

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



KUVVETLERİ FIBONACCI SAYILARI
İLE İLİŞKİLİ OLAN MATRİSLER

HALİL ÜNVER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Dr. Öğr. Üyesi Dilek DİLSİZOĞLU (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Recep ŞAHİN
Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

BALIKESİR, TEMMUZ - 2026

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Kuvvetleri Fibonacci Sayıları ile İlişkili Olan Matrisler**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Halil ÜNVER

ÖZET

KUVVETLERİ FIBONACCI SAYILARI İLE İLİŞKİLİ OLAN MATRİSLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HALİL ÜNVER
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ DİLEK DİLSİZOĞLU)
BALIKESİR, TEMMUZ - 2026

Bu tezde, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve girdileri bu sayılardan oluşan matrisler ve sağladığı özellikler incelenmiştir.

İlk bölümde çalışmanın gelişimi ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmada kullanılacak olan temel kavramlar ilgili teoremler ve yöntemler açık ve anlaşılır bir şekilde sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, tezin ana konusuna taban niteliğinde olan Lucas sayıları ve Fibonacci sayıları tanımlanmış, sağladığı bağıntı ve teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir. Sayı dizilerinin ardışık elemanlarının limit değerleri incelenmiş ve bu değerlerin altın oran ile ilişkisine değinilmiştir.

Dördüncü bölümde, Fibonacci sayıları ile ilişkili olan matrisler tanımlanmış ve kuvvetlerinin de Fibonacci sayıları ile ilişkilerine değinilmiştir. Ayrıca üçüncü bölümde verilen teoremlerin bazıları matrisler ve matris işlemleri kullanılarak tekrar elde edilmiştir. Bu Fibonacci matrislerinin nasıl ve hangi koşullarda elde edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, bir problemten yola çıkılarak, sonsuz boyutlu Fibonacci matrislerinin var olabileceğine de yer verilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise sonuç ve öneriler kısmı sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Altın oran, Fibonacci matrisleri, Fibonacci sayıları, Q matrisi, R matrisi

ABSTRACT

MATRICES WHOSE POWERS ARE RELATED TO FIBONACCI NUMBERS
MASTER THESIS
HALİL ÜNVER
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASST. PROF. DİLEK DİLSİZOĞLU)
BALIKESİR, JULY - 2026

In this thesis, Fibonacci numbers and Lucas numbers are studied, along with matrix forms of these numbers and the properties of these matrices.

The first chapter gives general information about the development of the study.

In the second chapter, the basic concepts, related theorems, and methods used throughout the thesis are explained clearly.

The third chapter introduces Fibonacci and Lucas numbers, which form the basis of the study. Important relations and theorems about these sequences are presented together with their proofs. In addition, the limits of consecutive terms in these sequences are analyzed, and their connection to the golden ratio is discussed.

In the fourth chapter, matrices related to Fibonacci numbers are defined, and the relationship between these matrices and Fibonacci numbers is examined. Some of the theorems given earlier are also derived again by using matrices and matrix operations. It has been shown how and under which conditions these Fibonacci matrices can be obtained. Furthermore, motivated by a specific problem, the study also suggest the possibility of the existence of infinite-dimensional Fibonacci matrices may exist.

The fifth and final section presents the conclusions and recommendations of the study.

KEYWORDS: Golden ratio, Fibonacci matrices, Fibonacci numbers, Lucas numbers, Q matrix, R matrix

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
TABLO LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	2
2.1 Tümevarım İlkesi	2
2.2 Matrisler ve Temel İşlemler	2
2.3 Permütasyon ve Determinant	4
2.4 Karakteristik Polinom ve Cayley-Hamilton Teoremi	6
2.5 Özdeğer ve Özvektörler	7
3. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI	8
3.1 Fibonacci Dizisi	8
3.2 Cassini Bağıntısı	11
3.3 Fibonacci Dizisi ve Altın Oran	12
3.3.1 α ve β 'nin Kuvvetlerinin Bulunması	13
3.4 Binet Formülünün Elde Edilmesi	15
3.5 Lucas Dizisi	17
3.5.1 Lucas Dizisi Bağıntıları	17
3.6 Fibonacci ve Lucas Sayılarını İçeren Teoremler	18
3.7 Altın Oran Analizi	20
4. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI İLE İLGİLİ MATRİSLER	23
4.1 Q Matrisi	23
4.1.2 Cassini Bağıntısının Q Matrisi Yoluyla Elde Edilmesi	24
4.1.3 Q Matrisi Kullanılarak Üretilen Bazı Bağıntılar	24
4.1.4 Q Matrisinin Özdeğer ve Özvektör Analizi	26
4.1.5 Q Matrisinin Tersisi	27
4.2 M Matrisi	28
4.3 M ve Q Matrislerinin Limiti	29
4.4 S Matrisi	29
4.5 R Matrisi	33
4.6 Lambda Fonksiyonu ve P Matrisi	33
4.6.1 Lambda Fonksiyonu	33
4.6.2 P Matrisi	35
4.7 2x2 Tipinde Fibonacci Matrislerinin Elde Edilmesi	39
4.8 Sonsuz Boyutlu Fibonacci Matrisi	42
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	49
6. KAYNAKLAR	50
7. ÖZGEÇMİŞ	51

TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1: Fibonacci sayılarının ardışık terimleri oranı	13
Tablo 3.2: Lucas sayılarının ardışık terimleri oranı	20
Tablo 3.3: Z sayı dizisinin ardışık terimleri oranı	21

SEMBOL LİSTESİ

F_n	: n. Fibonacci sayısı
L_n	: n. Lucas sayısı
N	: Doğal sayılar kümesi
N_a	: a doğal sayısından başlayarak ardışık devam eden doğal sayılar kümesi
$n!$	: n sayısının faktöriyeli
I	: Birim matris
R	: Reel sayılar kümesi
$ A $	: A matrisinin determinantı
$p(\lambda)$	: λ sayısının p altındaki görüntüsü
a_{ij}	: Bir matrisin i. satır, j. sütun elemanı
Σ	: Toplam sembolü

ÖNSÖZ

Bu tezi yazarken, büyük emek ve zaman harcayarak bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Dilek Dilsizoğlu'na,

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını benden esirgemeyen Prof. Dr. Ali Güven'e,

Birçok konuda bilgilerine danıştığım değerli arkadaşlarım Engin Furat ve Boğaçhan Çavdar'a

Ve yüksek lisans eğitimimde bana her daim destek olan aileme,

Sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2026

Halil Ünver

1. GİRİŞ

Bu bölümde, çalışmanın gelişimi ve tezin bölümleri tanıtılacaktır. İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılacak olan tanımlar, ilgili teoremler ve yöntemlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Fibonacci ve Lucas sayı dizileri tanımlanmış, bu sayı dizileri ile ilgili bilinen bazı bağıntılar ve ispatları anlaşılır şekilde verilmiştir. Ayrıca bu sayı dizilerinin limiti ve altın oran ilişkisine de değinilmiştir. Tezimizin ana bölümü olan dördüncü bölümde ise kuvvetleri Fibonacci sayıları ile ilişkili olan matrisler, sağladığı belirli özellikler ile detaylı bir şekilde incelenmiş ve sağladığı temel sonuçlar verilmiştir. Bu özel matrisler ile matris cebri kullanılarak üçüncü bölümde elde edilen bağıntıların bazıları tekrar elde edilmiştir. Buna ek olarak bu tip 2. mertebeden Fibonacci matrislerinin nasıl elde edilebileceği incelenmiştir. Ayrıca bir problemten yola çıkılarak, sonsuz boyutlu Fibonacci matrislerinin de var olabileceğine değinilmiştir.

Fibonacci sayıları, borsa ve finansdan, günümüzde devrim niteliğinde olan ve gün geçtikçe ilgi çekiciliği artmakta olan kripto paralara kadar birçok uygulama alanına sahiptir. Bu sayı dizisinin canlılarda, doğada, sanatta, mimaride birçok farklı örnekleri görülmektedir. Ayrıca bu sayı dizisinin, matematikte sabit bir sayı olan ϕ (altın oran) ile yakın bir ilişkisi vardır. Fibonacci sayılarını ilk kez İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci (1170-1250) çalışmıştır. Leonardo Fibonacci bu sayılardan ilk defa Liber Abaci adlı kitabında bahsetmiştir. Sayılar teorisi ve aritmetik ile ilgili pek çok modern çözüm yöntemi ve algoritma içeren bu kitap 1202 yılında yayınlanmıştır.

Bu sayıların keşfi ise Fibonacci'nin bir arkadaşı tarafından sorulduğu iddia edilen bir tavşan problemine dayanmaktadır.

Problem şu şekildedir: Biri erkek biri dişi olan yeni doğmuş bir çift tavşanımız olsun.

1. Yeni doğan her bir tavşan çifti 1 ay sonra üretken bir yetişkin çift haline geliyorsa;
2. Üretken hale gelen her bir çift tavşan, her ay biri erkek biri dişi olan yeni bir çift yavru doğuruyorsa;
3. Yıl boyunca hiçbir tavşan ölmüyorsa, 1 yılın sonunda kaç çift tavşanımız olurdu?

Dikkat edilirse her ay ortamda bulunan tavşan çiftinin: Terimleri 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55... olan ve her bir terimi bir önceki iki terimin toplamı olacak şekilde (tekrarlama bağıntısı) devam eden bir diziye karşılık geldiğini buluruz.

2. ÖN BİLGİLER

Tezin bu bölümünde, bu çalışmada kullanılacak olan tanımlar, teoremler ve yöntemlere yer verilmiştir.

2.1 Tümevarım İlkesi

Felsefede bir akıl yürütme yöntemi, bilimde bir bilimsel araştırma ilkesi olan tümevarım matematikte de bir ispat yöntemi olarak yerini almıştır. Tümevarım ile ispat yöntemi, doğal sayılardaki teoremleri ispatlamak için sıkça kullanılır. Bu teze konu olan teoremleri ispatlamak için de kullanılmıştır.

