tag{4.2}$$

alınarak Fejer tipinde bir singüler integral olur. Gerçekten de, $w(x)$ $C_0 \cap L^1$'e ait çift ve pozitif bir fonksiyondur ve $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-u^2\}\, du = \sqrt{\pi}$ olduğundan aslında $w \in NL^1$'dir [8].

Sonuç 4.1.1: $f \in X(\mathbb{R})$ için (4.1) Gauss-Weierstrass singüler integrali, her $x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için vardır ve $X(\mathbb{R}) \cap C$ 'de bir fonksiyon tanımlar,

$$\|W(f;\circ;t)\|_{X(\mathbb{R})} \le \|f\|_{X(\mathbb{R})} \qquad , \qquad (t > 0),$$

ve

$$\lim_{t \to 0+} \|W(f;\circ;t) - f(\circ)\|_{X(\mathbb{R})} = 0. \tag{4.3}$$

Weierstrass'ın periyodik çekirdeği ve Gauss-Weierstrass'ın periyodik olmayan çekirdeği arasında aşağıda verilen tipte bir ilişki vardır:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-|k|^2 t\right\} \cos kx = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-(x+2k\pi)^2 / 4t\right\} \qquad , \qquad (t > 0)$$

Gauss-Weierstrass singüler integralinin bir başka önemli yönü ise: her $f \in X(\mathbb{R})$ ve $t > 0$ için $W(f;x;t) \in C_\infty$. Böylece, (4.3)'e göre, $\{W(f;x;t)\}$ fonksiyonlar kümesi, $X(\mathbb{R})$ de iyi tanımlı, yoğun bir alt küme oluşturur. Ayrıca, integral (4.1), sonsuz bir çubuk için ısı denkleminin başlangıç değer probleminin bir çözümüdür, yani $f \in X(\mathbb{R})$, başlangıç sıcaklık dağılımı olmak üzere

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad , \qquad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

$\lim_{t\to 0+} \left\| u(\circ,t) - f(\circ) \right\|_{X(\mathbb{R})} = 0$ [8].

Sonuç 4.1.2: $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$ ve $W(f;x;t)$ Gauss-Weierstrass singüler integrali, $P(f;x;y)$ ise Cauchy-Poisson'un singüler integrali olsun. O zaman hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{t\to 0+} W(f;x;t) = f(x) \qquad , \qquad \lim_{y\to 0+} P(f;x;y) = f(x).$$

$f \in W^2_{X(\mathbb{R})}$'nin Gauss-Weierstrass singüler integrali $\phi \in AC^{r-1}_{loc}$ ile $\phi^{(k)} \in X(\mathbb{R})$, $k = 0,1,\ldots,r$ için

$$\lim_{t\to 0+} \left\| t^{-1}\left[W(f;\circ;t) - f(\circ) \right] - \phi^{(2)}(\circ) \right\|_{X(\mathbb{R})} = 0 \text{ [8].}$$

Sonuç 4.1.3: $W(f;x;t)$ Gauss-Weierstrass singüler integrali olsun ve $f \in X(\mathbb{R})$ olsun.

(i) $0 < \alpha < 2$ için, $f \in Lip^*\left(X(\mathbb{R});\alpha\right) \Leftrightarrow \left\| W(f;\circ;t) - f(\circ) \right\|_{X(\mathbb{R})} = O\left(t^{\alpha/2}\right)$, $\quad t \to 0+$,

(ii) $f \in Lip^*\left(X(\mathbb{R});2\right) \Rightarrow \left\| W(f;\circ;t) - f(\circ) \right\|_{X(\mathbb{R})} = O(t)$, $\quad t \to 0+$

[8].

4.2 Gauss-Weierstrass singüler İntegrali

W sınıfı, her $\alpha > 0$ için

$$\lim_{|x|\to\infty} e^{-\alpha x^2} \left| f(x) \right| = 0$$

özelliği yardımıyla sonsuza giden tüm $f \in C_{loc}$ fonksiyonların sınıfını göstersin. Örneğin, her cebirsel polinom W sınıfına aittir. Her $f \in W$ ve $t > 0$ için $W(f;x;t)$ integrali, C_{loc} sınıfındadır ve iyi tanımlıdır. Ayrıca,

$$W(1;x;t) = 1, \qquad W(u;x;t) = x.$$

Reel değerli bir f fonksiyonu için, her $x \in \mathbb{R}$ ve $h > 0$ için $\Delta_h^2 f(x) \ge 0$ koşulu sağlanıyorsa f ye $\mathbb{R}$'de konveks denir. $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyon sabit olmadıkça sınırlı olamaz [8].

