T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

H ALPHA- LOKAL FONKSİYON VE İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA ONUN ÖZELLİKLERİ

SEHER ZORLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ (Tez Danışmanı)**

: **Prof. Dr. Fırat ATEŞ**

: **Dr. Öğr.Üyesi Ahmet EMİN**

BALIKESİR, HAZİRAN-2025

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**H Alpha-Lokal Fonksiyon ve İdeal Topolojik Uzaylarda Onun Özellikleri**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Seher ZORLU

ÖZET

H ALPHA LOKAL FONKSİYON VE İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA ONUN ÖZELLİKLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SEHER ZORLU
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AHU AÇIKGÖZ)
BALIKESİR, HAZİRAN-2025

Çalıştığımız lisansüstü yazımda Fadhil Abbasi'nin tanımladığı h-açık kümeler nosyonundan yararlanarak hα-lokal fonksiyon kavramı sunulmuş ve sistematik bir şekilde detaylı incelenmiştir. hα-açık kümeler ile topolojik yapı oluşturup oluşturulmayacağı sorususunu cevabı araştırılmıştır. Burada beş bölümden oluşan bir çalışma hazırlanmıştır. Birinci bölümde, tezimizin giriş kısmı bulunmaktadır.Giriş kısımda,tezde yer alan nosyonların kısa biçimde tarihsel bulguları açıklanmıştır. İkinci kısımda,üzerinde çalıştığımız konuda yer alan ideal topolojik uzaylar ile ilgili öncelikli bilgiler sunulmuştur. Üçüncü kısımda, tarafımızdan tanımlanan hα-açık küme nosyonu tanıtılmış, h-açık küme ile hα-açık küme karşılaştırılıp örneklerle gösterilmiştir. Ayrıca hα-açık kümelerin topolojik yapı oluşturabileceği kanıtlanmıştır. Dördüncü kısımda, hα-komşuluk ve hα-açık komşuluk kavramları verilmiş ve hα-lokal fonksiyonksiyonun özellikleri ayrıntılı incelenip ihtiyaç duyulan örnekler bulunmuştur. Aynı zamanda bu kısımda $Cl^*_{h\alpha}$ işlemi tanıtılmış ve gereken teoremleri örnekleriyle birlikte sunulmuştur. Beşinci kısımda, $\zeta_{g\text{-}h\alpha}$-kapalı küme ve ζ_{s^*g}-hα-kapalı küme kavramları tarafımızca verilmiş olup ζs_{*g}-kapalı kümesiyle karşılaştırıp gereken ters örnekler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: $Cl^*_{h\alpha}$ işlemi,hα-açık küme, hα-lokal fonksiyon, Ideal topolojik Uzaylar, $\zeta_{g\text{-}h\alpha}$-kapalı küme, ζ_{s^*g} -hα-kapalı küme, lokal fonksiyon

Bilim Kodu: 20405 Sayfa Sayısı: 21

ABSTRACT

H ALPHA-LOCAL FUNCTIONS IN TOPOLOGICAL SPACES
MSC THESIS
SEHER ZORLU
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS EDUCATION
(SUPERVISOR: PROF. DR. AHU AÇIKGÖZ)
BALIKESİR, JUNE - 2025

In this academic work, the concept of the hα-local function is introduced and thoroughly analyzed through the framework of h-open sets, initially defined by Fadhil Abbasi. The study explores whether a topological structure can be constructed based on hα-open sets. The thesis is organized into five main chapters.
The first chapter serves as an introduction and provides a concise overview of the historical development of the core concepts discussed throughout the thesis.
The second chapter outlines the fundamental definitions and properties related to ideal topological spaces, which form the groundwork of the subject matter under investigation.
In the third chapter, the concept of the hα-open set—proposed in this study—is introduced. A comparative analysis is conducted between h-open sets and hα-open sets, and illustrative examples are provided. It is also demonstrated that hα-open sets are capable of generating a topological structure.
The fourth chapter discusses the notions of hα-neighborhood and hα-open neighborhood, offering a detailed examination of the hα-local function and supporting the discussion with examples. This chapter also introduces the $Cl^*_{h\alpha}$ operator, along with relevant theorems and illustrative cases.
Finally, the fifth chapter presents and investigates the concepts of ζ_g-hα-closed sets and ζ_{s^*g}-hα-closed sets, establishing a comparison with ζ_{s^*g}-closed sets, and providing appropriate counterexamples to clarify the distinctions.

KEYWORDS: Cl*hα operation, hα-open set*, hα-local function,ideal topological spaces ,ζ_g-hα-closed set, ζ_{s^*g}-hα-closed set*

Science Code: 20405 Page Number: 21

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (DEVAM)

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

∀	: Her
∃	: Vardır
∋	: Öyleki
≠	: Eşit değil
∈	: Elemanı
∉	: Elemanı değildir
⇐	: Gerek koşul
⇒:	: Yeter koşul
⇔	: Gerek ve yeter koşul
∅	: Boş küme
W	: Evrensel küme
ω∪ γ	: ω bileşim γ
ω ∩γ	: ω kesişim γ
ω ⊂γ	: γ kümesi H kümesinin alt kümesidir
ω ⊄γ	: γ kümesi ω kümesini kapsamaz
ω - γ	: ω fark γ
W-γ	: γ kümesinin tümleyeni
N	: Pozitif tam sayılar kümesi(sıfır dahil)
P(W)	: Kuvvet küme
ꞇ	: Topoloji sistemi
ꞇF	: Kapalılar ailesi
S	: W kümesi üzerinde alınan herhangi bir ideal
Sf	: W kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan ideal
Sc	: W kümesinin sayılabilir alt kümelerinden oluşan ideal
(W,ꞇ)	: Bir topoloji altında tanımlı uzay
(W,ꞇ, ζ)	: Ideallerle tanımlı topoloji sistemi
γ^{C}	: γ ‘nın tümleyeni
Cl(γ)	: γ’nın kapanışı
Int(𝑶)	: γ’nın içi
ϑ(z)	: Açık komşuluklar ailesi
L*(ζ, ꞇ)	: L kümesinin I idealine ve τ topolojisine göre lokal fonksiyonu
$\tau^{h\alpha}$	: hα-açık kümelerin oluşturduğu aile

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez sürecim boyunca bilgi ve deneyimiyle bana rehberlik eden, değerli katkılarıyla yolumu aydınlatan danışmanım Prof. Dr. Ahu AÇIKGÖZ'e en içten şükranlarımı sunar, kendisine saygılarımı ifade ederim.
Ayrıca, eğitim hayatım boyunca yanımda yer alan, desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen kıymetli anne,babama ve eşime sevgiyle teşekkür eder, sonsuz minnettarlığımı belirtmek isterim

Balıkesir, 2025 **Seher ZORLU**

1. GİRİŞ

Topolojik yapı, geometri bağlamında bir kümenin üzerine konabilecek en basit yapı olarak görülebilir. Tarihte topolojinin ilk adımını Leonard Euler atmıştır.Prusyada yer alan Könisberg'de bulunan köprüden bir kez geçecek şekilde bir rota oluşur mu sorusuna cevap bularak matematiğin içinde geometriden farklılaşan bir alanın ortaya çıkacağının ilk adımları atılmıştır. Yine Euler meşhur çokyüzlü formülü ile topolojinin temellerini atmıştır. Ama matematik literatüründe topoloji terimi 1874'de Gauss'un öğrencisi Alman J.B. Listing tarafından ortaya konulmuştur. Ve topoloji günlük hayatımızda birçok şeyin içinde yer almıştır. Bizleri şifreleyen DNA'mızda, parmak izlerimizde, avuç içimizde topolojik izlere rastlanmaktadır. Topoloji bilgisayarların birbirine bağlanmasında, coğrafi verilerin konumsal analizleri, mimari tasarım, dijital tıp ve yapay zeka dil çalışmaları, mühendislik alanı gibi birçok alanda topolojiden yararlanılmaktadır. Topolojik uzaylarda ideallerden yararlanarak lokal fonksiyon nosyonu ilk kez Kuratowski tarafından 1933 senesinde ortaya konulmuştur,sağlamış olduğu parametreler detaylı şekilde incelendi. 1960 senesinde ise Vaidyanathaswamy tarafınca yapılan çalışmalarda lokal fonksiyon nosyonundan yararlanılarak ideal topolojik uzay nosyonu tanımlandı.