2.1.1 Tanım $N_a = \{n \in \mathbb{N} | a \leq n\} = \{a, a + 1, a + 2, \dots\}$ olmak üzere " $\forall n \in N_a, P(n)$ " şeklindeki açık önermelerin ispatını yapmak için kullanılan bir ispat yöntemidir. Bu önermenin doğruluğunu göstermek için, gerekli ve yeterli koşul $P(n)$ açık önermesinin D doğruluk kümesinin N_a olduğunu göstermektir. Başka bir ifade ile " $\forall n \in N_a, P(n)$ " açık önermesinin doğru olduğunu göstermek için aşağıdaki yol izlenir:

- i. $n = a$ için $P(n)$ önermesinin doğru olduğu görülür.
- ii. $n = k$ için $P(n)$ önermesinin doğru olduğu varsayılarak,
- iii. $n = k + 1$ için $P(n)$ önermesi sağlanıyor ise $\forall n \in N_a$ için $P(n)$ önermesi doğru olur.

Bu ispat yöntemine Tümevarım Yöntemi denir. Genelde N_a kümesi $\mathbb{N}^+$ olarak verileceğinden $a = 1$ alınarak $P(1)$ 'in doğru olduğunu göstererek tümevarıma başlayacağız [1].

2.2 Matrisler ve Temel İşlemler

Bu bölümde matrisler ve temel matris işlemleri hakkındaki temel bilgiler verilecektir.

2.2.1 Tanım $m \times n$ tane elemanın aşağıdaki gibi dikdörtgensel bir tablo üzerindeki gösterimi matris olarak adlandırılır [2].

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin i . satırı $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ ve j . sütunu $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ olur [2].

Eğer bir A matrisinin m satırı ve n sütunu varsa bu matrise $m \times n$ tipinde bir matris denir.

2.2.2 Tanım $m = n$ ise A matrisi bir kare matristir. Bu durumda matrisin derecesi ise n olur [2].

2.2.3 Tanım n . dereceden bir kare matrisin $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ elemanlarının oluşturduğu köşegene, esas köşegen adı verilir [2].

Notasyon: Bir matrisin herhangi bir $[a_{ij}]$ elemanındaki i satırı (i . satır), j ise sütunu (j . sütun) temsil eder. A matrisi $m \times n$ tipinde bir matris ise $A_{m \times n}$ yazılır. Eğer A , n . dereceden bir kare matris ise A_n yazılır [2].

2.2.4 Tanım Eğer $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinde $\forall i = 1, 2, \dots, m$ ve $\forall j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ oluyorsa bu iki matrise eşit matrisler denir ve $A = B$ şeklinde yazılır. [2].

2.2.5 Tanım $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde matrisler ise A ve B 'nin toplamı olan C matrisi, $C = A + B$, $[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}]$ şeklinde tanımlanır ve C de bir $m \times n$ matristir [2].

2.2.6 Tanım Bir $A_{m \times n}$ matrisi ve bir $c \in R$ bir reel sayısı verildiğinde, A matrisinin c skaleri ile çarpımı olan cA matrisi $C = [c_{ij}]$ ise $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $c_{ij} = c \cdot a_{ij}$ olarak tanımlanır [2].

2.2.7 Tanım A ve B $m \times n$ tipinde birer matris olmak üzere bu matrislerin $A - B$ farkı $A + (-1)B$ olarak tanımlanır [2].

2.2.8 Tanım $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ tipinde, $B = [b_{ij}]$, $n \times p$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B 'nin bu sıradaki çarpımı olan $C = A \cdot B$ matrisi;

$$C = [c_{ij}] = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

şeklinde tanımlanır. A ve B matrislerine çarpılabilir matrisler denir [2].

Tanımdan da anlaşılacağı üzere, iki matrisin çarpılabilir matrisler olması için çarpımda 1. sıradaki matrisin sütun sayısı ile 2. sıradaki matrisin satır sayısının aynı olması gereklidir.

Şimdi matrisler arasındaki aritmetik işlemler için aşağıdaki teoreme bakalım:

2.2.9 Teorem Matris işlemleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Matris toplamı işleminin değişme özelliği vardır. Yani X ve Y $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, $X + Y = Y + X$ dir.
2. Matris toplamı işleminin birleşme özelliği vardır. Yani X, Y, Z $m \times n$ tipinde üç matris olmak üzere $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ dir.
3. Matrisler arasındaki toplamı işleminin etkisiz elemanı vardır. Yani her $m \times n$ tipinde X matrisi için $X + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + X = X$ olacak şekilde bir tek $0_{m \times n}$ matrisi vardır. Bu matrise sıfır matrisi denir.
4. Her matrisin toplamı işlemine göre bir ters elemanı vardır. Her $m \times n$ tipinde X matrisi için $X_{m \times n} + Y_{m \times n} = 0_{m \times n}$ olacak şekilde bir tek Y matrisi vardır, $Y = -X$ olur ve Y ye X matrisinin toplamsal tersi denir.
5. X $m \times n$ tipinde bir matris, Y $n \times p$ tipinde bir matris ve Z de $p \times q$ tipinde bir matris olmak üzere, $X(YZ) = (XY)Z$ dir. Yani X, Y ve Z çarpılabilir matrisler ise matrisler arasındaki çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.
6. Z $m \times n$ tipinde ve X ile Y $n \times q$ tipinde matrisler olmak üzere $Z(X + Y) = ZX + ZY$ dir. Yani eğer, $Z(X + Y)$ işlemi mümkünse, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.
7. r, s reel sayılar ve X $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $(rs)X = r(sX)$ olur.
8. r ve s reel sayılar, X $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $(r + s)X = rX + sX$ olur.
9. X ve Y $m \times n$ tipinde matrisler ve r bir reel sayı ise $(X + Y) = rX + rY$ olur.

İspat: Bu teoremler ve ispatları için (Bkz [3]).

2.3 Permütasyon ve Determinant

2.3.1 Tanım $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ artan sırada düzenlenmiş $1'$ den n' ye kadar tamsayıların kümesi olsun. X 'in elemanlarının $x_1, x_2, \dots, x_n$ şeklinde yeniden dizilmesine X ' nin bir permütasyonu denir. X 'in bir permütasyonu X ' den X üzerine bire bir dönüşüm olarak düşünülebilir. X 'in bütün permütasyonlarının kümesi X_n ile gösterilir. X 'in tüm permütasyonlarının sayısı:

$$n(n - 1)(n - 2) \dots 2.1 = n! \quad (2.1)$$

olarak bulunur [3].

2.3.2 Tanım Eğer bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ permütasyonunda $i < j$ iken $x_i > x_j$ oluyorsa bu permütasyonda bir inversiyon vardır denir. Eğer bir permütasyonda toplam inversiyonların sayısı tek sayı ise permütasyona tek permütasyon, çift sayı ise permütasyona çift permütasyon adı verilir [4].

$n \geq 2$ için X_n de $n!/2$ tane çift permütasyon, $n!/2$ tane tek permütasyon vardır.

2.3.3 Örnek $X = \{1,2,3\}$ olmak üzere, X 'in bütün permütasyonlarının kümesi X_3 ile gösterilir. X_3 kümesi

$$123, 132, 213, 231, 312, 321$$

olmak üzere $3! = 6$ permütasyon içerir.

Tek permütasyonlar: 123, 231, 312

Çift permütasyonlar: 132, 213, 321 şeklindedir.

2.3.4 Tanım Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi için, determinant fonksiyonu

$$\sum \mp a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır ve $|A|$ veya $\det(A)$ ile gösterilir [4].

2.3.5 Örnek

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ olsun,}$$

$\det(A)$ yı bulmak için

$$a_{1_} , a_{2_}$$

terimlerdeki boşluklara (tire işaretlerine) S_2 deki permütasyonları yazarız. Bunlar 12 çift ve 21 tektir. O halde,

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2.3)$$

olur. Dikkat edilirse, bu ikinci merteye matrisin determinantının değeri esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımından, diğer köşegen üzerindeki elemanların çarpımının çıkarılmasıyla bulunur.

2.3.6 Örnek $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 3x3 matrisi verilsin. $|A|$ yı bulmak için 6 tane terimi yazalım.

$$a_{1_}a_{2_}a_{3_} \quad a_{1_}a_{2_}a_{3_} \quad a_{1_}a_{2_}a_{3_} \quad a_{1_}a_{2_}a_{3_} \quad a_{1_}a_{2_}a_{3_} \quad a_{1_}a_{2_}a_{3_}$$

Daha sonra S_3 deki 6 permütasyon, “_” işaretlerinin yerine yazılır. Permütasyon çift ise +, tek ise – işareti konulur. Böylece,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

2.3.7 Teorem Y $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun,

$$|Y^n| = |Y|^n$$

eşitliği sağlanır [4].

2.3.8 Teorem X ve Y aynı boyuta sahip ($n \times n$) kare matrisler olmak üzere,

$$|X.Y| = |X||Y|$$

eşitliği sağlanır [4].

2.4 Karakteristik Polinom ve Cayley-Hamilton Teoremi

Bu bölümde tezimizde kullanılacak olan karakteristik polinom ve Hamilton - Cayley Teoremi üzerinde durulacaktır.

2.4.1 Tanım $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$ matrisi $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere

$\lambda I_n - A$ matrisinin determinantına A matrisinin karakteristik polinomu denir.

$$p(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir. Bu denklemin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ köklerine ise A matrisinin özdeğerleri denir [4].

2.4.2 Tanım $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik denkleminin köklerini bulalım.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0 \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \\ p(\lambda) &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

Böylece,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

bulunur.

2.4.3 Teorem (Cayley - Hamilton Teoremi) Her matris kendi karakteristik denklemini sağlar.

$$p(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

karakteristik denkleminde $p(A) = 0$ dır.

İspat: A $n \times n$ tipinde bir matris ve karakteristik polinomu,

$$p(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

olsun.

$\lambda I - A$ matrisinin ek matrisini ise B ile gösterelim. B matrisinin elemanları λ ' ya göre ve derecesi $n - 1$ den küçük veya eşit polinomlar olduğundan. B_i ler $n \times n$ matrisler olmak üzere,

$$B = B_0 + B_1\lambda + \dots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$$

şeklinde yazılabilir.

$$(\lambda I - A)B = |\lambda I - A|I_n$$

olduğundan,

$$(\lambda I - A)(B_0 + B_1\lambda + \dots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda + a_n)I_n$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I_n \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= a_1I_n \\ \dots \dots \dots &= \dots \\ B_0 - AB_1 &= a_{n-1}I_n \\ -AB_0 &= a_nI_n \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikleri sırası ile 1. eşitliği A_n ile, 2. eşitliği A_{n-1} ile, sondan bir önceki eşitliği A ile ve son eşitliği I ile çarpıp son olarak eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} 0 &= A^n B_{n-1} + A^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \dots + A(B_0 - AB_1) - AB_0 \\ &= A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n \end{aligned}$$

elde edilir [5].