Önerme 4.2.1: $f \in W$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks ise, o zaman $W(f;x;t)$ her $t>0$ için $\mathbb{R}$ üzerinde konvekstir.

Gerçekten de,

$$\Delta_h^2 W(f;x;t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_h^2 f(x-u) \exp\{-u^2/4t\}\, du$$

eşitliği yardımıyla, çekirdek pozitif olduğu için, $\Delta_h^2 W(f;x;t) \geq 0$ elde edilir [8].

Önerme 4.2.2: Eğer $f \in W$ konveks ise, o zaman $W(f;x;t) \geq f(x)$ eşitsizliği her $x \in \mathbb{R}$ ve $t>0$ için geçerlidir [8].

Önerme 4.2.3: $f \in W$ olsun. O zaman her $x \in \mathbb{R}$ ve her $0<\delta<\eta$ sabit çifti için

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\int_{\eta}^{\infty} |f(x \pm u)| \exp\{-u^2/4t\}\, du}{\int_{\delta}^{\eta} \exp\{-u^2/4t\}\, du} = 0 \text{ [8].}$$

Lemma 4.2.4: $f \in W$ ise, her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{t\to 0+} W(f;x;t) = f(x)$ olur [8].

Önerme 4.2.5: $f \in W$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $t>0$ için $W(f;x;t) \geq f(x)$ ise, f konvekstir [8].

Önerme 4.2.6: $f \in W$ konveks ise, her $x \in \mathbb{R}$ ve $0<t_2<t_1$ için $W(f;x;t_1) \geq W(f;x;t_2)$ olur [8].

Önerme 4.2.7: $f \in W$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $0<t_2<t_1$ için $W(f;x;t_1) \geq W(f;x;t_2)$ ise, f konvekstir [8].

Teorem 4.2.8: $f \in W$ ve $W(f;x;t)$ Gauss-Weierstrass singüler integrali olsun.

(i) f'nin $\mathbb{R}$ üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x \in \mathbb{R}$ ve $t>0$ için $W(f;x;t) \geq f(x)$ olmasıdır.

(ii) f 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < t_2 < t_1$ için $W\left(f;x;t_1\right) \geq W\left(f;x;t_2\right)$ olmasıdır [8].

Teorem 4.2.9: Sonsuz bir çubukta ısı akışı ile ilgili problemin tek bir çözümü vardır. Başlangıç değeri f ile ilişkili Gauss-Weierstrass singüler integrali (4.1) ile verilir.

Çubuk boyunca dağıtılan ısı kaynakları $F\left(x,t\right)$ ile ilgili probleminde inceleyelim. Bu durum homojen olmayan aşağıdaki denklem ile tanımlanır:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2} + F\left(x,t\right) \quad , \quad \left(x \in \mathbb{R}, t > 0\right).$$

$$\frac{\partial u^{\wedge}\left(v,t\right)}{\partial t} + v^2 u^{\wedge}\left(v,t\right) = F^{\wedge}\left(v,t\right) \quad , \quad \left(t > 0\right).\ [8].$$

4.2.1 Genel Weierstrass Singüler İntegrali

Önerme 4.2.10: Her $\kappa > 0$ için, $w_\kappa^{\wedge}(v) = \exp\left\{-\left|v\right|^{\kappa}\right\}$ olacak şekilde çift bir $w_\kappa \in NL^1$ vardır. Aslında,

$$w_\kappa\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left|v\right|^{\kappa}\right\} \exp\left\{ixv\right\} dv. \tag{4.4}$$

Her $t > 0$ ve $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$ için,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-t\left|v\right|^{\kappa}\right\} f^{\wedge}\left(v\right) \exp\left\{ixv\right\} dv = \frac{t^{-1/\kappa}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x-u\right) w_\kappa\left(t^{-1/\kappa} u\right) du. \tag{4.5}$$

$w_\kappa \in NL^1$ olduğundan, (4.5)'in sağ tarafı artık herhangi bir $f \in X\left(\mathbb{R}\right)$ için tanımlanmıştır. Bu, $\rho = t^{-1/\kappa}$ olan ve $W_\kappa\left(f;x;t\right)$ ile gösterilen singüler integral Fejer tipinde bir singüler integraldir, dolayısıyla

$$W_\kappa\left(f;x;t\right) = \frac{t^{-1/\kappa}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x-u\right) w_\kappa\left(t^{-1/\kappa} u\right) du. \tag{4.6}$$

Genel Weierstrass singüler integrali olarak adlandırılır.