Jankovic ve Hamlett bilim insanları 1990 senesinde lokal fonksiyon nosyonundan yararlanarak kapanış işlemine dair yeni bir yaklaşım ortaya koymuş; bu işlem aracılığıyla elde edilen kapalı kümelerden hareketle özgün bir topoloji inşa edilebileceğini göstermişlerdir. Çalışmalarını ideal topolojik uzaylar çerçevesinde ilerleterek, bu yapıya uygun yeni parametreler tanımlamış ve ζ -açık küme kavramını önererek ideal yapıların uyum sağlayacağı topolojileri incelemişlerdir.

1999 yılında Dontchev ve çalışma arkadaşları, ζg-kapalı küme kavramını literatüre kazandırırken; Khan ve Hamza isimli araştırmacılar ise ζ_{s^*g}-kapalı kümeler üzerine yeni bir tanımlama yapmışlardır. Böylelikle ideal topolojik uzaylar, çeşitli topolojik fikirlerin aktarıldığı önemli bir araştırma sahasına dönüşmüştür.

Bu çalışmada, $h\alpha$-komşuluk ve $h\alpha$-açık komşuluk kavramları tanımlanarak aralarındaki ilişkiler örneklerle detaylandırılmıştır. $h\alpha$-açık kümelere dair tanım ve örneklere yer verilmiş, bu kümeler ile $h\alpha$-açık kümelerin karşılaştırılması yapılmıştır. $h\alpha$-açık kümeler ile ilişkili olarak $h\alpha$-lokal fonksiyon kavramı tanımlanmış ve bu fonksiyonun temel özellikleri ayrıntılı şekilde sunulmuştur. $h\alpha$-lokal fonksiyonun sağladığı niteliklere ilişkin örnekler verilmiş, ideal topolojik uzaylar bağlamında bu fonksiyonun özellikleri teoremlerle desteklenerek ispatlanmıştır. Ayrıca $Cl^{*}h\alpha$ işlemi açıklanmış, örneklerle desteklenerek özellikleri analiz edilmiştir. $h\alpha$-lokal fonksiyon ile ilişkili idealler arasındaki bağlantılar ele alınarak karşılaştırmalar yapılmıştır. $\tau^{h\alpha}$ topolojisi tanıtılmış ve ayrıntılı biçimde değerlendirilmiştir. Son olarak, ideal topolojik uzaylar bağlamında ζ_g-$h\alpha$-kapalı ve ζ_{s^*g}-$h\alpha$-kapalı kümelerin tanımları verilmiş, ζ_{s^*g}-kapalı kümelerle kıyaslamaları yapılarak karşıt örneklerle desteklenmiştir.

2. TOPOLOJİ BAĞLAMINDA İDEAL YAKLAŞIMLARIN YERİ

2.1 Bazı Yapısal Temellere Dayalı Topolojik Uzaylar

1933 yılında, Kuratowski'nin katkısıyla kümenin lokal (yerel) fonksiyonlar ve fonksiyonların kazandığı nitelikler ortaya konmuş; bu bağlamda ilgili konular üzerine yapılan çalışmalar derinlestirilmiştir. topolojik alanlarda gerçekleştirilen bu çalışmalar, zamanla önemli bir araştırma konusu halini almıştır.[5]

2.1.1 Tanım

En az bir eleman içeren bir W kümesi ele alalım. P(W), W' nin güç kümesini ifade etsin. "En az bir eleman içeren bir ζ ailesi;

1) Bütün $h \cup r$,$r \in$ I kümesi için $h \cup r \in \zeta$ (Sonlu toplamsallık)

2) Bütün $h \in \zeta$ kümesi ve $r \subset h$ kümesi için $r \in \zeta$ (Kalıtımsallık)

parametrilerini sağlamalıdır, bağlamda ζ ailesine, W kümesi üzerinde bir ideal denir.
(W, ꞇ, ζ) ifadesiyle ideal topolojik gösterilmiş olur" .[4]

2.2 Lokal Fonksiyonların Oluşturduğu Küresel Temel

2.2.1 Tanım

Bir (W, ꞇ) topolojik uzayı ve L⊂ W alt kümesi verilsin. "ζ ailesi W kümesinde bir ideal olsun. Bu durumda;

$L(\zeta, ꞇ)=\{\forall\ z\in W\colon \forall\ B\in \vartheta(z), (B \cap L)\notin \zeta\}$kümesi, L kümesinin ζ idealiyle bağlantılı lokal fonksiyonu olarak tanımlanır. Ayrıca L*(ζ,ꞇ) ifadesi yerine L* sembolü kullanılır " . [4],[10]

2.2.2 Tanım

Bir (W,ꞇ, ζ) üçlüsü ideal topolojik uzayı,L⊂W alt kümesi olarak alınsın.Burada ζ ,W kümesi üzerinde tanımlı bir ideal küme ailesidir.
Bu durumda L kümesine bağlı olarak tanımlanan;
$L^*(\zeta, ꞇ)= \{\forall z\in W\colon \forall\ B\in H\alpha O(W, z), (B\cap L) \notin \zeta\}$
kümesi, L'nin ζ idealine bağlı hα lokal fonksiyonu olarak adlandırılır.Bu tanımda da L*(ζ,τ) ifadesi yerine kısaca L* sembolü kullanılır. [3], [7]

2.3 Kuratowski Kapanışının Teorik İncelemesi

2.3.1 Tanım

P(W), W kümesine ait kuvvet (güç) kümesi olmak üzere,d:P(W) →P(W) dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlamalıdır:

1. $d(\varnothing)=\varnothing$

2.$L\in P(W) \Rightarrow H\subset d(L)$ [4]

3. $d(L\cup\gamma) = d(L)\cup d(\gamma)$

4. $d(d(L)) \subseteq d(L)$

Bu şartlar altında, $(L)^c = L\cup d(L)$ biçiminde tanımlanabilinir. Böylece $( )^c = P(W) \rightarrow P(W)$ dönüşümü, P(W) kümesinde Kuratowski Kapanış operatörü olarak adlandırılır. [5]

2.3.2 Tanım

Bir (W,τ) ikilisi topolojik uzayı oluşturur ve W kümesi için tanımlı bir ζ ideal olsun. $T\subset W$ için,$Cl^*(T) =T\cup T^*$ biçiminde tanımlanır.Bu tanım,$Cl^*:P(W)\rightarrow P(W)$ dönüşümü 2.3.1 naumaralı tanımda belirtilen koşulları sağlaması durumunda, bu fonksiyon Kuratowski Kapanışı denir [4]

Bu bağlamda,

1.$Cl^* (\varnothing)=\varnothing\cup\varnothing^* =\varnothing$ bulunur

2. $Cl^*(T)=T\cup T^*$ eşit olduğundan, $T\subset Cl^*(T)$ olarak sonuçlanır.

3. $Cl^* (T\cup C)=(T\cup C)\cup(T\cup C)^*$

$= (T\cup C) \cup (T^*\cup C^*)$

$= (T\cup T^*) \cup (C \cup C^*)$

$= Cl^*(T) \cup Cl^*(C)$ elde edilir.

4.$Cl^* (Cl^* (T)) = Cl^*(T\cup T^*)$

$= (T \cup T^*) \cup (T\cup T^*)^*$

$= (T\cup T^*) \cup (T^*\cup (T^*)^*)$

$\subseteq (T \cup T^*) \cup (T^*\cup T^*$

$\subseteq (T \cup T^*) \cup (T^*)$

$\subseteq (T \cup T^*) \subseteq Cl^* (T)$ (1) bulunur.

Diğer yandan, $Cl^* (T) = T \cup T^*$ olarak bulunduğundan;

$Cl^* (Cl^* (T)) = Cl^*(T) \cup (Cl^* (T)^*)$ olur,sonucunda da birleşim işlemi tanımından

$Cl^* (T) \subseteq Cl^* (Cl^*(T))$ (2) bulunur.

(1) ve (2) den $Cl^* (Cl^* (T)) = Cl^* (T)$ sonucun (1),(2) den $Cl^* (Cl^* (T)) = Cl^* (T)$ elde edilir.