2.5 Özdeğer ve Özvektörler

2.5.1 Tanım V, W birer vektör uzayı ve $T: V \rightarrow W$ bir fonksiyon olsun

- i. Her $x, y \in V$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- ii. $r \in R$ ve her $x \in V$ için $T(rx) = r T(x)$

koşulları sağlanıyorsa T fonksiyonuna V 'den W 'ya bir lineer (doğrusal) dönüşüm denir [3].

2.5.2 Tanım $T: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun ve bu lineer dönüşüm bir A matrisi ile temsil edilsin, $x \in V$ olmak üzere,

$$T(x) = \lambda x \tag{2.4}$$

olacak şekilde $x \in V$ varsa λ sayısına T dönüşümünün bir özdeğeri, x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen özvektör adı verilir [3].

2.5.3 Tanım $A = (a_{ij})_{n \times n}$ tipinde bir kare matris ve $I_{n \times n}$ tipinde birim matris olmak üzere, $|A - \lambda I| = 0$ denkleminde, A matrisinin karakteristik denklemi denir. Bu denklemin kökleri ise A matrisinin özdeğerleridir [3].

3. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI

3.1 Fibonacci Dizisi

3.1.1 Tanım

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 3 \text{ için} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine Fibonacci dizisi denir.

Tanıma göre dizinin terimleri; 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, ... şeklinde devam eder.

Giriş bölümünde bahsettiğimiz problemin çözümüne dönecek olursak; 1 yılın sonunda $F_{13} = 233$ tavşan çifti olup bunların 89'u yavru tavşan ve 144'ü yetişkin tavşandır [6].

Fibonacci sayıları, tekrarlama bağıntısı nedeniyle birçok özelliği sağlamaktadır. Bu bölümde bunlardan bazıları incelenecektir.

3.1.2 Teorem $n \geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1 \quad (3.1)$$

İspat: Tekrarlama bağıntısı her bir adımda kullanılırsa,

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ &\dots\dots\dots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n-1} \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

elde edilir [6].

3.1.3 Teorem $n \geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=m}^n F_i = F_{n+2} - F_{m+1} \quad (3.2)$$

İspat:

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n F_i &= F_m + F_{m+1} + \dots + F_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n - (F_1 + F_2 + \dots + F_{m-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n F_i - \sum_{i=1}^{m-1} F_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_{n+2} - 1 - (F_{m+1} - 1) \\
&= F_{n+2} - F_{m+1}
\end{aligned}$$

bulunur [6].

Ayrıca Fibonacci sayılarının tek, tek, çift, tek, tek, çift ... şeklinde devam ettiği de dikkat çeken bir özelliktir. 3'ün katı olan terimlerde Fibonacci sayısı çift doğal sayı olacaktır. Çünkü, iki tek sayının toplamı, bir çift sayıdır.

3.1.4 Teorem

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad (3.3)$$

İspat: İspat için tümevarım yöntemini kullanacağız.

$n = 1$ için

$$F_1^2 = 1^2 = F_1 \cdot F_2$$

olduğu açıktır.

Varsayalım ki, $n = k$ için doğru olsun. Yani,

$$\sum_{i=1}^k F_i^2 = F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$$

olsun. Şimdi $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 = F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 &= F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 \\
&= \sum_{i=1}^k F_i^2 + F_{k+1}^2 \\
&= F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\
&= F_{k+1} (F_k + F_{k+1}) \\
&= F_{k+1} \cdot F_{k+2}
\end{aligned}$$

elde edilir [6].

3.1.5 Teorem

1.

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} \quad (3.4)$$

2.

$$\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 \quad (3.5)$$

İspat 1:

$$F_1 = F_2 - F_0$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

....

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

elde edilir [6].

İspat 2: Benzer şekilde,

$$F_2 = F_3 - F_1$$

$$F_4 = F_5 - F_3$$

$$F_6 = F_7 - F_5$$

....

$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

elde edilir [6].

3.1.6 Teorem $n \geq 0$ için

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1} \quad (3.6)$$

dir [6].

İspat: Bu eşitliği göstermek için yine tümevarım yöntemini kullanalım.

$n = 0$ için

$$F_1^2 + F_0^2 = 1 + 0 = 1 = F_1$$

$n = 1$ için

$$F_2^2 + F_1^2 = 1 + 1 = 2 = F_3$$

$n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Öyle ki

$$F_{k+1}^2 + F_k^2 = F_{2k+1}$$

doğru olsun.

$n = k + 1$ için,

$$F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 = F_{2(k+1)+1} = F_{2k+3}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 &= (F_k + F_{k-1})(F_k + F_{k-1}) + (F_{k+1} + F_k)(F_{k+1} + F_k) \\ &= F_k^2 + F_{k-1}^2 + F_k F_{k-1} + F_{k-1} F_k + F_{k+1}^2 + F_k^2 + F_{k+1} F_k + F_k F_{k+1} \\ &= F_k^2 + F_{k-1}^2 + 2F_k F_{k-1} + F_{k+1}^2 + F_k^2 + 2F_k F_{k+1} \\ &= F_{2k-1}^2 + F_{k+1}^2 + F_k^2 = F_{2k+1} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 &= F_{2k-1} + F_{2k+1} + F_k F_{k-1} + F_{k-1} F_k + F_{k+1} F_k + F_k F_{k+1} \\
&= F_{2k-1} + F_{2k+1} + F_k F_{k-1} + F_{k+1} F_k + F_k F_{k-1} + F_{k+1} F_k \\
F_{m+n+1} &= F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n
\end{aligned}$$

eşitliğinde (Bkz (4.2))

$m = k$ ve $n + 1 = k$ yazılırsa,

$$F_k F_{k-1} + F_{k+1} F_k = F_{2k}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 &= F_{2k-1} + F_{2k+1} + F_{2k} + F_{2k} \\
&= F_{2k+1} + F_{2k+2} = F_{2k+3}
\end{aligned}$$

bulunur.

3.2 Cassini Bağıntısı

Cassini bağıntısı, ardışık üç Fibonacci sayısı arasındaki ilişkiyi verir. Bu teorem 1680 yılında İtalyan matematikçi Giovanni Cassini tarafından verilmiştir.

3.2.1 Teorem (Cassini Bağıntısı)

$n \geq 1$ olmak üzere,

$$F_{n-1} F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n \quad (3.7)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bağıntının ispatı için tümevarım yöntemini kullanacağız.

$n = 1$ için

$$\begin{aligned}
F_0 \cdot F_2 &= F_1^2 + (-1)^1 \\
0 \cdot 1 &= 1^2 + (-1)^1 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

$n = k$ için,

$$F_{k-1} F_{k+1} = F_k^2 + (-1)^k$$

doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için,

$$F_k F_{k+2} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$$

ifadesinin doğru olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k \cdot (F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2 \\
&= F_k^2 + F_k F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\
&= F_k^2 + F_{k+1} (F_k - F_{k+1})
\end{aligned}$$

$F_k - F_{k+1} = -F_{k-1}$ olduğundan,

$$= F_k^2 - F_{k+1} \cdot F_{k-1}$$

$$= F_k^2 - (F_k^2 + (-1)^k) \\ = (-1)^{k+1}$$

olur [6].

3.2.2 Teorem İki ardışık Fibonacci sayısı aralarında asaldır. Yani her $n \geq 1$ için

$$(F_n, F_{n+1}) = 1 \text{ dir.}$$

İspat: Varsayalım ki F_n ve F_{n+1} aralarında asal olmasınlar. O zaman öyle bir p asalı vardır ki, F_n ve F_{n+1} sayılarını böler. Cassini bağıntısına göre

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

olduğundan

$$p|F_{n+1} \text{ ve } p|F_n \text{ ise } p|(-1)^n$$

olmalıdır. Yani $p| \pm 1$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde varsayımımız yanlıştır [6].

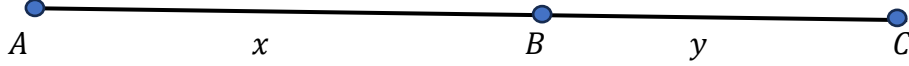
3.3 Fibonacci Dizisi ve Altın Oran

Birçok alanda ilginç uygulaması bulunduğundan, matematikteki en önemlileri sabitlerden birisi de altın orandır. Altın oran:

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (3.8)$$

denkleminin pozitif kökü olan altın oran bir irrasyonel sayı olup yaklaşık değeri 1,618 ... dir. Φ veya a sembolü ile gösterilir. Altın orana ulaşmanın bir başka yolu da şu şekildedir.

Bir AB doğru parçası üzerindeki bir C noktası için, tüm parçanın büyük parçaya oranı ile büyük parçanın küçük parçaya oranını birbirine eşitleyelim.



$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$xy + y^2 = x^2$$

Eşitliğin her iki tarafını y^2 ile bölelim.

$$\frac{x}{y} + 1 = \frac{x^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{x}{y} = \phi \text{ olsun}\right)$$

$$\phi + 1 = \phi^2 \\ \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

denklemini elde edilir ve bu denklemin iki kökü:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

olarak bulunur.

Altın oran; bu denklemin pozitif kökü olan $\alpha \cong 1,61833 \dots$ dür. Ayrıca Fibonacci sayılarının altın oran ile ilişkisi, Fibonacci sayıları birbirine bölündüğünde elde edilen F_{n+1}/F_n oranlarının limiti altın orana eşittir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha \quad (3.9)$$

olur [7].

Fibonacci terimlerinin ardışık terimlerinin oranı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.1: Fibonacci sayılarının ardışık terimleri oranı

F_{n+1}	F_n	F_{n+1}/F_n
1	1	1
2	1	2
3	2	1
5	3	1,66
8	5	1,60
13	8	1,625
21	13	1,6153
34	21	1,6190
55	34	1,6176
89	55	1,6181
144	89	1,6179
233	144	1,61805

3.3.1 α ve β 'nin Kuvvetlerinin Bulunması

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin köklerinin

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

olduğuna değinmiştik. Buradan,

$$\alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \quad (3.10)$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -1 \quad (3.11)$$

bulunur.