Her $\kappa > 0$ için $w_\kappa \in NL^1$ dir; ancak (4.4)'ü göz önünde bulundurarak $w_\kappa \in C_0$ da varsayabiliriz. Ayrıca $0 < \kappa \leq 2$ için pozitif bir fonksiyondur. $0 < \kappa \leq 1$ için bu, $\left(0,\infty\right)$ üzerinde $w_\kappa^{\wedge}\left(v\right)$ konveks olur [8].

Lemma 4.2.11: Fejer tipindeki $\{\rho\chi(\rho x)\}$ çekirdeği, her $\chi \in NL^1$ için "birime yakınsama özelliği(aproximate identity)" tanımlar [8].

Şimdi, w_κ aşağıdaki gibi $\alpha = \kappa$ ve $c = -1$ ile sağlar,

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\overset{\wedge}{w_\kappa}(v) - 1}{|v|^\kappa} = -1$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$\chi \in NL^1$ olsun, sabitler ise $c \neq 0$ ve $\alpha > 0$ olsun

$$\lim_{v\to 0} \frac{\chi^\wedge(v) - 1}{|v|^\alpha} = c$$

$\alpha = \kappa$ ve $c = -1$ periyodik durumda olduğu gibi aşağıdaki eşitliği kullanalım.

$$\frac{\exp\left\{-|v|^\kappa\right\} - 1}{-|v|^\kappa} = \int_0^1 \exp\left\{-|v|^\kappa \tau\right\} d\tau. \tag{4.7}$$

Böylece

$$\frac{\overset{\wedge}{w_\kappa}(v) - 1}{-|v|^\kappa} = \int_0^1 \left[\tau^{-1/\kappa} w_\kappa\left(\tau^{-1/\kappa} \circ\right)\right]^\wedge (v)\, d\tau = \left[\int_0^1 \left\{\tau^{-1/\kappa} w_\kappa\left(\tau^{-1/\kappa} \circ\right)\right\} d\tau\right]^\wedge (v),$$

ve integrasyon sırası değişikliği Fubini teoremi ile gerçekleştirilebilir, çünkü

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\tau^{-1/\kappa} w_\kappa\left(\tau^{-1/\kappa} x\right)\right| dx\right\} d\tau \leq \|w_\kappa\|_1.$$

Böylece w_κ, $\chi \in NL^1$ olsun, sabitler ise $c \neq 0$, $\alpha > 0$ ve her $v \neq 0$ için fonksiyon $h \in NL^1$ olsun

$$\frac{\chi^\wedge(v) - 1}{c|v|^\alpha} = h^\wedge(v),$$

$h(x) = \int_0^1 \tau^{-1/\kappa} w_\kappa\left(\tau^{-1/\kappa} x\right) d\tau$ ile sağlar [8].

Teorem 4.2.12: $\kappa > 0$ ve $w_\kappa \in NL^1$ olsun, (4.4) için,

i) $w_\kappa(x)$'in her $1 < \kappa \leq 2$ için x pozitif bir fonksiyondur.

ii) $w_\kappa(x)$'in her $2 < \kappa < \infty$ için x pozitif bir fonksiyon değildir.

iii) $x \neq 0$ için

$$w_\kappa(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{|x|}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{-1}{|x|^{\kappa}}\right)^{k}\dfrac{\Gamma(1+k\kappa)}{k!}\sin\dfrac{k\kappa\pi}{2}, & 0<\kappa<1 \\ -2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{|x|^{k}\sin\left(3(k+1)\pi/2\right)}{(k+1)!}\Gamma\left(\dfrac{k+1}{\kappa}+1\right), & 1\le\kappa \end{cases} \qquad [8].$$

Önerme 4.2.13: (4.7) özdeşliğin, Genel Weierstrass singüler integralinin yarı grup özelliğine bağımlıdır. Başka bir deyişle, $W_\kappa(t)$ sınırlı lineer operatörleri her $f\in X(\mathbb{R})$ için aşağıdaki fonksiyonel denklemi sağlar:

$$W_\kappa(t_1)\{W_\kappa(t_2)f\}=W_\kappa(t_1+t_2)f \qquad , \qquad (t_1,t_2>0).$$

Fubini teoremi aracılığıyla eşitlik elde edilebilir.