2.4 Ideal Topolololojik Yapılarda Üzerinde τ^* Topolojisi

2.4.1 Tanım

(W,ϲ) topolojik uzay ve W kümesi için tanımlı bir ζ ideali göz önüne alındığında,

$\tau^* (N)=\{R\subset W :Cl^*=(W -R) =(W -R)\}$ biçimde tanımlanan $ϲ^*(N)$ ailesi, W kümesi üzerinde tanımlı bir topoloji oluşturur. Bu topoloji ϲ topolojisine göre daha incedir.[4]

2.5 Bazı Açık Kümelerin İncelenmesi

Topolojinin temel taşlarından biri olan açık küme kavramı daha önce kapsamlı biçimde tanımlanmış olsa da, Bu bölümde özellikle önemli bazı açık küme türlerine odaklanılacaktır.

2.5.1 Tanım

Bir (W,ϲ) topolojik uzayında $\omega\subset W$ olacak şekilde bir küme alalım.Eğer $\omega =Int(cl(\omega))$ eşitliği sağlanıyorsa, ω kümesin regüler açık küme olarak tanımlanır.Bu tür kümelerin birleşimlerinden oluşan ailesine RO(W) ile ifade edilir.[9]

2.5.2 Tanım

(W,ϲ) bir topolojik uzay olmak üzere, $\omega \subseteq W$ şeklinde bir küme ele alalım. Eğer $\omega \subseteq cl(Int(\omega))$ koşulunu sağlıyorsa, bu durumda ω kümesi yarı açık (semi-açık) küme olarak adlandırılır.Tüm yarı açık kümelerin bir araya gelmesiyle elde edilen küme ailesi ise SO(W) biçiminde gösterilir.(8]

2.5.3 Tanım

(W, ϲ) biçimindeki bir topolojik uzayda, $\omega \subseteq W$ olan bir küme ele alındığında; ω kümesini kapsayan tüm yarı açık kümelerin birleşimi H kümesinin semi içi olarak adlandırılır ve bu ifade $sInt(\omega)$ şeklinde gösterilir**.**

2.5.4 Tanım

(W, ϲ) bir topolojik uzay ve $\omega \subseteq W$ olacak şekilde bir alt küme göz önüne alındığında; boş küme ile evrensel küme W’den farklı olan herhangi bir açık küme R için, eğer ω⊆Int(ω

$\cup R$) koşulu sağlanıyorsa, H kümesine h-açık kümedir. h-açık bir kümenin tümleyeni ise h-kapalı kü**me** olarak adlandırılır. (W, ꞇ) uzayındaki tüm h-açık kümelerin oluşturduğu aile **$ꞇ^h$** ile sembolize edilir. Ayrıca bu aile, hO(W) biçiminde de gösterilebilir.[1]

2.5.5 Tanım

(W, ꞇ) bir topolojik uzay ve $\omega \subseteq W$ olacak şekilde bir alt küme alındığında; W evrensel kümesi içerisinde, ω kümesini kapsayan tüm h-kapalı kümelerin kesişimi alınarak elde edilen küme, ω'nin h-kapanışı olarak tanımlanır ve bu küme $Cl_h(\omega)$ sembolüyle gösterilir.

3. hα-LOKAL FONKSİYONLAR

3.1 Hα-AÇIK KÜMELER

3.1.1 Tanım

Bir (W, ꞇ) topolojik uzayında $\omega \subset W$ kümesini alalım. Boş küme ve W evrensel kümeden farklı olarak bir R açık kümesi olsun;

Eğer ki $\omega \subseteq \alpha Int(\omega \cup R)$ oluyorsa ω kümesine hα-açık küme denir. Bununla birlikte Hα-açık kümesinin tümleyenine de hα-kapalı küme olarak tanımlanır.(W,ꞇ) topolojik uzayındaki hα-açık kümelerin ailesi de hαO(W) olarak ifade edilir.

3.1.2 Uyarı

Her h-açık küme hα-açık küme olur. Fakat hα-açık kümeler h-açık küme olmayabilir.

3.1.3 Örnek

W ={h,l,r,z } evrensel kümesi ve ꞇ ={∅,W,{z},{h, r},{h , r, z}} topolojisi ele alınsın. 2.5.4 tanımı gereği $ꞇ^{h}$={∅,W,{z},{h,r},{h,r,z}}olarak bulunur. 3.1.1Tanımdan dolayı HO(W) = {∅,W,{z},{h,r},{l,z},{h,l,r},{h,r,z}} olurken 3.1.1Tanım gereği hαO(W)= {∅,W, {l}, {z}, {h,r}, {l,z},{h,l,r},{h,r,z}} olduğunu kolaylıkla bulabiliriz.

Buradan {l},{l,z},{h,l,r} kümeleri hα-açık küme olurlar ancak h-açık küme olamazlar.

3.1.4 Örnek

W={h,l,r,z} evrensel kümesi olup ve ꞇ ={∅,W,{z},{h,r},{h,r,z}} topolojisi ile (W,ꞇ) topolojik uzayını alalım. I={∅,{r}} ideali olarak kabul edilsin. 2.5.2 Tanımına göre HO(W) = {∅,W,{z},{h,r},{l,z},{h,l,r},{h,r,z}} olarak bulunurken 3.1.1 Tanımdan hαO(W)={∅,W, {l},{z},{h,r},{l,z},{h,l,r},{h,r,z}} elde edilir. Böylece {l}∈ hαO(W) fakat {l}∉ HO(W) olur.

3.2 hα-Açık Kümeler ile Topolojik Yapı Oluşturma

hα-açık küme tanımı gereğince her açık küme hα-açık kümedir. Ayrıca hα-açık kümelerin rastgele seçilmiş olan birleşimi hα-açık küme olur.Bu bölümde hα-açık kümeler yardımıyla bir topolojik yapı oluşturulabileceği gösterilecektir.

3.2.1 Teorem

Bir (W,τ) topolojik uzayı ve τ^h ailesi, W kümesi için topolojik yapı oluşturur.

İspat :

1) hα-açık küme tanımınca $\emptyset, W \in \tau^h$ olduğu bellidir.

2) Herhangi $\omega, \gamma \subset W$ iken $\omega \cap \gamma \in \tau^h$ dır.[1]

3) (W, τ) topolojik uzayı ve $\{Ai \subset W : Ai \in \tau h\alpha, \forall i \in \zeta$ için$\}$.

Buradanda kolayca,

$Bi \subset \cup i \in \zeta\, Bi$

$\Rightarrow Bi \cup R \subset \cup i \in \zeta\, Bi \cup R$

$\Rightarrow Int(Bi \cup R) \subset Int(\cup i \in \zeta\, Bi \cup R)$

$\Rightarrow Bi \subset Int(Bi \cup R) \subset Int(\cup i \in \zeta\, Bi \cup R)$ (2.5.4 Tanımından)

$\Rightarrow \cup i \in \zeta\, Bi \subset \cup i \in \zeta\, Int(\cup i \in \zeta\, Bi \cup R) \Rightarrow \cup i \in \zeta\, Bi \subset Int(\cup i \in \zeta\, Bi \cup R)$ olunca,$\cup i \in \zeta\, Bi \in \tau^{h\alpha}$ olarak bulunur.

Bunun sonucunda hα-açık kümelerin ailesi ile topolojik yapı oluşabilir.

4. LOKAL FONKSİYONLAR hα TÜRÜ

4.1 hα Türünün Lokalite Yapısı

4.1.1 Tanım

Bir topolojik uzay (W, ꞇ) ve $m \in W$ noktası ele alındığında, m noktasını kapsayan her hα-açık kümenin oluşturduğu kümeye m noktasının hα-açık komşuluğu olarak adlandırılır.

Başka bir ifadeyle, G kümesi m noktasının hα-açık komşuluğudur $\Leftrightarrow$ $m \in W$ ve $G \in ꞇ^{h\alpha} \ni m \in G$ dır .

4.1.2 Tanım

(W,ꞇ) topolojik uzay ve $m \in W$ nokta olsun. Eğer $R \subset W$ hα-açık alt kümesini içeren bir $\omega \subset W$ kümesi varsa, H alt kümesi m noktasının hα-komşuluğu olarak söylenir. Şöyle ki,
ω kümesi m noktasına ait hα-komşuluktur $\Leftrightarrow \exists\ R \in, \tau^{h} \ni m \in R \subseteq \omega$ olur.