Şimdi α 'nın kuvvetlerine bakalım,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \alpha \cdot \alpha = \alpha(1 - \beta) = \alpha - \alpha\beta = \alpha + 1, \\
\alpha^3 &= \alpha\alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1, \\
\alpha^4 &= \alpha\alpha^3 = \alpha(2\alpha + 1) = 2\alpha^2 + \alpha = 2(\alpha + 1) + \alpha = 3\alpha + 2
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\alpha^5 &= 5\alpha + 3 \\
\alpha^6 &= 8\alpha + 5 \\
\alpha^7 &= 13\alpha + 8 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde devam eder [7].

β 'nin kuvvetleri de benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= \beta \cdot \beta = \beta(1 - \alpha) = \beta - \alpha\beta = \beta + 1, \\
\beta^3 &= \beta\beta^2 = \beta(\beta + 1) = \beta^2 + \beta = \beta + 1 + \beta = 2\beta + 1, \\
\beta^4 &= \beta\beta^3 = \beta(2\beta + 1) = 2\beta^2 + \beta = 2(\beta + 1) + \beta = 3\beta + 2, \\
\beta^5 &= 5\beta + 3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak devam eder [7].

3.3.1.1 Teorem $n \geq 1$ için

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1} \quad (3.12)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Tümevarım yöntemini kullanalım.

$n = 1$ için doğru olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= \alpha F_1 + F_0 \\
\alpha &= \alpha
\end{aligned}$$

$n = k$ için doğruluğunu kabul edelim.

$$\alpha^k = \alpha F_k + F_{k-1}$$

olsun.

$n = k + 1$ için,

$$\alpha^{k+1} = \alpha F_{k+1} + F_k$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\alpha^{k+1} &= \alpha\alpha^k = \alpha(\alpha F_k + F_{k-1}) \\
&= \alpha^2 F_k + \alpha F_{k-1} \\
&= (\alpha + 1)F_k + \alpha F_{k-1} \\
&= \alpha(F_k + F_{k-1}) + F_k
\end{aligned}$$

$$= \alpha F_{k+1} + F_k$$

bulunur [7].

3.3.1.2 Teorem $n \geq 1$ için

$$\beta^n = \beta F_n + F_{n-1} \quad (3.13)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Eşitliği göstermek için yine tümevarım yöntemi kullanalım.

$n = 1$ için doğruluğunu görelim,

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \beta F_1 + F_0 \\ \beta &= \beta \end{aligned}$$

elde edilir.

$n = k$ için doğru olduğunu varsayalım.

$$\beta^k = \beta F_k + F_{k-1}$$

olsun.

$n = k + 1$ için,

$$\begin{aligned} \beta^{k+1} &= \beta \beta^k = \beta(\beta F_k + F_{k-1}) \\ &= \beta^2 F_k + \beta F_{k-1} \\ &= (\beta + 1)F_k + \beta F_{k-1} \\ &= \beta(F_k + F_{k-1}) + F_k \\ &= \beta F_{k+1} + F_k \end{aligned}$$

olur. Böylece $n = k + 1$ için doğru olduğu görülür [7].

3.4 Binet Formülünün Elde Edilmesi

Bu formül, 1843 yılında Binet tarafından elde edilmiştir.

$n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} \alpha^n &= \alpha F_n + F_{n-1} \\ \beta^n &= \beta F_n + F_{n-1} \end{aligned}$$

yazılır, iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha^n - \beta^n &= \alpha F_n - \beta F_n \\ \alpha^n - \beta^n &= F_n(\alpha - \beta) \\ F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

bulunur.

$\alpha - \beta = \sqrt{5}$ olduğundan aşağıdaki teorem elde edilir.

3.4.1 Teorem (Binet) $n \geq 1$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \quad (3.14)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ dizisinin Fibonacci sayılarına eşit olduğunu göstermek için her n doğal sayısı için bu iki dizinin eşit olduğunu gösterelim.

$n = 1$ için,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = F_1 \\ u_2 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{\sqrt{5}} = 1 = F_2 \end{aligned}$$

$n \geq 3$ için,

$$\begin{aligned} u_{n-1} + u_{n-2} &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n-2}(\alpha + 1) - \beta^{n-2}(\beta + 1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n-2}\alpha^2 - \beta^{n-2}\beta^2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\ &= u_n \end{aligned}$$

olduğuna dikkate edilirse, tekrarlama bağıntısının sağlandığı da görülür. Böylece $n \geq 1$ için $u_n = F_n$ elde edilir [6].

3.4.2 Teorem $n \geq 1$ için,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot (F_n) \quad (3.15)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{(1/\alpha)^n - (1/\beta)^n}{\alpha - \beta}$$

(3.11) kullanılırsa, $1/\alpha = -\beta$ ve $1/\beta = -\alpha$

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{(1/\alpha)^n - (1/\beta)^n}{\alpha - \beta} = \frac{(-1)^n \cdot (\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot F_n \end{aligned}$$

olarak bulunur [7].

3.5 Lucas Dizisi

Fibonacci sayılarının başlangıç koşulları $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olarak değiştirilip aynı tekrarlama bağıntısını kullanılırsa Lucas Sayıları elde edilir öyle ki

$$\begin{aligned} L_1 &= 1, & L_2 &= 3 \\ L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} & n &\geq 3 \text{ için} \end{aligned}$$

$$L_n = 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$$

şeklinde devam eder [7].

Lucas sayı dizisi ile Fibonacci sayı dizisi aynı tekrarlama bağıntısına sahip olduklarından birçok özellikleri benzerdir.

3.5.1 Lucas Dizisi Bağıntıları

Bu bölümde Lucas sayılarının sağladığı bağıntılar teorem olarak verilecektir. Teoremlerin benzerleri Fibonacci dizisi konusunda ispatlandığı için ispatlara gerek duyulmamıştır.

Teorem 3.5.1.1

1.

$$\sum_{i=1}^n L_i = L_1 + L_2 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3 \quad (3.16)$$

2.

$$\sum_{i=1}^n L_i = L_1 + L_3 + \dots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2 \quad (3.17)$$

3.

$$\sum_{i=1}^n L_{2i} = L_2 + L_4 + \dots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1 \quad (3.18)$$

4.

$$\sum_{i=1}^n L_i^2 = L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2 \quad (3.19)$$

5.

$$L_n^2 - L_{n-1} L_{n+1} = 5(-1)^n \quad (3.20)$$

6.

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (3.21)$$

7.

$$L_{-n} = (-1)^n L_n \quad (3.22)$$

denklemleri sağlanır [6].

3.6 Fibonacci Sayıları ve Lucas Sayılarını İçeren Teoremler

Bu bölümde, iki sayı dizisinin de bulunduğu teoremler ispatları ile birlikte verilecektir. Bu teoremlerden bazılarının ispatları 4. bölümde matrisler kullanılarak tekrar elde edilecektir.

3.6.1 Teorem Her $n \geq 1$ için,

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \quad (3.23)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Denklem (3.14) ve (3.11) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_{n-1} &= \frac{a^{n-1} - \beta^{n-1}}{a - \beta} + \frac{a^{n+1} - \beta^{n+1}}{a - \beta} \\ &= \frac{-(a\beta)a^{n-1} + (a\beta)\beta^{n-1} + a^{n+1} - \beta^{n+1}}{a - \beta} \\ &= \frac{-\beta a^n + a\beta^n + aa^n - \beta\beta^n}{a - \beta} \\ &= \frac{a^n(-\beta + a) + \beta^n(a - \beta)}{a - \beta} \\ &= \frac{(a - \beta)(a^n + \beta^n)}{a - \beta} \\ &= a^n + \beta^n \\ &= L_n \end{aligned}$$

bulunur [8].

3.6.2 Teorem $n \geq 1$ için,

$$L_n F_n = F_{2n} \quad (3.24)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Denklem (3.14) ve (3.21) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} F_n L_n &= \frac{a^n - \beta^n}{a - \beta} \cdot (a^n + \beta^n) \\ &= \frac{a^{2n} - \beta^{2n}}{a - \beta} = F_{2n} \end{aligned}$$

olarak bulunur [8].

3.6.3 Teorem $n \geq 1$ için,

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Denklem (3.14) kullanılırsa,

$$F_{n+2} - F_{n-2} = \frac{a^{n+2} - \beta^{n+2} - a^{n-2} + \beta^{n-2}}{a - \beta}$$

$(a\beta)^2 = 1$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &= \frac{a^{n+2} - \beta^{n+2} - (a\beta)^2 a^{n-2} + (a\beta)^2 \beta^{n-2}}{a - \beta} \\ &= \frac{a^n(a^2 - \beta^2) + \beta^n(a^2 - \beta^2)}{a - \beta} \\ &= \frac{(a^n + \beta^n)(a - \beta)(a + \beta)}{a - \beta} \\ &= (a^n + \beta^n)(a + \beta) = a^n + \beta^n = L_n \end{aligned}$$

olarak bulunur [8].

3.6.4 Teorem

$$L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2 \quad (3.25)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Denklem (3.21) verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L_n^2 - 4(-1)^n &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - 4(-1)^n \\ \alpha\beta &= -1 \text{ olduğundan,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_n^2 - 4(-1)^n &= \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} - 4(\alpha\beta)^n \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n \\ &= (\alpha^n - \beta^n)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

olduğundan,

$$(\alpha^n - \beta^n)^2 = (\sqrt{5}F_n)^2 = 5F_n^2$$

olur [8].

3.6.5 Teorem

$$5F_{n+1} = L_{n+1} + 2L_n \quad (3.26)$$

eşitliği sağlanır [8].

İspat: Denklem (3.23) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} L_{n+1} + 2L_n &= F_n + F_{n+2} + 2(F_{n-1} + F_{n+1}) \\ &= F_n + F_n + F_{n+1} + 2F_{n-1} + 2F_{n+1} \\ &= F_n + F_n + F_n + F_{n-1} + 2F_{n-1} + 2F_n + 2F_{n-1} \\ &= 5F_n + 5F_{n-1} \\ &= 5(F_n + F_{n-1}) \\ &= 5F_{n+1} \end{aligned}$$

bulunur.