Bu aşamada, $\kappa=1$ için (4.6) integrali Cauchy-Poisson integraline dönüşür:

$$W_1(f;x;t)=P(f;x;y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-u)}{u^2+y^2}du.$$

Bilindiği üzere W_1 integrali üst yarı düzlem için Dirichlet probleminin tek çözümüdür. Bu çözümün $y=0$ sınırında davranışı önemlidir. f sınır değerine mümkün olan en iyi yaklaşım sırası ve bu sıranın elde edilmesi için f üzerine gerekli ve yeterli koşullar aşağıda verilmiştir.

$\kappa=2$ olduğunda ise (4.6) integrali Gauss-Weierstrass integraline dönüşür ve (4.1)'i verir [8].

Önerme 4.2.14: $f\in L^1$ olsun.

(i) Eğer $\liminf\limits_{y\to 0+}\left\|y^{-1}\left[P(f;\circ;y)-f(\circ)\right]-g(\circ)\right\|_1=0$ olacak şekilde bir $g\in L^1$ varsa, o zaman $f^{\sim}$, türevi hemen hemen her yerde L^1'de olan AC_{loc}'ın bir fonksiyonuna eşittir. Özel halde, $\left\|P(f;\circ;y)-f(\circ)\right\|_1=o(y)$, $y\to 0+$ ise $f=0$ dır.

(ii) $0<\alpha<1$ için: $\left\|P(f;\circ;y)-f(\circ)\right\|_1=O(y^{\alpha})\Leftrightarrow f\in Lip(L^1;\alpha)$

$\alpha=1$: $\left\|P(f;\circ;y)-f(\circ)\right\|_1=O(y)\Leftrightarrow f^{\sim}$ hemen hemen her yerde BV 'deki bir fonksiyona eşittir.

Bu teorem bize, hemen hemen her yerde f sıfır olmadıkça, küçük y için Dirichlet probleminin çözümünün f sınır değerinden L^1-normuna göre farkının en fazla $O(y)$

olduğunu söyler ve $O(y)$ derecesi ancak ve ancak $f^{\sim}$ f 'nin Hilbert dönüşümü BV 'deki bir fonksiyona eşdeğerse gerçekleşebilir. Ayrıca, ancak ve ancak f bir $Lip(L^1;\alpha)$-fonksiyonu ise, yaklaşım derecesi $O(y^{\alpha})$, $(0<\alpha<1)$ ile verilir [8].

Önerme 4.2.15: $f \in L^p$, $1 \le p \le 2$ durumunda $W(f;x;t)$ Gauss Weierstrass integrali için aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $f \in W\left[L^p;|v|^{2r-2}\right]$ ve $\left\|\nabla_{2r}W(f;\circ;t)\right\|_p = o(t^r)$, $t \to 0+$ ise, *hemen hemen her yerde* $f(x)=0$.

b) Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktirler:

(i) $f \in W\left[L^p;|v|^{2r-2}\right]$ ve $\left\|\nabla_{2r}W(f;\circ;t)\right\|_p = O(t^r)$, $t \to 0+$ sağlanır,

(ii) $f \in V\left[L^p;|v|^{2r}\right]$,

(iii) $f \in W\left[L^p;|v|^{2r-2}\right]$ hemen hemen her

$$\nabla_{2r}W(f;x;t) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{r-1}\begin{Bmatrix} W(d\mu;x;\tau) \\ W(g;x;\tau) \end{Bmatrix} d\tau,$$

olacak şekilde $p=1$ iken bir $\mu \in BV$, $1<p\le 2$ iken bir $g \in L^p$ vardır.