4.1.3 Uyarı

(W,ꞇ) topolojik uzayı içinde tanımlı tüm hα-açık komşuluklar, hα-komşuluk olur.

4.1.4 Uyarı

3.2.3 Uyarısının tersi bütün koşulda sağlanmayabilinir.

4.1.5 Örnek

Evrensel küme W={s,n,f} ve ꞇ ={∅,W,{s},{s,n}} topolojisi altında (W,τ) topolojik uzayını irdeleyelim.2.5.4 Tanımına göre , $ꞇ^{h\alpha}$=hαO(W)={∅,W,{s},{n},{s,n},{n,f}} olarak bulunur.

W evrensel kümesinin içerdiği s noktasının hα-açık komşulukları: W, {s},{s,n} dır.
W evrensel kümesinin içerdiği s noktasının h-komşulukları: W, {s},{s,n},{s,f} bulunur.

4.2 Kümeye hα-Lokal Fonksiyonel Yapılar

4.2.1 Tanım

(W,ꞇ,I) ideal topolojik uzayıyla birlikte $\omega \subset W$ verilsin. ζ ideali ve ꞇ topolojisine bağlı olarak

$\omega_{h\alpha}^{*}(\zeta, ꞇ)=\{z\in W : (\omega \cap R)\notin \zeta$, her $R\in h\alpha O(W,z)\}$

biçiminde tanımladığımız $H_{h\alpha}^{*}(\zeta,ꞇ)$ kümesi H kümesinin hα-lokal fonksiyonu denir ve $\omega_{h\alpha}^{*}(\zeta, ꞇ)$ ifadesi yerine $\omega_{h\alpha}^{*}$ olarakta ifade edilir.

4.2.2 Örnek

V ={t,e,R} evrensel kümesi ,τ={∅,V,{t},{t,e}} topolojisi ile (V,τ) topolojik uzayı olsun.

ζ={∅,{R}} idealini ve L={t,e} alt kümesi olsun.

Buradan $ꞇ^{h\alpha}$ ={∅,V,{t},{t,e},{e},{e,R}} olarak bulunur ve $ꞇ^{m}$={∅,V,{e,R},{R}} olur.3.2.1 Tanımı sonucunda

$L_{h\alpha}^{*}$={t,e,R}=V olarak bulunur.

4.3 hα-Lokal Fonksiyonuna Ait Teoremler

4.3.1 Teorem

Bir (W,ꞇ, ζ) ideal topolojik uzayı içerisinden $\omega, \gamma \subset W$ kümelerini alalım.

1. $\omega \subset \gamma \Rightarrow \omega_{h\alpha}^{*} \subset \gamma_{h\alpha}^{*}$
2. $(\omega \cup \gamma)_{h\alpha}^{*} = \omega_{h\alpha}^{*} \cup \gamma_{h\alpha}^{*}$
3. $(\omega \cap \gamma)_{h\alpha}^{*} \subset \omega_{h\alpha}^{*} \cap \gamma_{h\alpha}^{*}$
4. $(\omega_{h\alpha}^{*})_{h\alpha}^{*} \subset \omega_{h\alpha}^{*}$
5. $\omega_{h\alpha}^{*} = Cl^{*}_{h\alpha}(\omega_{h\alpha}^{*}) \subset Cl^{*}_{h\alpha}(\omega)$ ve $\omega_{h\alpha}^{*}$ hα-kapalı olur.

İspat:

1) Varsayalım ki $z\notin\gamma_{h\alpha}^{*}$ olsun. Bu durumda, z için en az bir $R\in h\alpha O(W,z)$ vardır ve öyleki $(R\cap\gamma)\in I$ bulunur. $\omega\subset\gamma$ olduğundan dolayı, $(R\cap\omega)\in I$ bulunur. Bu nedenle $z\notin H_{h\alpha}^{*}$ bulunur. Böylece $\omega_{h\alpha}^{*} \subset \gamma_{h\alpha}^{*}$ sonucuna varılır

2)3.2.1 Tanım gereği;

$\omega_{h\alpha}^{*}(S, ꞇ)=\{q\in W : (\omega\cap M)\notin S$, her $M\in h\alpha O(W,q)$ için

$\gamma_{h\alpha}^{*}(S, ꞇ)=\{q\in W : (\gamma\cap M)\notin S$, her $M\in h\alpha O(W,q)$ için$\}$

olup birleşim işlemi kullanılarak,

$(\omega\cup\gamma)_{h\alpha}$ * (S, ꞇ)={y∈W: (H∩M)∉S veya (γ∩M)∉S, her M∈hαO(W,q) için}

={q∈W : (H∩M)∪ (γ∩M)∉S, her M∈hαO(W,q) için}

= $\omega_{h\alpha}$ *∪ $\gamma_{h\alpha}$ * elde edilir.

3)(ω∩γ)⊂ω olduğundan,1) gereği $(\omega\cap\gamma)_h$*⊂ω $_{h\alpha}$* bulunur.Ayrıca (ω ∩γ)⊂γ olduğundan $(\omega\cap\gamma)_{h\alpha}$*⊂ $\gamma_{h\alpha}$ * sonucuna ulaşırız.

Kesişim işlemi uygulandığında, $(\omega\cap\gamma)_{h\alpha}$ *⊂ $\omega_{h\alpha}$ * ∩ $\gamma_{h\alpha}$ * dır.

4.3.2 Örnek

W={h,l,r,z} ve ꞇ ={∅,W,{h},{h,l},{h,l,z}} ile (W, ꞇ) topolojik uzayı olsun. ζ={∅,{z}} ideali olsun 2.5.4 Tanım gereğince hα-açık kümelerin ailesini

$ꞇ^{h\alpha}$ ={∅,W, {h}, {l}, {h,l}, {l,z}, {l,r,z}, {h,l,z}}olarak bulunur. ω={h,l}⊂W ve γ={r}⊂W alt kümeleri için 3.2.1 Tanımı gereği;

(ω∩γ)=∅ ve $(\omega\cap\gamma)_{h\alpha}$ * = ∅ $\omega_{h\alpha}$* =∅ dır.

$\omega_{h\alpha}$* ={h,l,r} ve $\gamma_{h\alpha}$ * ={r} olduğundan $\omega_{h\alpha}$* ∩ $\gamma_{h\alpha}$* ={r} bulunur. Sonuç olarak

$(\omega\cap\gamma)_{h\alpha}$* =∅ ⊂ $\omega_{h\alpha}$* ∩ $\gamma_{h\alpha}$ * ={r} elde edilir.

4)($\omega_{h\alpha}$* $)_{h\alpha}$* ={z∈W: ($\omega_{h\alpha}$ *∩R)∉ ζ, her R∈hαO(W,z) için}

$(\omega_{h\alpha}$*$)_{h\alpha}$* ={z∈W : $\omega_{h\alpha}$ * ∉ζ ve R∉ ζ, her R∈hαO(W,z) için

↗ ⊆{z∈W: R∉I, her R∈hαO(W,z) için}

$(\omega_{h\alpha}$*$)_{h\alpha}$* =

↘ ⊆{z∈W: $\omega_{h\alpha}$ *∉ζ, her R∈hαO(W,z) için}

⊆{z∈W: (ω∩R)∉ ζ, her R∈hαO(W,z) için}= $\omega_{h\alpha}$ *

⇒($\omega_{h\alpha}$* $)_{h\alpha}$*⊂ $\omega_{h\alpha}$ * dır.

4.3.3 Örnek

W={h,l,r,z} ve τ={∅,Y,{h},{h,l},{h,l,z}} topolojisine bağlı (W, ꞇ) topolojik uzayı olsun. ζ={∅,{h}} ideali alındığı zaman 2.5.4 Tanım gereğince hα-açık kümelerin ailesini $ꞇ^{h\alpha}$={∅, W,{h},{l},{h,l},{l,z},{l,r,z},{h,l,z}} olarak bulunur. Ş={h,l}⊂W olarak ele alındığında;

3.2.1 Tanımdan, $Ş_{h\alpha}^* = W$ evrensel kümesi olarak hesaplanır. Sonuç olarak $(Ş_{h\alpha}^*)_{h\alpha}^* = \{l,r,z\}$ ve Bu çıkarıma göre $(Ş_{h\alpha}^*)_{h\alpha}^* \subset Ş_{h\alpha}^*$ sonucuna ulaşılır. Ancak verdiğimiz örnektende görüldüğü üzere $Ş_{h\alpha}^* \not\subset (Ş_{h\alpha}^*)_{h\alpha}^*$ olmadığı açık şekilde görülür.