3.6.6 Teorem $n \geq 1$ için,

$$F_n L_{n+1} + F_{n+1} L_n = 2F_{2n+1} \quad (3.27)$$

eşitliği sağlanır [9].

İspat: Tümevarım yöntemi kullanalım.

$n = 1$ için

$$F_1 L_2 + F_2 L_1 = 2F_3$$

$$1.1 + 1.3 = 4 = 2.2$$

$n = k$ için

$$F_k L_{k+1} + F_{k+1} L_k = 2F_{2k+1}$$

ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için,

$$F_{k+1} L_{k+2} + F_{k+2} L_{k+1} = 2F_{2k+3}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_{k+1} L_{k+2} + F_{k+2} L_{k+1} &= F_{k+1} (L_{k+1} + L_k) + (F_{k+1} + F_k) L_{k+1} \\ &= F_{k+1} L_{k+1} + F_{k+1} L_k + F_{k+1} L_{k+1} + F_k L_{k+1} \\ &= 2F_{k+1} L_{k+1} + (F_{k+1} L_k + F_k L_{k+1}) \\ &= 2F_{k+1} L_{k+1} + 2F_{2k+1} \end{aligned}$$

Denklem (3.24) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 2F_{k+1} L_{k+1} &= 2F_{2k+2} \\ 2F_{2k+2} + 2F_{2k+1} &= 2(F_{2k+1} + F_{2k+2}) = 2F_{2k+3} \end{aligned}$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

3.7 Altın Oran Analizi

Fibonacci sayı dizisi için ardışık iki terimin oranının altın oran olan α sayısına yakınsadığına Bölüm 3.3 de değinmiştik.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha \quad (3.28)$$

dır. Benzer olarak, bu durum Lucas sayıları için de gerçekleşir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha \quad (3.29)$$

Bu durum aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.2: Lucas sayılarının ardışık terimleri oranı

L_{n+1}	L_n	L_{n+1}/L_n
3	1	3
4	3	1,33

Tablo 3.2 (devam)

7	4	1,75
11	7	1,57
18	11	1,63
29	18	1,61
47	29	1,620
76	47	1,617
123	76	1,618
199	123	1,6178
322	199	1,6180

Fibonacci ve Lucas dizilerinin ardışık terimlerinin oranı $(F_{n+1}/F_n$ ve $L_{n+1}/L_n)$ nasıl α sayısına yakınsıyorsa, aynı indirgeme formülüne sahip herhangi bir x_n dizisinin her dizinin ardışık terimlerinin oranları da ilk iki başlangıç terimi ne olursa olsun $\alpha \cong 1,618 \dots$ sayısına (altın oran) yakınsayacaktır [6].

3.7.1 Örnek $Z_1 = 3$ ve $Z_2 = 7$ ve $n \geq 3$ için $Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-2}$ şekilde bir Z sayı dizisi tanımlayalım.

$$Z_n = 3, 7, 10, 17, 27, 44, 71, 115, 186, 301 \dots$$

şeklinde olup bu sayı dizisi için de,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{n+1}}{Z_n} = \alpha \quad (3.30)$$

olmaktadır.

Z_n sayı dizisinin ardışık terimlerinin oranlarının limiti aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.3: Z sayı dizisinin ardışık terimleri oranı

Z_{n+1}	Z_n	Z_{n+1}/Z_n
7	3	2,3
10	7	1,42
17	10	1,7
27	17	1,58
44	27	1,62
71	44	1,61

Tablo 3.3 (devam)

115	71	1,619
186	115	1,6173
301	186	1,6182

4. FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI İLE İLGİLİ MATRİSLER

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkili olan matrisler ve bu matrislerin sağladığı özellikler incelenecek, ikinci bölümde verilen bağıntı ve teoremlerden bazıları matrisler yardımıyla yeniden elde edilecektir. Buna ek olarak Fibonacci matrislerinin nasıl elde edilebileceği ele alınacak ve sonsuz boyutlu bir matris olan H matrisi ve bu matrisin girdileri incelenecektir.

4.1 Q Matrisi

İnceleyeceğimiz bu matris, ilk olarak Charles H. King, 1960 yılında yüksek lisans tezi olarak çalışmıştır.

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olarak tanımlanır. Q matrisinin determinanı,

$$|Q| = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

olur.

Q matrisinin kuvvetleri,

$$\begin{aligned} Q^2 &= Q \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ Q^3 &= Q \cdot Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ Q^4 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak devam eder [7].

4.1.1 Teorem $n \geq 1$ için,

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olur.

İspat: Tümevarım kullanalım.

$n = 1$ için,

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

olur ve iddia doğrudur.

$n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi ise,

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$Q^{k+1} = Q \cdot Q^k$$

olduğundan,

$$Q^{k+1} = Q \cdot Q^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_k + F_{k-1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

olur [9].

4.1.2 Cassini Bağıntısının Q Matrisi Yoluyla Elde Edilmesi

Daha önce ispatını verdiğimiz Cassini Bağıntısını (Bkz (3.7)), Q matrisi kullanarak farklı şekilde ispatlayabiliriz.

Matrislerde,

$$|Q^n| = |Q|^n \quad (4.1)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} |Q^n| &= F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 \\ |Q|^n &= (-1)^n \\ F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n \end{aligned}$$

elde edilir [9].

4.1.3 Q Matrisi Kullanılarak Üretilen Bazı Bağıntılar

Q matrisini kullanarak aşağıdaki bağıntılar elde edilebilir.

4.1.3.1 Teorem

1.

$$F_{m+n+1} = F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n \quad (4.2)$$

2.

$$F_{m+n} = F_{m+1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n-1} \quad (4.3)$$

3.

$$F_{m+n} = F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n \quad (4.4)$$

4.

$$F_{m+n-1} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1} \quad (4.5)$$

İspat: Matrislerde,

$$Q^m \cdot Q^n = Q^{m+n} \quad (4.6)$$

olduğundan,

$$\begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n & F_{m+1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n-1} \\ F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n & F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

olur. Matrislerin eşitliğinden,

1.

$$F_{m+n+1} = F_{m+1} \cdot F_{n+1} + F_m \cdot F_n$$

2.

$$F_{m+n} = F_{m+1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n-1}$$

$$3. \quad F_{m+n} = F_m \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n$$

$$4. \quad F_{m+n-1} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$$

bulunur [10].

4.1.3.2 Teorem

$$1. \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad (4.7)$$

$$2. \quad F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_n \cdot F_{n-1} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n L_n \quad (4.8)$$

$$3. \quad F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \quad (4.9)$$

İspat: $Q^m \cdot Q^n = Q^{m+n}$ bağıntısında $m = n$ alınırsa,

$$Q^n \cdot Q^n = Q^{2n}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1}^2 + F_n^2 & F_{n+1} \cdot F_n + F_n \cdot F_{n-1} \\ F_n \cdot F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_n & F_n^2 + F_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix}$$

olur ve matrislerin eşitliğinden

$$1. \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

$$2. \quad F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_n F_{n-1} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n L_n$$

$$3. \quad F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$$

bulunur [10].

4.1.3.3 Teorem

$$F_{m+1}L_n + F_m L_{n-1} = L_{m+n} \quad (4.10)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Denklem (4.2)' de n yerine $n + 1$ yazalım ve (4.3) ile toplayalım:

$$F_{m+1}(F_{n+2} + F_n) + F_m(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{m+n+2} + F_{m+n}$$

Denklem (3.23) kullanılırsa,

$$F_{m+1}L_{n+1} + F_m L_n = L_{m+n+1}$$

ve son olarak da ifadede n yerine $n - 1$ yazılırsa,

$$F_{m+1}L_n + F_m L_{n-1} = L_{m+n}$$

elde edilir [10].

4.1.3.4 Teorem

$$2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m \quad (4.11)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Denklem (4.3) ve (4.4) taraf tarafa toplanırsa,

$$2F_{m+n} = F_m(F_{n+1} + F_{n-1}) + F_n(F_{m+1} + F_{m-1})$$

$$2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m$$

bulunur [10].

4.1.4 Q Matrisinin Özdeğer ve Özvektör Analizi

Q matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulmak için, bu matrisin karakteristik denklemini bulalım.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|Q - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemi çözersek,

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \beta$$

bulunur.

Q matrisinin karakteristik denkleminin kökleri (yani özdeğerleri) α ve β dır [10].

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 'e karşılık gelen özvektör,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

$x = \alpha y$ olduğundan,

$$(x, y) = (\alpha y, y) = y(\alpha, 1)$$

α' ya karşılık gelen özvektör $(\alpha, 1)$ olur.

$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 'ye karşılık gelen özvektör,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta x \\ \beta y \end{bmatrix}$$

$$x = \beta y$$

$$(x, y) = (\beta y, y) = y(\beta, 1)$$

β' ya karşılık gelen özvektör $(\beta, 1)$ olur.

Q^n matrisinin karakteristik denklemine bakalım.

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$|Q^n - \lambda I| = \begin{vmatrix} F_{n+1} - \lambda & F_n \\ F_n & F_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = (F_{n+1} - \lambda) \cdot (F_{n-1} - \lambda) - F_n^2$$

$$(F_{n+1} - \lambda) \cdot (F_{n-1} - \lambda) - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+1}\lambda - F_{n-1}\lambda + \lambda^2 - F_n^2$$

$$= \lambda^2 - (F_{n+1} + F_{n-1})\lambda + F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$$

Denklem (3.7) ve (3.23) kullanılırsa karakteristik denklem,

$$x^2 - L_n x + (-1)^n = 0 \text{ olur.}$$

Bu 2. dereceden denklemin köklerine bakacak olursak,

$$x_1 = \frac{L_n + \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2}$$

$$x_2 = \frac{L_n - \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2}$$

denklem (3.25) kullanılırsa,

$$x_1 = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}$$

$$x_2 = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}$$

bulunur.

$$\alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}F_n \text{ ve } \alpha^n + \beta^n = L_n$$

olduğundan

$$x_1 = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} = \alpha^n$$

$$x_2 = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2} = \beta^n$$

olarak bulunur. Bunlar da Q^n matrisinin özdeğerleridir [10].

4.1.5 Q Matrisinin Tersi

Q matrisinin karakteristik denklemi $x^2 - x - 1$ idi. Cayley-Hamilton teoremine göre, her kare matris kendi karakteristik denklemini sağlayacağından,

$$Q^2 - Q - I = 0 \tag{4.12}$$

yazılabilir.