(iv) $f(x) = \int_{-\infty}^{x} du_1 \int_{-\infty}^{u_1} du_2 \ldots \int_{-\infty}^{u_{2r-1}} du_1 \begin{Bmatrix} d\mu(u_{2r}) \\ g(u_{2r})\,du_{2r} \end{Bmatrix},$

olacak şekilde hemen hemen her yerde $p=1$ iken bir $\mu \in BV$, $1<p\le 2$ iken bir $g \in L^p$ vardır.

(v) f 'nin $2r$. Peano farkı vardır, öyle ki $\left\|\lozenge_h^{2r} f(\circ)\right\|_p = O(h^{2r})$, $h \to 0$,

(vi) $\left\|\Delta_h^{2r} f(\circ)\right\|_p = O(h^{2r})$, $(h \to 0)$ [8].

5. SONUÇ

Tanım 5.1: ρ sonsuza giden pozitif bir parametre olsun. Fonksiyon kümesi $\{\chi(x;\rho)\}$, her $\rho>0$ için $\chi(\circ;\rho)\in L^1$ ise periyodik olmayan bir çekirdek veya $\mathbb{R}$ üzerinde bir çekirdek olarak adlandırılacaktır ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi(u;\rho)\,du=\sqrt{2\pi} \qquad , \qquad (\rho>0). \tag{5.1}$$

Bir çekirdek $\{\chi(x;\rho)\}$, eğer $\chi(x;\rho)$, her $\rho>0$ için x'in gerçek, sınırlı, sürekli veya kesinlikle sürekli bir fonksiyonu ise gerçek, sınırlı, sürekli veya kesinlikle süreklidir. Bir gerçek çekirdek $\{\chi(x;\rho)\}$, eğer $\chi(x;\rho)=\chi(-x;\rho)$ veya $\chi(x;\rho)\geq 0$ ise hemen hemen her yerde $\rho>0$ için çift veya pozitiftir [8].

Tanım 5.2: $f\in X(\mathbb{R})$ için konvolüsyonu,

$$I(f;x;\rho)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-u)\,\chi(u;\rho)du \tag{5.2}$$

$\{\chi(x;\rho)\}$ çekirdeği tarafından üretilen bir singüler integral olarak adlandırılır. Çekirdek pozitif(sürekli) ise singüler integralin pozitif(sürekli) olduğu söylenir [8].

Önerme 5.3: $f\in X(\mathbb{R})$ ve $\{\chi(x;\rho)\}$ bir çekirdek olsun. Her $\rho>0$ için,

$I(f;\circ;\rho)\in X(\mathbb{R})$ ve

$$\left\|I(f;\circ;\rho)\right\|_{X(\mathbb{R})}\leq\left\|\chi(\circ;\rho)\right\|_1\left\|f\right\|_{X(\mathbb{R})} \tag{5.3}$$

(2.2) integrali, her $\rho>0$ için $X(\mathbb{R})$ den $X(\mathbb{R})$'ye sınırlıdır [8].

Tanım 5.4: Bir $\{\chi(x;\rho)\}$ çekirdeği verildiğinde bir $M>0$ sabiti için,

$$\left\|\chi(\circ;\rho)\right\|_1\leq M \qquad , \qquad (\rho>0) \tag{5.4}$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\delta\leq|u|}\left|\chi(u;\rho)\right|du=0 \qquad , \qquad (\delta>0) \tag{5.5}$$

Koşulunu sağlayan $\{\chi(x;\rho)\}$ çekirdeğine $\mathbb{R}$ üzerinde birime yakınsama özelliği vardır denir. (5.5)'e ilaveten bazen aşağıdaki özellikte kullanılır:

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\sup_{\delta\le|u|}\left|\chi(u;\rho)\right|\right]=0 \qquad , \qquad (\delta>0). \tag{5.6}$$

Örneklerin çoğunda çekirdeğin $\rho>0$ parametresine bağımlılığının $\chi(x;\rho)=\rho\chi(\rho x)$ ile verilir [8].