5) 2.5.5 Tanımdan dolayı $\omega_{h\alpha}^* \subset Cl_{h\alpha}(\omega_{h\alpha}^*)$ olur. Bir $z \in Cl_{h\alpha}(\omega_{h\alpha}^*)$ noktası ele alalım. Buradan da, her $R \in h\alpha O(W,z)$ için $(\omega_{h\alpha}^* \cap R) \neq \emptyset$ olarak bulunur. $z \in (\omega_{h\alpha}^* \cap R)$ alalım. Böylece her $R \in h\alpha O(W,z)$ için $z \in \omega_{h\alpha}^*$ ve $z \in R$ olur. $(\omega \cap R) \notin I$ ve Buradan $z \in \omega_h^*$ dır.

Sonuç olarak $Cl_{h\alpha}(\omega_{h\alpha}^*) \subset \omega_{h\alpha}^*$ olduğundan dolayı $Cl_{h\alpha}(\omega_{h\alpha}^*) = \omega_{h\alpha}^*$ sonucuna varılır ve $\omega_{h\alpha}^*$ hα-kapalı olduğu kesinleşir. Varsayalımki $z \notin Cl^*_{h\alpha}(\omega)$ olsun. Buradan, $R \cap \omega = \emptyset \in I$ olduğundan $z \notin \omega_{h\alpha}^*$ sonucuna ulaşılır. Sonucundada $\omega_{h\alpha}^* \subset Cl_{h\alpha}(\omega)$ elde edilir.

4.3.4 Uyarı

(W, τ, ζ) ideal topolojik uzayına ait $\omega \subset W$ alt kümesi verilsin.

1) $\zeta = \{\emptyset\}$ olduğu takdirde, $\omega_{h\alpha}^* = Cl_{h\alpha}(\omega)$ eşitliği sağlanır.

2) Şayet $\omega \in \zeta$ oluyorsa $\omega_{h\alpha}^* = \emptyset$ ve $\{\emptyset\}_{h\alpha}^* = \emptyset$ olur.

3) $\omega \subset \omega_{h\alpha}^*$ yada $\omega_{h\alpha}^* \subset \omega$ olmasını gerektirmez.

4) Şayet $S\alpha O(W) = h\alpha O(W)$ ise $\omega_{h\alpha}^*(\zeta, h\alpha O(W)) = \omega_{h\alpha}^{*s}(\zeta, \tau)$ bulunur

5) Şayet $h\alpha O(z,W) = \tau(W)$ ise $\omega_{h\alpha}^*(\zeta, h\alpha O(W)) = \omega^*(\zeta, \tau)$ dır.

4.3.5 Örnek

(W,τ) topolojik uzayı ve $W=\{h,l,r,z\}$ evrensel kümesi olmak üzere $\tau = \{\emptyset, W, \{h\}, \{h,l,z\}\}$ topolojisi ve $\zeta = \{\emptyset, \{r\}, \{h,r\}\}$ ideali alınsın. Ayrıca 2.5.4 Tanımdan,

$\tau^{h\alpha} = \{\emptyset, Y, \{h\}, \{l,z\}, \{l,r,z\}, \{h,l,z\}\}$ bulunur.

$\omega = \{h,l\}$ ve $Ş = \{h,r\}$ iken 3.2.1 Tanım gereği $\omega_{h\alpha}^* = W$, $Ş_{h\alpha}^* = \emptyset$ bulgusuna ulaşılır.

4.3.6 Lemma

(W,τ, ζ) ideal topolojik uzayı alsın.Bunun sonucunda aşağıda verilen parametriler geçerli olur;

1) $RO(W) \subset h\alpha O(W) = \tau h\alpha \subset Sh\alpha O(W)$,

2) $\omega^{*S}{}_{h\alpha} \subset \omega_{h\alpha}^* \subset \omega^*$

İspat:

1) Her regüler açık küme olan açık küme olur.Bununla birlikte her açık küme hα-açık küme olduğu kolayca görünür.

2) $z\in \omega^{*s}{}_{h\alpha}$ noktasını baz alalım. Buradan 4.2.3 Tanımdan dolayı her $R\in Sh\alpha O(W)$ için $(\omega\cap R)\notin I$ olur. Buradan her $R\in h\alpha O(W)$ kümesi için $(\omega\cap R)\notin \zeta$ sonucuna ulaşılır. Öyleyse $z\in\omega_{h\alpha}{}^{*}$, $\omega^{*S}{}_{h\alpha} \subset \omega_{h\alpha}{}^{*}$dır. $z\in\omega_{h\alpha}{}^{*}$ noktası alındığında her R hα-açık kümesi için $(\omega\cap R)\notin\zeta$ bulunur. Her açık küme hα-açık küme olduğundan dolayı her R açık kümesi için $(\omega\cap R)\notin\zeta$ olur (2.2.1 Tanım). Bundan dolayı $z\in \omega^{*}$ sonucuna ulaşırız. Sonuç olarak $\omega_{h\alpha}{}^{*}\subset \omega^{*}$ bulunmuş olunur.

4.4 $Cl^{*}{}_{h\alpha}$ İşlem

4.4.1 Tanım

(W,τ, ζ) ideal topolojik uzayı ve $\omega\subset W$ olsun. Buradan $Cl^{*}{}_{h\alpha}(\omega)$ kümesi için, $Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega)= \omega\cup \omega_{h\alpha}{}^{*}$ olur.

4.4.2 Teorem

(W,τ, ζ) ideal topolojik uzayı ele alınsın. Herhangi $\omega, \gamma\subset W$ kümeleri için,

1) $\omega\subset Cl^{*}{}_{h\alpha}(\omega)$dır

2) $Cl^{*}{}_{h\alpha} (\varnothing)=\varnothing$ ve $Cl^{*}{}_{h\alpha} (W)=W$ olur.

3) Şayet $\omega \subset\gamma$ ise $Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega) \subset Cl^{*}{}_{h\alpha} (\gamma)$ dır.

4) $Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega)\cup Cl^{*}{}_{h\alpha} (\gamma) = Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega\cup\gamma)$.

5) $(Cl^{*}{}_{h\alpha}(\omega))_{h\alpha}{}^{*} \subset Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega) = Cl^{*}{}_{h\alpha} (Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega))$ dır.

İspat:

1) 4.4.1 Tanımı gereğince $Cl^{*}{}_{h\alpha} (W)= \cup\ \omega_{h\alpha}{}^{*}$ olur.

2) $Cl^{*}{}_{h\alpha} (\varnothing)=\varnothing\cup\{\varnothing\}_{h\alpha}{}^{*} =\varnothing$ ve $Cl^{*}{}_{h\alpha} (W)=W\cup W_{h\alpha}{}^{*} = W$ elde edilir.

3) $\omega \subset\gamma$ ele alınsın. Her $\omega \subset W$ kümesi için $Cl^{*}{}_{h\alpha} = \omega \cup \omega_{h\alpha}{}^{*}$, her $\gamma\subset W$ alt kümesi için $Cl^{*}{}_{h\alpha}(\gamma)= \gamma\cup\gamma_{h\alpha}{}^{*}$ olup 4.3.1. Teoremden $\omega \subset\gamma$ iken $H_{h\alpha}{}^{*}\subset\gamma_{h\alpha}{}^{*}$ olur. Buradan $Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega) =\cup H_{h\alpha}{}^{*} \subset Cl^{*}{}_{h\alpha} (O) =O\cup O_{h\alpha}{}^{*}$ olduğu görülür.

4) 4.4.1 Tanım gereği $Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega \cup\gamma) = (\omega \cup\gamma)\cup(\omega \cup\gamma)_{h\alpha}{}^{*} = (\omega \cup\gamma)\cup \omega_{h\alpha}{}^{*}\cup\gamma_{h\alpha}{}^{*} = (\omega \cup \omega_{h\alpha}{}^{*})\cup(\gamma\cup\gamma h\alpha^{*}) = Cl^{*}{}_{h\alpha} (\omega)\cup Cl^{*}{}_{h\alpha} (\gamma)$ bulunur.