$|Q| = -1 \neq 0$ olduğundan, Q matrisi tersinirdir.

$|Q - I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ olduğundan, $Q - I$ matrisi de tersinirdir.

Cayley-Hamilton Teoremini kullanılarak bu iki matrisin birbirinin tersi olduğunu gösterelim.

$$Q^2 - Q - I = 0$$

$$Q(Q - I) = I$$

$$Q^{-1} = Q - I$$

bulunur.

Şimdi Teorem 3.1.2 için, Q matrisini kullanarak başka bir ispat verelim.

$Q^{n+1} - I = (I + Q + Q^2 + \dots + Q^n) \cdot (Q - I)$
 $(Q - I)^{-1} = Q$ olduğundan, eşitliğin her iki tarafı sağdan $(Q - I)^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$I + Q + Q^2 + \dots + Q^n = (Q^{n+1} - I) \cdot Q$$

$$= Q^{n+2} - Q$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+3} - 1 & F_{n+2} - 1 \\ F_{n+2} - 1 & F_{n+1} \end{bmatrix}$$

Bu toplamdaki her bir matrisin, a_{12} elemanları toplanıp, eşitliğin ikinci tarafındaki matrisin aynı elemanı ile eşitlenirse,

$$0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

bulunur [10].

4.2 M Matrisi

M matrisi, Q matrisi ile ilişkili olup 1983 yılında Sam Moore tarafından incelenmiştir.

4.2.1 Tanım M matrisi,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır [11].

4.2.2 Teorem $n \geq 1$ için ,

$$M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$$

İspat: Teoremi ispatlamak için tümevarım kullanacağız.
 $n = 1$ için,

$$M = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğundan doğrudur.
 $n = k$ için,

$$M^k = \begin{bmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{bmatrix}$$

olduğunu kabul edelim.
 $n = k + 1$ için,

$$M^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+2} \\ F_{2k+2} & F_{2k+3} \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

$$M^{k+1} = M \cdot M^k$$

olduğundan,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2k-1} + F_{2k} & F_{2k} + F_{2k+1} \\ F_{2k-1} + 2F_{2k} & F_{2k} + 2F_{2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+2} \\ F_{2k+2} & F_{2k+3} \end{bmatrix}$$

elde edilir [11].

4.3 M ve Q Matrislerinin Limiti

M^n matrisinin limitini görmek için,

$$\frac{M^n}{F_{2n} - 1} = \begin{bmatrix} 1 & F_{2n}/F_{2n-1} \\ F_{2n}/F_{2n-1} & F_{2n+1}/F_{2n-1} \end{bmatrix}$$

oluşturalım.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_k}{F_{k-1}} = \alpha \quad \text{olduğundan,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = \alpha \quad \text{olur.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} + \frac{F_{2n-1}}{F_{2n-1}} = \alpha + 1 = \alpha^2$$

Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^n}{F_{2n-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

olur.

Q^n matrisi için aynı işlemi yapacak olursak,

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{Q^n}{F_{n-1}} = \begin{bmatrix} \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} & \frac{F_n}{F_{n-1}} \\ \frac{F_n}{F_{n-1}} & \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}} \end{bmatrix}$$

bulunur.

Burada limit uygularsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q^n}{F_{n-1}} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur [11].

4.4 S Matrisi

Elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan S matrisi, Lucas ve Fibonacci sayılarının birlikte yer aldığı bağıntıların ispatlarında kullanılması açısından önemlidir.

4.4.1 Tanım S matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Buna göre,

$$S^2 = S.S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$S^3 = S.S^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

olarak devam eder. [12]

4.4.2 Teorem $n \geq 1$ olmak üzere,

$$S^n = \begin{bmatrix} \frac{L_n}{2} & \frac{5F_n}{2} \\ \frac{F_n}{2} & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat: Eşitliği göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım.

$n = 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{2} & \frac{5F_1}{2} \\ \frac{F_1}{2} & \frac{L_1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

doğru olur.

$n = k$ için doğruluğunu kabul edelim yani,

$$S^k = \begin{bmatrix} \frac{L_k}{2} & \frac{5F_k}{2} \\ \frac{F_k}{2} & \frac{L_k}{2} \end{bmatrix}$$

olsun.

$n = k + 1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz. Yani,

$$S^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{L_{k+1}}{2} & \frac{5F_{k+1}}{2} \\ \frac{F_{k+1}}{2} & \frac{L_{k+1}}{2} \end{bmatrix}$$

olduğunu göstereceğiz.

$$S^{k+1} = S.S^k$$

olduğundan

$$S^{k+1} = S.S^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_k}{2} & \frac{5F_k}{2} \\ \frac{F_k}{2} & \frac{L_k}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_k + 5F_k}{4} & \frac{5F_k + 5L_k}{4} \\ \frac{L_k + F_k}{4} & \frac{5F_k + L_k}{4} \end{bmatrix}$$

bulunur. [12]

Matris eşitliği tanımından,

1.satır 1. sütun elemanlarının eşitliği için,

$$\begin{aligned}
 L_k + 5F_k &= L_k + F_k + 4F_k \\
 &= (2F_{k+1} - F_k) + F_k + 4F_k \\
 &= 2F_{k+1} + 4F_k \\
 &= 2(F_{k+1} + 2F_k) \\
 &= 2(F_{k+1} + F_k + F_k) \\
 &= 2(F_k + F_{k+2}) \\
 &= 2L_{k+1}
 \end{aligned}$$

Böylece,

$$\frac{L_k + 5F_k}{4} = \frac{2L_{k+1}}{4} = \frac{L_{k+1}}{2}$$

1. satır 2. sütun elemanları için,

$$\frac{5F_k + 5L_k}{4} = \frac{5(F_k + L_k)}{4} = \frac{10F_{k+1}}{4} = \frac{5F_{k+1}}{2}$$

2. satır 1. sütun elemanları için,

$$\frac{L_k + F_k}{4} = \frac{2F_{k+1}}{4} = \frac{F_{k+1}}{2}$$

bulunur [12].

4.4.3 Teorem $n \geq 1$ için,

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4 \cdot (-1)^n \quad (4.13)$$

İspat:

$$\begin{aligned}
 S &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 |S| &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-4}{4} = -1
 \end{aligned}$$

Teorem 2.3.7 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 |S^n| &= \begin{vmatrix} \frac{L_n}{2} & \frac{5F_n}{2} \\ \frac{F_n}{2} & \frac{L_n}{2} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{L_n^2}{4} - \frac{5F_n^2}{4} = \frac{L_n^2 - 5F_n^2}{4} \\
 &= (-1)^n \\
 &= |S|^n \\
 L_n^2 - 5F_n^2 &= 4 \cdot (-1)^n
 \end{aligned}$$

bulunur. [12]

4.4.4 Teorem

$$2L_{m+n} = L_m L_n + 5F_m F_n \quad (4.14)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $S^n \cdot S^m = S^{m+n}$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} \frac{L_n}{2} & \frac{5F_n}{2} \\ \frac{F_n}{2} & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_m}{2} & \frac{5F_m}{2} \\ \frac{F_m}{2} & \frac{L_m}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_n L_m + 5F_n F_m)/4 & 5(F_n L_m + L_n F_m)/4 \\ (F_n L_m + L_n F_m)/4 & (L_n L_m + 5F_n F_m)/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_{n+m}}{2} & \frac{5F_{n+m}}{2} \\ \frac{F_{n+m}}{2} & \frac{L_{n+m}}{2} \end{bmatrix}$$

Buradan matrislerin eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \frac{L_{n+m}}{2} &= \frac{L_n L_m + 5F_n F_m}{4} \\ 4L_{n+m} &= 2(L_n L_m + 5F_n F_m) \\ 2L_{n+m} &= L_n L_m + 5F_n F_m \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca bu matrislerin eşitliği kullanılarak Denklem (4.11) kolaylıkla gösterilebilir.

Matrislerin 2. satır 1. sütun elemanlarının eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \frac{F_n L_m + L_n F_m}{4} &= \frac{F_{n+m}}{2} \\ 2F_{m+n} &= F_m L_n + F_n L_m \end{aligned}$$

elde edilir [12].

4.4.5 Teorem

1.

$$L_n^2 + 5F_n^2 = 2L_{2n} \quad (4.15)$$

2.

$$F_{2n} = F_n L_n \quad (4.16)$$

İspat: Matrislerde $S^n \cdot S^n = S^{2n}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{L_n}{2} & \frac{5F_n}{2} \\ \frac{F_n}{2} & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_n}{2} & \frac{5F_n}{2} \\ \frac{F_n}{2} & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{L_{2n}}{2} & \frac{5F_{2n}}{2} \\ \frac{F_{2n}}{2} & \frac{L_{2n}}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{L_n^2 + 5F_n^2}{4} & \frac{5F_n L_n + 5F_n L_n}{4} \\ \frac{F_n L_n + F_n L_n}{4} & \frac{5F_n^2 + L_n^2}{4} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{L_{2n}}{2} & \frac{5F_{2n}}{2} \\ \frac{F_{2n}}{2} & \frac{L_{2n}}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{L_n^2 + 5F_n^2}{4} & \frac{5F_n L_n}{2} \\ \frac{F_n L_n}{2} & \frac{5F_n^2 + L_n^2}{4} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{L_{2n}}{2} & \frac{5F_{2n}}{2} \\ \frac{F_{2n}}{2} & \frac{L_{2n}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrislerin eşitliğinden,

1.

$$L_n^2 + 5F_n^2 = 2L_{2n}$$

2.

$$F_{2n} = F_n L_n$$

bulunur [12].

4.5 R Matrisi

Bu matris ilk olarak Hoggatt ve Ruggles tarafından 1963 yılında çalışılmıştır.

4.5.1 Tanım R matrisi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [10].

R ve Q matrisleri kullanılarak, Denklem (3.20) tekrar ispatlanabilir.

Eşitlik; $L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n$ şeklindeydi.