Lemma 5.5: $\{\rho\chi(\rho x)\}$ her $\chi\in NL^1$ için birime yakınsama özelliği vardır

Fejer tipi çekirdekler olduğu söylenen bu tür çekirdekler için, singüler integral (5.2) şu şekilde gösterilir:

$$J(f;x;\rho)=\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\chi(\rho u)\,du \tag{5.7}$$

ve Fejer tipinde bir singüler integral olarak adlandırılır. Her $\chi\in NL^1$, $\{\rho\chi(\rho x)\}$ yoluyla bir çekirdek (ve hatta yaklaşık bir özdeşlik) ürettiğinden, gösterimi kısaltacağız ve χ'in kendisini de bir çekirdek olarak adlandıracağız [8].

Singüler integrallerin yakınsaklığı ile ilgili olarak şunu elde ederiz:

Teorem 5.6: (5.2) singüler integralin çekirdeği $\{\chi(x;\rho)\}$ birime yakınsama özelliği var ise, o zaman her $f\in X(\mathbb{R})$ için,

$$\lim_{\rho\to\infty}\left\|I(f;\circ;\rho)-f(\circ)\right\|_{X(\mathbb{R})}=0 \text{ [8].} \tag{5.8}$$

İspat: Öncelikle (5.3) ve (5.4) açısından singüler integral (5.2)'ün $X(\mathbb{R})$ üzerinde $\rho\in\mathbb{A}$ ya göre düzgün sınırlı operatörler kümesini tanımladığını belirtelim. (5.1)'e göre

$$I(f;x;\rho)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x-u)-f(x)\right]\chi(u;\rho)du$$

$X(\mathbb{R})=C$ durumunda, herhangi bir $\delta>0$ için,

$$\left\|I(f;\circ;\rho)-f(\circ)\right\|_{X(\mathbb{R})}\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|f(\circ-u)-f(\circ)\right\|_{X(\mathbb{R})}\left|\chi(u;\rho)\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{|u|\le\delta}+\int\limits_{\delta\le|u|}\right)\left\|f(\circ-u)-f(\circ)\right\|_{X(\mathbb{R})}\left|\chi(u;\rho)\right|du\equiv I_1+I_2. \tag{5.9}$$

f düzgün sürekli olduğundan, her $\varepsilon>0$ için $\left\|f(\circ-u)-f(\circ)\right\|_{X(\mathbb{R})}\le\varepsilon$ tüm $|u|\le\delta$ için olacak şekilde bir $\delta>0$ vardır. Bu, $I_1\le\varepsilon M$ anlamına gelir. Şimdi δ sabitini alalım.

O zaman

$$I_2 \le 2\| f\|_{X(\mathbb{R})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta\le|u|} |\chi(u;\rho)|du,$$

(5.5)'ya göre $\rho\to\infty$ olduğunda sıfıra yaklaşır. Bu nedenle (5.8) $X(\mathbb{R})=C$ durumunda geçerlidir. Eğer $X(\mathbb{R})=L^p$, $1\le p<\infty$ ise, (5.9)'u çıkarmak için genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğini kullanırız. f ortalamada sürekli olduğundan,

$$\| f(x+h)-f(x)\|_{L^p}\to 0 \qquad , \qquad h\to 0$$

kanıt aynen devam eder.

Eğer $X(\mathbb{R})$'yi L^p ile değiştirirsek, (5.8) artık geçerli olmak zorunda değildir çünkü f bu normda sürekli olmak zorunda değildir. O zaman

Önerme 5.7: $f\in L^\infty$ olsun. Eğer (5.2) integralin çekirdeği birime yakınsama özelliği var ise, o zaman her $h\in L^1$ için

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[I(f;x;\rho)-f(x)\right]h(x)dx=0 \text{ [8].} \qquad (5.10)$$

İspat: Tekrar (5.8) geçerlidir ve dolayısıyla Fubini teoremi her $h\in L^1$ ve $\delta>0$ için geçerlidir

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[I(f;x;\rho)-f(x)\right]h(x)dx\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(u;\rho)du\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x-u)-f(x)\right]h(x)dx\right\}\right|$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{|u|\le\delta}+\int_{\delta\le|u|}\right)|\chi(u;\rho)|du\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left[h(x-u)-h(x)dx\right]\right|\equiv I_1+I_2\,.$$

Ancak $h\in L^1$, ortalamada sürekli olduğundan, her $\varepsilon>0$ için $\left\|h(\circ+u)-h(\circ)\right\|_1\le\varepsilon$'yi tüm $|u|\le\delta$ için sağlayacak bir δ vardır. Böylece

$$I_1\le M\sup_{|u|\le\delta}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left[h(x+u)-h(x)\right]dx\right|\le M\| f\|_\infty 2\pi\varepsilon\,.$$

Üstelik

$$I_2\le 2\| f\|_\infty \|h\|_1\int_{\delta\le|u|}|\chi(u;\rho)|du,$$

bu da (5.5)'nın ışığında (5.10)'i kanıtlar.