5)3.3.1Teoremi gereğince $(Cl^*_{h\alpha}(\omega))_{h\alpha}^*=(\omega\cup\omega_{h\alpha}^*)_{h\alpha}^*=\omega_{h\alpha}^*\cup(\omega_{h\alpha}^*)_{h\alpha}^*=\omega_{h\alpha}^*\subset Cl^*_{h\alpha}(\omega)$. Böylelikle $Cl^*_{h\alpha}(Cl^*_{h\alpha}(\omega))=Cl^*_{h\alpha}(\omega)\cup(Cl^*_{h\alpha}(\omega))^*_{h\alpha}=Cl^*_{h\alpha}(\omega)$ olur

4.4.3 Örnek

3.3.5. Örneğinde bulunan B kümesini göz önünde bulunduralım. $B_{h\alpha}^*=\emptyset$ sonucuna varılıp buna bağlı olarak $(Cl^*_{h\alpha}(B))_{h\alpha}^*=((B\cup B_{h\alpha}^*))_{h\alpha}^*=\emptyset$ ve $Cl^*_{h\alpha}(B)=B$ elde edilir.

Buna ek olarak $Cl^*_{h\alpha}(Cl^*_{h\alpha}(B))=Cl^*_{h\alpha}(B)=B$ olduğu için $(Cl^*_{h\alpha}(B))^*_{h\alpha}\subset Cl^*_{h\alpha}(B)=Cl^*_{h\alpha}(Cl^*_{h\alpha}(B))$ olur.

4.4.4 Teorem

(W,τ,ζ) ideal topolojik uzayına ait $\omega,\gamma\subset W$ alt kümeleri olsun. hα-lokal fonksiyonu için aşağıda verilen ifadeler sağlanır:

1) W evrensel kümesi üzerinde bulunan başka $J\supset\zeta$ ideali ifadesi için, $\omega_{h\alpha}^*(J)\subset\omega_{h\alpha}^*(\zeta)$ olur.

2) $\omega_{h\alpha}^*-\gamma_{h\alpha}^*=(\omega-\gamma)_{h\alpha}^*-\gamma_{h\alpha}^*\subset(\omega-\gamma)_{h\alpha}^*$dır.

3) $R\in\tau^{h\alpha}$ olurken $R\cap\omega_{h\alpha}^*=R\cap(R\cap\omega)_{h\alpha}^*\subset(R\cap\omega)_{h\alpha}^*$dır.

4) $R\in\zeta$ olurken $(\omega-R)_{h\alpha}^*\subset\omega_{h\alpha}^*=(\omega\cup R)_{h\alpha}^*$dır.

İspat:

1) $z\in\omega_{h\alpha}^*(J)$ elemanı alsın. 3.2.1. Tanımı gereğince her hαO(W) için $R\cap\omega\notin J$ bulgusuna varılır.Öyle ise $R\cap\omega\notin I$ olduğu takdirde $z\in\omega_{h\alpha}^*(\zeta)$ olur. Böylece $\omega_{h\alpha}^*(J)\subset\omega_{h\alpha}^*(\zeta)$ sonucuna ulaşılır.

2) $\omega-\gamma\subset\omega$ olduğundan, 3.3.1.Teorem gereği $(\omega-\gamma)_{h\alpha}^*\subset(\omega)_{h\alpha}^*$ olduğu görülür ve $(\omega-\gamma)_{h\alpha}^*-\gamma_{h\alpha}^*\subset(\omega)_{h\alpha}^*-\gamma_{h\alpha}^*$ sonucuna varılır. Diğer taraftan $\omega\subset(\omega-\gamma)\cup\gamma$ olduğundan, 3.3.1. Teoremden $\omega_{h\alpha}^*\subset(\omega-\gamma)_{h\alpha}^*\cup\gamma_{h\alpha}^*$dır. Böylece $\omega_{h\alpha}^*-\gamma_{h\alpha}^*\subset((\omega-\gamma)_{h\alpha}^*\cup\gamma_{h\alpha}^*)-\gamma_{h\alpha}^*$ elde edilir. Bu nedenle $\omega_{h\alpha}^*-\gamma_{h\alpha}^*\subset(\omega-\gamma)_{h\alpha}^*-(\omega_{h\alpha}^*\cup\gamma_{h\alpha}^*)$ olur ve Bu yüzden $\omega_{h\alpha}^*-\gamma_{h\alpha}^*\subset(\omega-\gamma)_{h\alpha}^*-\gamma_{h\alpha}^*$ dır.

3) $R\in h\alpha O(W)$ ve $z\in R\cap\omega_{h\alpha}^*$ alalım. Buradan $z\in R$ olup $z\in\omega_{h\alpha}^*$ olur. Her $C\in h\alpha O(W)$ için $R\cap C\in h\alpha O(W)$ .Böylece $C\cap(R\cap\omega)=(R\cap C)\cap\omega\notin\zeta$ olduğundan $z\in(R\cap\omega)_{h\alpha}^*$ bulunur. Buna göre $R\cap\omega_{h\alpha}^*\subset(R\cap\omega)_{h\alpha}^*$ ve $\omega\cap R\subset\omega$ olup, $R\cap\omega_{h\alpha}^*\subset R\cap(R\cap\omega)_{h\alpha}^*$ dır. 3.3.1. Teorem gereğince $(\omega\cap R)_{h\alpha}^*\subset\omega_{h\alpha}^*$ ve $R\cap(\omega\cap R)_{h\alpha}^*\subset(R\cap\omega)_{h\alpha}^*$ bulgusuna varılır.

4) 4.3.1 Teoreminden ve 4.3.4 Uyarı gereğince $(R\cup \omega)_{h\alpha}^* = R_{h\alpha}^* \cup \omega_{h\alpha}^* = \emptyset \cup \omega_{h\alpha}^* = \omega_{h\alpha}^*$ olur, $\omega - R \subset \omega$ olduğundan, $(\omega - R)_{h\alpha}^* \subset \omega_{h\alpha}^*$ bulunur.

4.4.5 Teorem

(W,τ,ζ) ile gösterilen bir ideal topolojik uzay ele alındığında; burada W kümesi üzerinde tanımlı iki ideal olan ζ_1 ve ζ_2 dikkate alınsın. Bu bağlamda, $\omega\subset W$ olacak şekilde bir alt küme seçilsin. Aşağıda sunulan koşullar temel varsayım olarak kabul edilmektedir:

1) $\zeta_1 \subset \zeta_2$ iken, $\omega_{h\alpha}^* (\zeta_2) \subset \omega_{h\alpha}^* (\zeta_1)$

2) $\omega_{h\alpha}^* (\zeta_1 \cap \zeta_2) = \omega_{h\alpha}^* (\zeta_1) \cup \omega_{h\alpha}^* (\zeta_2)$

İspat:

1) $z \in \omega_{h\alpha}^* (\zeta_2)$ noktasını alalım. 3.2.1 Tanımı gereğince bütün $R \in h\alpha O(W,z)$ için $R \cap \omega \notin \zeta_2$ dir. $\zeta_1 \subset \zeta_2$ olduğu için $R \cap \omega \notin \zeta_1$ olur,böylelikle $z \in \omega_{h\alpha}^* (\zeta_1)$ sonucuna ulaşılır.

2) $(\zeta_1 \cap \zeta_2) \subset \zeta_1$ ve $(\zeta_1 \cap \zeta_2) \subset \zeta_2$ olduğu ifade edilince 3.4.4 Teorem 1) gereğince $\omega_{h\alpha}^* (\zeta_1) \subset \omega_{h\alpha}^*(\zeta_1 \cap \zeta_2)$ ve $\omega_{h\alpha}^* (\zeta_2) \subset \omega_{h\alpha}^* (\zeta_1 \cap \zeta_2)$ sonucu çıkar. Birleşim işlemi gereği $\omega_{h\alpha}^* (\zeta_1) \cup \omega_{h\alpha}^*(\zeta_2) \subset \omega_{h\alpha}^*(\zeta_1 \cap \zeta_2)$.$z \in \omega_{h\alpha}^*(\zeta_1 \cap \zeta_2)$ noktası ele alınsın.Buradanda her $R \in hO(W)$ olup $R \cap \omega \notin (\zeta_1 \cap \zeta_2)$ olur. Sonuç olarak $R \cap \omega \notin (\zeta_1)$ yada $R \cap \omega \notin (\zeta_2)$ olmalıdır.