$R \cdot Q^n$ matrisini oluşturalım:

$$\begin{aligned} R \cdot Q^n &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1} + 2F_n & F_n + 2F_{n-1} \\ 2F_{n+1} - F_n & 2F_n - F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + (F_n + F_{n+1}) & F_{n-1} + (F_{n-1} + F_n) \\ F_{n+1} + (F_{n+1} - F_n) & F_n + (F_n - F_{n-1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n+1} + F_{n-1} & F_n + F_{n-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} \\ &\quad |R \cdot Q^n| = |R||Q^n| \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix} \\ -5 \cdot (F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2) &= L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 \\ -5 \cdot (-1)^n &= 5 \cdot (-1)^{n+1} = L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 \\ L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} &= 5(-1)^n \end{aligned}$$

bulunur [10].

4.6 Lambda Fonksiyonu ve P Matrisi

4.6.1 Lambda Fonksiyonu

Bu bölümde lambda fonksiyonu kullanılarak matrisler yardımıyla bazı Fibonacci eşitlikleri elde edilecektir.

4.6.1.1 Tanım $A = (a_{ij})_{n \times n}$ tipinde bir matris olsun. A^* matrisini ise A matrisinin her bir elemanına 1 ekleyerek tanımlayalım.

Lambda fonksiyonu,

$$\lambda(A) = |A^*| - |A| \quad (4.17)$$

olarak tanımlanır [13].

$n = 2$ için, $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ olsun, o zaman $A^* = \begin{bmatrix} x+1 & y+1 \\ z+1 & t+1 \end{bmatrix}$ olur.

Bu matrislerin determinantları,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = xt - yz \\ |A^*| &= \begin{vmatrix} x+1 & y+1 \\ z+1 & t+1 \end{vmatrix} = (x+1)(t+1) - (y+1)(z+1) \\ &= xt + x + t + 1 - yz - y - z - 1 \\ &= xt + x + t - yz - y - z \end{aligned}$$

olup, lambda fonksiyonu

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= |A^*| - |A| = xt + x + t - yz - y - z - (xt - yz) \\ &= xt + x + t - yz - y - z - xt + yz \\ &= x + t - y - z \end{aligned}$$

olarak elde edilir [13].

A^* matrisi, her bir elemanına sabit bir k sayısı ekleyerek oluşturulursa,

$$A^* = \begin{bmatrix} x+k & y+k \\ z+k & t+k \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |A^*| &= \begin{vmatrix} x+k & y+k \\ z+k & t+k \end{vmatrix} \\ &= (x+k)(t+k) - (y+k)(z+k) \\ &= xt + xk + tk + k^2 - (yz + yk + zk + k^2) \\ &= xt + k(x+t) - (yz + k(y+z)) \\ &= xt - yz + k(x+t-y-z) \end{aligned}$$

olur ki, bu durumda

$$|A^*| = |A| + k\lambda(A) \quad (4.18)$$

elde edilir. [13].

Şimdi de Q^n matrisinin lambda fonksiyonunu hesaplayalım:

$$\begin{aligned} Q^n &= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ (Q^n)^* &= \begin{bmatrix} F_{n+1}+1 & F_n+1 \\ F_n+1 & F_{n-1}+1 \end{bmatrix} \\ \lambda(Q^n) &= |(Q^n)^*| - |Q^n| \\ &= [F_{n+1}F_{n-1} + F_{n+1} + F_{n-1} + 1 - (F_n^2 + 2F_n + 1)] - (F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} - 2F_n \\ &= F_{n-1} + (F_{n+1} - F_n) - F_n \\ &= F_{n-1} + F_{n-1} - F_n \\ &= F_{n-1} + (F_{n-1} - F_n) \\ &= F_{n-1} - F_{n-2} \\ &= F_{n-3} \end{aligned}$$

bulunur. Denklem (4.18)' da A yerine Q^n matrisini alırsak,

$$|(Q^n)^*| = |Q^n| + k\lambda(Q^n)$$

$$\begin{aligned} |(Q^n)^*| &= \frac{F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 + kF_{n-3}}{(-1)^n + kF_{n-3}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

bulunur [13].

4.6.1.2 Teorem

$$4F_n^2 = F_{n+2}F_{n+1} - F_nF_{n-3} + (-1)^{n+1} \quad (4.20)$$

eşitliği sağlanır [13].

İspat: Denklem (4.19)'de $(Q^n)^*$ matrisini oluştururken k sabiti yerine özel olarak $k = F_n$ alırsak,

$$\begin{aligned} |(Q^n)^*| &= (-1)^n + F_nF_{n-3} \\ (Q^n)^* &= \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_n \\ F_n + F_n & F_{n-1} + F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} & 2F_n \\ 2F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \\ |(Q^n)^*| &= \begin{vmatrix} F_{n+2} & 2F_n \\ 2F_n & F_{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^n + F_nF_{n-3} \\ F_{n+2}F_{n+1} - 4F_n^2 &= (-1)^n + F_nF_{n-3} \\ 4F_n^2 &= F_{n+2}F_{n+1} - F_nF_{n-3} + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [13]

4.6.2 P Matrisi

4.6.2.1 Tanım P matrisi,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0^2 & F_0F_1 & F_1^2 \\ 2F_0F_1 & F_2^2 - F_0F_1 & 2F_1F_2 \\ F_1^2 & F_1F_2 & F_2^2 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 & F_1F_2 & F_2^2 \\ 2F_1F_2 & F_3^2 - F_1F_2 & 2F_2F_3 \\ F_2^2 & F_2F_3 & F_3^2 \end{bmatrix}, \\ P^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^2 & F_2F_3 & F_3^2 \\ 2F_2F_3 & F_4^2 - F_2F_3 & 2F_3F_4 \\ F_3^2 & F_3F_4 & F_4^2 \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak devam eder [13].

4.6.2.2 Teorem

$$P^n = \begin{bmatrix} F_{n-1}^2 & F_{n-1}F_n & F_n^2 \\ 2F_{n-1}F_n & F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n & 2F_nF_{n+1} \\ F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \end{bmatrix}$$

olur [13].

İspat: Tümevarım kullanacağız.
 $n = 1$ için,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$n > 1$ doğal sayısı için iddiamızı kabul edelim. Öyle ki;

$$P^n = \begin{bmatrix} F_{n-1}^2 & F_{n-1}F_n & F_n^2 \\ 2F_{n-1}F_n & F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n & 2F_nF_{n+1} \\ F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \end{bmatrix}$$

olsun. Göstermemiz gereken ise,

$$P^{n+1} = \begin{bmatrix} F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \\ 2F_nF_{n+1} & F_{n+2}^2 - F_nF_{n+1} & 2F_{n+1}F_{n+2} \\ F_{n+1}^2 & F_{n+1}F_{n+2} & F_{n+2}^2 \end{bmatrix}$$

olduğudur.

$$P^{n+1} = P \cdot P^n$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} P \cdot P^n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1}^2 & F_{n-1}F_n & F_n^2 \\ 2F_{n-1}F_n & F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n & 2F_nF_{n+1} \\ F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \\ 2F_{n-1}F_n + 2F_n^2 & F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} & 2F_nF_{n+1} + 2F_{n+1}^2 \\ F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + F_n^2 & F_{n+1}^2 + F_nF_{n+1} & F_n^2 + 2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i.} & \quad 2F_{n-1}F_n + 2F_n^2 = 2F_n(F_{n-1} + F_n) = 2F_nF_{n+1} \\ \text{ii.} & \quad F_{n+1}^2 - F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} = F_{n+1}^2 - F_n(F_{n+1} - F_n) + 2F_nF_{n+1} \\ & \quad = F_{n+1}^2 + 2F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_nF_{n+1} \\ & \quad = (F_{n+1} + F_n)^2 - F_nF_{n+1} \\ & \quad = F_{n+2}^2 - F_nF_{n+1} \\ \text{iii.} & \quad 2F_nF_{n+1} + 2F_{n+1}^2 = 2F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = 2F_{n+1}F_{n+2} \\ \text{iv.} & \quad F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + F_n^2 = (F_{n-1} + F_n)^2 = F_{n+1}^2 \\ \text{v.} & \quad F_{n+1}^2 + F_nF_{n+1} = F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) = F_{n+1}F_{n+2} \\ \text{vi.} & \quad F_n^2 + 2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n+1})^2 = F_{n+2}^2 \\ & \quad P^{n+1} = \begin{bmatrix} F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_{n+1}^2 \\ 2F_nF_{n+1} & F_{n+2}^2 - F_nF_{n+1} & 2F_{n+1}F_{n+2} \\ F_{n+1}^2 & F_{n+1}F_{n+2} & F_{n+2}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

matrisi elde edilir ve iddia $n + 1$ için doğrulanmış olur.

Herhangi bir $X_{3 \times 3}$ matrisi için $\partial(X)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\partial(X) = \begin{vmatrix} a + e - b - d & b + f - c - e \\ d + h - g - e & e + i - h - f \end{vmatrix}$$

olur.

X yerine P^n matrisini alırsak,

$$\partial(P^n) = \begin{vmatrix} F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 - 4F_{n-1}F_n & 2F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ 3F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 & 2F_{n+1}^2 - 3F_{n+1}F_n - F_nF_{n-1} \end{vmatrix}$$

olarak bulunur [13].

Burada aşağıdaki teoremleri kullanarak determinantın elemanlarını düzenleyelim.

4.6.2.3 Teorem

$$F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 - 4F_{n-1}F_n = F_{2n-3} \quad (4.21)$$

eşitliği sağlanır [13].

İspat:

$$\begin{aligned} F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 - 4F_{n-1}F_n &= F_{n-1}^2 + (F_n + F_{n-1})^2 - 4F_{n-1}F_n \\ &= F_{n-1}^2 + F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - 4F_{n-1}F_n \\ &= 2F_{n-1}^2 + F_n^2 - 2F_{n-1}F_n \\ &= F_n^2 - 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 + F_{n-1}^2 \\ &= (F_n - F_{n-1})^2 + F_{n-1}^2 \\ &= F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2 \\ &= F_{2(n-2)+1} = F_{2n-3} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.6.2.4 Teorem

$$2F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 = F_{2n-2} \quad (4.22)$$

eşitliği sağlanır [13].