Teorem 5.8: Φ bir Young fonksiyonu olsun ve Φ, Δ_2 koşulunu sağlasın. Her $f \in L^{\Phi}$ ve (4.4) singüler integrali için,

$$\lim_{t\to\infty}\left\|W_{\kappa}\left(f;\circ;t\right)-f\left(\circ\right)\right\|_{\Phi}=0 .$$

İspat: (5.3) ve (5.4) özellikleri göz önüne alındığında (4.4) singüler integrali L^{Φ} üzerinde $t \in \mathbb{A}$ ya göre düzgün sınırlı operatörler olur. (5.1)'e göre

$$W_{\kappa}\left(f;x;t\right)-f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x-u\right)-f\left(x\right)\right]\left\{t^{-1/\kappa}w_{\kappa}\left(t^{-1/\kappa}u\right)\right\}du,$$

$C_0^{\infty}\subset L^{\Phi}$ olduğundan önce $f \in C_0^{\infty}$ durumuna bakalım, herhangi bir $\delta>0$ için genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği yardımıyla,

$$\left\|W_{\kappa}\left(f;\circ;t\right)-f\left(\circ\right)\right\|_{\Phi}\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|f\left(\circ-u\right)-f\left(\circ\right)\right\|_{\Phi}\left|t^{-1/\kappa}w_{\kappa}\left(t^{-1/\kappa}u\right)\right|du$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{|u|\leq\delta}\int_{\delta\leq|u|}\right)\left\|f\left(\circ-u\right)-f\left(\circ\right)\right\|_{\Phi}\left|t^{-1/\kappa}w_{\kappa}\left(t^{-1/\kappa}u\right)\right|du\equiv I_1+I_2 .$$

f düzgün sürekli olduğundan, her $\varepsilon>0$ ve $\exists\delta>0:\forall|u|\leq\delta$ için $\left\|f\left(\circ-u\right)-f\left(\circ\right)\right\|_{\Phi}\leq\varepsilon$.

Bu $I_1\leq\varepsilon M$ anlamına gelir.

Şimdi δ sabitini alalım. O zaman

$$I_2\leq 2\left\|f\right\|_{\Phi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\delta\leq|u|}\left|t^{-1/\kappa}w_{\kappa}\left(t^{-1/\kappa}u\right)\right|du$$

(5.5)'e göre $\rho\to\infty$ iken I_2 sıfıra yakınsar ve ispat tamamlanır.

.

6. KAYNAKLAR

[1] Y. Soykan, *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık TİC. LTD. ŞTİ., Türkiye, 2016.

[2] M. Balcı, *Reel Analiz*, Ankara Üniversitesi, Ankara, 2000.

[3] C. Cinbat, *Singular İntegral Operatörleri ile Yaklaşım*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniv., Ankara, 2021.

[4] L. Akın, *İntegral Operatör Aileleriyle Genelleştirilmiş Türevlere Yaklaşım*, Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniv., Şanlıurfa, 2008.

[5] C.P. Niculescu and L.E. Persson, *Convex functions and their applications,* Springer, Canada, 2004.

[6] N. Yılmaz, *Değişken Üslü Uzaylarda Hardy Eşitsizlikleri ve Bazı Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniv., Kırşehir, 2012.

[7] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano, *Thomas's Calculus*, Addison Wesley, American, 2004.

[8] P.L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Academic Press, Great Britain, 1971.

[9] L. Pick, A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function Spaces*, De Gruyter, Germany, 2013.

[10] M. M. Rao, Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1991.

[11] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 2003.

[12] M. A. Krasnosel'skii, Yz. B. Rtuickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Netherlands, 1961.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Çağrı TANRIÖVER

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2025
Lisans	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi/Matematik	2016
Lise	Ali Haydar Önder Lisesi	2010