Bu durumda $z \in \omega_{h\alpha}^*(\zeta_1)$ yada $z \in \omega_{h\alpha}^*(\zeta_2)$ olur. Bu çıkarımdanda $\omega_{h\alpha}^*(\zeta_1 \cap \zeta_2) \subset \omega_{h\alpha}^* (\zeta_1) \cup \omega_{h\alpha}^* (\zeta_2)$ olması anlamına gelir. Sonucundada $\omega_{h\alpha}^*(\zeta_1 \cap \zeta_2) = \omega_{h\alpha}^* (\zeta_1) \cup \omega_{h\alpha}^*$ bulunur. (ζ_2)

4.4.6 Teorem

(W,τ,ζ) ideal topolojik Uzayında tanımlı olan $\tau^{h\alpha *} = \{R \subset W \ni Cl^*_{h\alpha}(W-R) = (W-R)\}$ $\tau^{h\alpha *}$ ailesi, W için topoloji oluştururken $\tau^* \subset \tau^{h\alpha *}$ olup $h\alpha O(W) \subset \tau^{h\alpha *}$ olur.

İspat:

4.4.1. Tanımı gereğince $Cl^*_{h\alpha} (\omega) = \omega \cup \omega_{h\alpha}^*$, $\tau^{h\alpha *}$ ailesi W kümesi için $Cl^*_{h\alpha} (\omega)$ üzerinde yapılmış topolojidir.

$\tau^* \subset \tau^{h\alpha *}$ olduğunu bulalım. 3.3.6 Lemma gereğince; $Cl^*_{h\alpha} = \omega \cup \omega_{h\alpha}^* \subset \omega \cup \omega^* = Cl(\omega)^*_{h\alpha}$ olur. ω kümesini τ^* kapalı küme olarak alalım. Buradan $Cl(\omega)^*_{h\alpha} = \omega$ ve $Cl^*_{h\alpha} \subset \omega$ olur.

Bu yüzden $Cl^*_{h\alpha}$= ω ve ω kümesi $\tau^{h\alpha*}$ kapalı olur. Şimdi $h\alpha O(W) \subset \tau^{h\alpha*}$ olduğunu bulalım. Varsayalımki ω kümesini hα-kapalı küme olsun. Şayet $z \notin \omega$ ise 3.2.1 Tanım gereğince bütün $z \in \breve{G} \in \tau^{h\alpha}$ olacak biçimde $\omega \cap \breve{G} = \emptyset \in \zeta$ olur. Böylelikle $z \notin \omega_{h\alpha}^*$ ve $\omega_{h\alpha}^* \subset \omega$dır. $Cl^*_{h\alpha}(\omega) = \omega \cup \omega_{h\alpha}^* = \omega$ ve $Cl^*_{h\alpha}(\omega) = \omega$ olmasından dolayı ω kümesi $\tau^{h\alpha*}$-kapalı küme olur. Buradan $h\alpha O(W) \subset \tau^{h\alpha*}$ bulgusuna ulaşılır.

4.4.7 Teorem:

(W, τ, ζ) ideal topolojik uzayında $\beta^*(\tau^{h\alpha}, \zeta) = \{R - J \ni R \in \tau^{h\alpha}, J \in \zeta\}$ taban olarak alınsın. Bu doğrultuda
$\beta^*(\tau^{h\alpha}, \zeta)$ ailesi, $\tau^{h\alpha*}$ topolojisinin bir bazı olur.

İspat:

$\emptyset \in \zeta$ olduğu takdirde, $R - \emptyset = R \in \tau^{h\alpha}$ ve $\tau h\alpha \subset \beta^*$ oluyorsa $W = \cup\beta^*$ olur.

Ayriyetten β^*_1, $\beta^*_2 \in \beta^*$, $J_1, J_2 \in \zeta$ alındığında $R_1, R_2 \in \tau h\alpha$ için $\beta^*_1 = R_1 - J_1$ ve $\beta^*_2 = R_2 - J_2$ yazabilinir. Kesişim işlemi sonucunda $(R_1 \cap R_2) \in \tau^{h\alpha}$ oluyor iken $\beta^*_1 \cap \beta^*_2 = (R_1 - J_1) \cap (R_2 - J_2) = (R_1 \cap (W - J_1)) \cap (R_2 \cap (W - J_2)) = (R_1 \cap R_2) - (J_1 \cup J_2) \in \beta^*$ bulunur ve bunun neticesinde $(J_1 \cup J_2) \in \zeta$ olduğu gösterilir.

5. ζ_{S^*g} hα-KAPALI KÜMELER ve BAZI ÖZELLİKLERİ

5.1 $\zeta_{g\text{-}h\alpha}$-Kapalı Kümeler

5.1.1 Tanım

(W,ꞇ, ζ) ideal topolojik uzayı elemanı olan $\omega\subset W$ alt kümesini alalım. $\gamma\in h\alpha O(W)$ olmak üzere, $\omega\subset\gamma$ iken $\omega_{h\alpha}^*\subset R$ sonucu çıkıyorsa ω kümesini $\zeta_{g\text{-}h\alpha}$ kapalı küme olarak adlandırılır.

5.1.2 Teorem

(W,ꞇ,ζ) ideal topolojik uzayında ω alt kümesini ele alalım. Aşağıda verilen ifadeler denktir:

1) ω kümesi $\zeta_{g\text{-}h\alpha}$ kapalı kümedir.

2) $\omega\subset\gamma$ ve $\gamma\in h\alpha O(W)$ iken $Cl^*_{h\alpha}(\omega)\subset\gamma$ olur.

3) Her $z\in Cl^*_{h\alpha}(\omega)$ için $Cl^*_{h\alpha}(\{z\})\cap\omega\neq\varnothing$ dır.

4) $Cl^*_{h\alpha}(\omega)$- ω kümesi en az bir elemanı olan hα-kapalı küme içermez.

5) $\omega_{h\alpha}^*$ - ω kümesi en az bir elemanı olan hα-kapalı küme içermez.

İspat:

1)⇒2) Hipotezinden, ω kümesine $\zeta_{g\text{-}h\alpha}$ kapalı küme denir. 4.1.1 Tanımınca $\gamma\in h\alpha O(W)$ olmak üzere, $\omega\subset\gamma$ iken $\omega_{h\alpha}^*\subset\gamma$dır. Buradan $\omega_{h\alpha}^*\cup\omega\subset\gamma$ bulunur dolayısı ile $\omega\subset\gamma$ ve $\gamma\in h\alpha O(W)$ iken $Cl^*_{h\alpha}(\omega)\subset\gamma$ elde edilir.

2)⇒3) $z\in Cl^*_{h\alpha}$ noktasını inceleyelim. Şayet $Cl_{h\alpha}(\{z\})\cap\omega=\varnothing$ iken $\omega\subset(W-Cl_{h\alpha}(\{z\}))$ oluyorsa

$\omega\subset W(Cl h\alpha(\{z\}))$ kümesine hα-açık olarak tanımlanır. Bu kabulümüzden yola çıkarak $Cl^*_{h\alpha}(\omega)\subset(W-Cl_{h\alpha}(\{z\}))$ sonucuna ulaşılır. Bu nedenle $Cl^*_{h\alpha}(\omega)\cap Cl^*_{h\alpha}(\{z\})=\varnothing$ olur ki $z\in Cl^*_{h\alpha}(\omega)$ aittir ve bu bir çelişkidir. Bütün $z\in Cl^*_{h\alpha}(\omega)$ için $Cl^*_{h\alpha}(\{z\})\cap\omega\neq\varnothing$dır

3) ⇒ 4) M en az bir elemanı olan hα-kapalı bir küme ve $z\in M$ iken $M\subset Cl^*_{h\alpha}(\omega)$- ω olsun. Buradan $M\subset\omega$ ve $M\cap\omega=\varnothing$ dır. Bunun sonucunda $Cl^*_{h\alpha}(\{z\})\cap\omega=\varnothing$ olur. Bu ise $Cl^*_{h\alpha}(\{z\})\cap\omega\neq\varnothing$ varsayıma aykırı çıkar. $Cl^*_{h\alpha}(\omega)$-ω kümesi boş olmayan hα-kapalı küme içermez.

4) ⇒5) Bu kısım $\omega_{h\alpha}^*\subset Cl^*_{h\alpha}(\omega)$ ifadesinden açıkça görülür.

5)⇒1) γ kümesi, W kümesinin herhangi bir hα-açık kümesi ve $\omega\subset\gamma$ ele alalım. 3.3.1 Teoreminden $\omega_{h\alpha}^{*}\cap(W-\gamma)$ kümesi hα-kapalı iken $\omega_{h\alpha}^{*}$ kümesi hα-kapalıdır ve $\omega_{h\alpha}^{*}\cap(W-\gamma)\subset\omega h\alpha^{*}-\omega$ olur. 5) gereği $\omega_{h\alpha}^{*}\cap(W-\gamma)=\varnothing$ dır. Bundan dolayı $\omega_{h\alpha}^{*}\subset\gamma$ ve buradan ω kümesi $\zeta_{g\text{-}h\alpha}$ kapalı kümesidir.

5.2 ζ_{s^*g} hα-kapalı kümeler

5.2.1 Tanım

(W,ꞇ, ζ) ideal topolojik uzayı elemanı olan $\omega\subset W$ alt kümesi göz önünde bulunsun.. $\gamma\in SO(W)$ ve $\omega\subset\gamma$ iken $\omega_{h\alpha}^{*}\subset\gamma$ ise, ω kümesine ζ_{S^*g} hα-kapalı küme (ard arda ζ_{s^*g} kapalı küme, $\gamma\in SO(W)$ ve $\omega\subset\gamma$ oluyorken $\omega^{*}\subset\gamma$ [6]) denir. ζ_{s^*g} hα-kapalı kümenin tümleyenine ζ_{s^*g} hα-açık küme olarak adlandırılır. ζ_{s^*g} hα-kapalı kümelerin ailesi (ard arda ζ_{s^*g} kapalı kümeler) ζ_{s^*g} hαC(W) (I_{s^*g} C(W)) olarak ifade edilir.

5.2.2 Teorem

(W, ꞇ,ζ) ideal topolojik uzayında, $\omega\subset W$ biçiminde bir alt küme göz önüne alınsın. Eğer ω kümesi ζ_{s^*g}-kapalı ise, bu durumda ω, aynı zamanda ζ_{s^*g} h-kapalı bir küme olma özelliğini taşır.

İspat:

ω, kümesi ζ_{S^*g} kapalı bir küme ve ω kümesini içine alan
bütün $\gamma\in SO(W)$ için $\omega^{*}\subset\gamma$ olur ve 3.3.6 Lemma 2) gereğince $\omega_{h\alpha}^{*}\subset\omega^{*}\subset\gamma$ olmalıdır. Böylelikle ω kümesi ζ_{s^*g} hα-kapalı bir küme olur.

5.2.3 Uyarı

4.2.2. Teoreminin tersi bütün koşullarda sağlanmayabilinir.

5.2.4 Örnek

W={h,l,r,z} evrensel kümesi ve ꞇ={∅,W,{r},{h,l,r}} topolojisi verilsin. Buradan ꞇF={∅,W,{z},{h,l,z}} ve 2.5.4 Tanım gereği $ꞇ^{h\alpha}$ ={∅,W,{r},{h,l},{h,l,z},{h,l,r}} olur. ζ={∅,{z}}ideali aldığımızda;4.2.1.Tanım gereğince, ζ_{s^*g} hαC(W)= {∅, Y, {r}, {z}, {r,z}, {h,l,z}} ve ζ_{s^*g} C(W)={∅,Y,{z},{h,l,z}} elde edilir. Burasına dikkatlice bakılırsa eğer {r}, {r,z} kümeleri W evrensel kümesi üzerinde ζ_{s^*g} hαC(W) kümeler oluyor ancak ζ_{s^*g} C(W) ailesinin bir kümesi değildir.

5.2.5 Örnek

4.2.4 Örnekte verilmiş olan $\varnothing$,W,{z},{h,l,z} kümeleri kapalı kümeleri olup , ζ_{s^*g} hα-kapalı küme olurlar. Ama {r},{r,z} kümeleri ζ_{s^*g} hα-kapalı küme oluyorken kapalı küme olamazlar.

5.2.6 Teorem

(W,ꞇ, ζ) ideal topolojik uzayı ve ω, $\gamma\subset W$ kümeleri alınsın.

1) ω ve γ kümeleri ζ_{s^*g} hα- kapalı küme oluyorsa $(\omega\cup\gamma)$ ζ_{s^*g} hα-kapalı küme olur.

2) $\omega\subset W$ kapalı bir küme oluyorsa, ω kümesi ζ_{s^*g} hα-kapalı bir küme olur

3) $\gamma\subset W$ açık küme, ω kümesi ζ_{s^*g} hα-açık bir küme oluyorsa $(\gamma\cap\omega)$ ζ_{s^*g} hα-açık küme olur.

İspat:

1) $R\in SO(W)$ olurken $(\omega\cup\gamma)\subset R$ olsun. $\omega\subset R$ ve $\gamma\subset R$ olur. ω ve γ kümeleri ζ_{s^*g} hα-kapalı kümeler olduğundan $\omega_{h\alpha}^*\subset R$ ve $\gamma_{h\alpha}^*\subset R$ bulunur. Yani $\omega_{h\alpha}^*\cup\gamma_{h\alpha}^*\subset R$dir. Böylelikle $(\omega\cup\gamma)$ ζ_{s^*g} hα-kapalı küme olur.

2) $R\in SO(W)$ olurken $\omega\subset R$ olsun. 3.3.6 Lemma sebebiyle,$\omega_{h\alpha}^*\subset\omega^*\subset Cl(\omega)=\omega\subset R$ ifadesine ulaşılır. Böylelikle ω’nin ζ_{s^*g} hα-kapalı küme olduğu ispatlanır.

3) İspata 1) ve 2) ifadelerinin tümleyeninden kolayca ulaşılır.

6. KAYNAKLAR

[1] **Abbas F. (2020).** "On H-open sets and H-continuous functions", *J. Appl. Comput. Math*, Vol. 9, pp. 1-5.

[2] **Dontchev J., Ganster M. and Noiri T.** (1999). "Unified operation approach of generalized closed sets via topological ideals", *Math. Japon*, Vol. 49(3), pp. 395-401.

[3] **Abd El-M onsef M. E., Lashien E. F. and Nasef A. A.** (1992). "Some topological operators via ideals", *Kyungpook J. Math.,* Vol. 32(2), pp. 273 – 284.

[4] **Jankovic D. and Hamlett T.R.** (1990). "New topologies from old via ideals", Amer. *Math. Monthly,* Vol. 97, pp. 295-310.

[5] **Kuratowski K.** (1966). *Topology*, Vol. I. New York, Academic Press.

[6] **Khan M. and Hamza M.** (2011). Is*g-closed sets in ideal topological spaces, *Glob. J. PureAppli. Math.*, Vol. 7(1), pp. 89 – 99.

[7] **Khan M. and Noiri T.** (2010). Semi-local functions in ideal topological spaces, *J. Adv. Res. Pure Math*, Vol. 2(1), pp. 36 – 42.

[8] **Levine N.** (1963). "Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces", *Amer. Math. Monthly*, Vol. 70, pp. 36 – 41.

[9] **Powar P. L. and Rajak K.** (2012). "Some new concepts of continuity in generalized topological space", *Int. J. Com. Appl,* Vol. 38(5), pp. 12 – 17.

[10] **Vaidyanathaswamy R.** (1945), "The localization theory in set-topology", *Proc. Indian Acad. Sci.*, Vol. 20, pp. 51-61.

[11] **Vaidyanathaswamy R**. (1960). *Set topology,* Chelsea Publishing Company

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Seher ZORLU

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Matematik Ana Bilim Dalı	2022-2025
Lisans	Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi	2016-2020
Lise	Ayvacık Anadolu Öğretmen lisesi	2010-2014