İspat:

$$\begin{aligned} 2F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 &= 2F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) - (F_n^2 + F_{n+1}^2) \\ &= 2F_nL_n - 2F_{n+1}^2 \\ &= 2F_{2n} - F_{2n+1} \\ &= F_{2n} - (F_{2n+1} - F_{2n}) \\ &= F_{2n} - F_{2n-1} \\ &= F_{2n-2} \end{aligned}$$

4.6.2.5 Teorem

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 - 3F_{n-1}F_n - F_nF_{n+1} = F_{n-2}^2 \quad (4.23)$$

eşitliği sağlanır [13].

İspat:

$$\begin{aligned} F_n^2 + F_{n+1}^2 - 3F_{n-1}F_n - F_nF_{n+1} &= F_n^2 + (F_n + F_{n-1})^2 - 3F_{n-1}F_n - F_n(F_n + F_{n-1}) \\ &= F_n^2 + F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1} - 3F_{n-1}F_n - F_n^2 - F_nF_{n-1} \\ &= F_n^2 - 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 \\ &= (F_n - F_{n-1})^2 \\ &= F_{n-2}^2 \end{aligned}$$

bulunur.

4.6.2.6 Teorem

$$3F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} - 2F_{n+1}^2 = F_{n-2}F_{n-1} - (-1)^n \quad (4.24)$$

eşitliği sağlanır [13].

İspat: Eşitliğin sol ve sağ tarafının birbirine eşit olduğunu göstermeliyiz.

Sol taraf için,

$$\begin{aligned} 3F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} - 2F_{n+1}^2 &= 3(F_n + F_{n-1})F_n + F_nF_{n-1} - 2(F_n + F_{n-1})^2 \\ &= 3F_n^2 + 3F_nF_{n-1} + F_nF_{n-1} - 2(F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2) \\ &= 3F_n^2 + 4F_nF_{n-1} - 2F_n^2 - 4F_nF_{n-1} - 2F_{n-1}^2 \\ &= F_n^2 - 2F_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Sağ taraf için,

$$\begin{aligned} F_{n-2}F_{n-1} - (-1)^n &= (F_n - F_{n-1})F_{n-1} - (-1)^n \\ &= F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 - (-1)^n \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1 (Cassini Teoremi)'de

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

yazılırsa,

$$\begin{aligned} (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n^2 &= (-1)^n \\ F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 &= (-1)^n \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} F_{n-2}F_{n-1} - (-1)^n &= F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 - (F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2) \\ &= F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 - F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 + F_n^2 \\ &= F_n^2 - 2F_{n-1}^2 \end{aligned}$$

bulunur.

O halde,

$$\begin{aligned} \partial(P^n) &= \begin{vmatrix} F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 - 4F_{n-1}F_n & 2F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ 3F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} - F_n^2 - F_{n+1}^2 & 2F_{n+1}^2 - 3F_{n+1}F_n - F_nF_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} F_{2n-3} & F_{2n-2} \\ -F_{n-2}^2 & (-1)^n - F_{n-2}F_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= F_{2n-3}[(-1)^n - F_{n-2}F_{n-1}] + F_{n-2}^2F_{2n-2} \\ &= (-1)^n(F_{n-1}^2 - F_{n-3}F_{n-2}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada gösterilmek istenen P^n matrisinin ∂ fonksiyonu altındaki görüntüsü $(-1)^n \cdot P^{n-2}$ matrisinin a_{22} merkez elemanı olduğudur [13].

Bölüm 4'te yer alan çok sayıda teoremden de görülebileceği üzere girdileri Fibonacci veya Lucas sayıları (ve hatta Fibonacci ve Lucas sayıları) olan 2×2 , 3×3 matrisler tanımlanarak ve matris cebri kullanılarak çok sayıda Fibonacci ve Lucas sayılarının denklemlerini tekrar ispat etmek ve hatta yenilerini üretmek mümkündür. Şimdi ise bu tarz matrislerin nasıl elde edileceğine bakacağız.

4.7 2×2 Tipinde Fibonacci Matrislerinin Elde Edilmesi

Bu bölümde 2×2 tipinde olan, önceki bölümlerde detaylı şekilde incelenen Fibonacci matrislerinin nasıl elde edildiği incelenecektir.

4.7.1 Teorem A bir kare matris olsun ve $A^2 = A + I$ şartını sağlasın. Her n tam sayısı için

$$A^n = F_n A + F_{n-1} I$$

olur.

İspat: Tümevarım kullanacağız.

$n = 0$ için,

$$A^0 = I = 0A + F_{-1} I$$

$n \geq 1$ değerlerinde,

$n = 1$ için,

$$A^1 = A = A + 0I = F_1 \cdot A + F_0 I$$

olduğundan iddia doğru olur.

$n = k$ için iddiamızın doğru olduğunu kabul edelim. Göstermemiz gereken ise iddiamızın

$n = k + 1$ için doğru olduğudur.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = (F_k A + F_{k-1} I) \cdot A = F_k A^2 + F_{k-1} A$$

Burada, $A^2 = A + I$ olduğundan,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= F_k (A + I) + F_{k-1} A = (F_k + F_{k-1}) A + F_k I \\ &= F_{k+1} A + F_k I \end{aligned} \tag{4.25}$$

olur.

Şimdi ise ispatın negatif tam sayılar için doğru olduğunu gösterelim.

$n \geq 1$ değerleri için,

$$A^{-n} = F_{-n} A + F_{-n-1} I$$

olduğunu gösterelim.

$$A^2 = A + I$$

olduğundan,

$$A(A - I) = I$$

olur. Böylece A matrisi tersinirdir.

$$A^{-1} = A - I$$

olur.

$A^{-1} = A - I$ olduğundan,

$$-A^{-1} = I - A$$

olur.

Şimdi Bir C matrisi tanımlayalım ve

$$C = I - A = -A^{-1}$$

olsun.

$$\begin{aligned} C^2 &= (I - A)^2 = I - 2A + A^2 = I - 2A + A + I = I + I - A \\ &= I + (I - A) \\ &= I + C \end{aligned}$$

Burada elde edilen $C^2 = I + C$ eşitliği göz önüne alınırsa tümevarım ilkesinden yukarıda ispatladığımız gibi $C^n = F_n C + F_{n-1} I$ olduğu kolaylıkla görülür.

Buradan her $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} (-A^{-1})^n &= F_n(-A^{-1}) + F_{n-1}I = F_n(I - A) + F_{n-1}I \\ &= -F_n A + (F_{n-1} + F_n)I = -F_n A + F_{n+1}I \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (3.15) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} A^{-n} &= (-1)^{n+1} F_n A + (-1)^n F_{n+1} I \\ &= F_{-n} A + F_{-n-1} I \end{aligned}$$

bulunur [7].

Şimdi ise Teorem 4.7.1'i kullanarak kuvvetleri Fibonacci sayıları ile ilgili matrisler elde etmeye çalışalım.

Özdeğerleri α ve β olan, keyfi 2×2 tipinde matrisler alalım. K bu şekilde bir matris olsun. Bu durumda K 'nın karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ şeklinde olacaktır. Cayley Hamilton Teoremine göre, K matrisi kendi karakteristik denklemini sağlayacaktır. Dolayısıyla $K^2 = K + I$ bulunur. Teorem 4.7.1 uygulanırsa, her n tam sayısı için,

$$K^n = F_n K + F_{n-1} I \tag{4.26}$$

olur.

Genelliği bozmadan;

$$K = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

olsun.

Bir matrisin özdeğerlerin toplamı o matrisin izi, özdeğerlerinin çarpımı da o matrisin determinanı olacağından ve (3.10), (3.11) eşitliklerini kullanırsak

$$x + t = 1 \quad (4.27)$$

$$xt - yz = -1 \quad (4.28)$$

olur. Eğer $y = z = 0$ ise

$$K = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada genelliği bozmadan y ve z den birisini (diyelim ki y yi) sıfırdan farklı alalım. Bu durumda (4.27) ve (4.28) eşitliklerinden,

$$K = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{1+x-x^2}{y} & 1-x \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada K 'nın özdeğerleri a ve β olduğundan,

$$K^2 = K + I$$

koşulu sağlanacaktır. (4.26) uygulanırsa,

$$K^n = \begin{bmatrix} xF_n + F_{n-1} & yF_n \\ \frac{1+x-x^2}{y}F_n & (1-x)F_n + F_{n-1} \end{bmatrix}$$

bulunur [7].

4.7.2 Sonuç

$$K = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{1+x-x^2}{y} & 1-x \end{bmatrix}$$

matrisinde $x = 1$ ve $y = 1$ olarak alınır daha önce incelediğimiz. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir [7].

4.7.3 Sonuç K Matrisinde $x = 1/2$ ve $y = 5/2$ olarak alınır, daha önce incelediğimiz.

$$S = \begin{bmatrix} 1/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir ve

$$S^n = \begin{bmatrix} L_n/2 & 5F_n/2 \\ F_n/2 & L_n/2 \end{bmatrix}$$

olur [7].

4.7.4 Sonuç Aşağıdaki N matrisini de biz üretelim.

$$x = 2 \text{ ve } y = 1 \text{ olmak üzere, } N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } N^n = \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_n \\ -F_n & -F_{n-2} \end{bmatrix}$$

matrisi ise 2×2 tipinde elde edilen başka bir matristir. Bu tarzda matrisler kullanılarak Fibonacci ve Lucas eşitlikleri türetilir. Örneğin tanımlanan N matrisi ve Teorem 2.3.7 kullanılarak,

$$|N|^n = (-1)^n$$

$|N^n| = F_{n+2}(-F_{n-2}) - (-F_n^2) = F_n^2 - F_{n-2}F_{n+2} = (-1)^n$
olduğundan,

$$F_n^2 - F_{n+2}F_{n-2} = (-1)^n \quad (4.29)$$

eşitliği kolaylıkla türetilebilir.

4.8 Sonsuz Boyutlu Fibonacci Matrisi

Bu bölümde ise bir problemten yola çıkılarak oluşturulan sonsuz boyutlu bir Fibonacci matrisi incelenecektir.

David M. Bloom'un 1996 yılında ortaya attığı aşağıdaki probleme bakalım. Problem şu şekildedir:

$$\sum_{\substack{i,j,k>0 \\ i+j+k=n}} F_i F_j F_k$$

toplamı neye eşittir?

Örneğin $n = 4$ alırsak

$$\sum_{i+j+k=4} F_i F_j F_k = F_1 F_1 F_2 + F_1 F_2 F_1 + F_2 F_1 F_1$$

bulunur.

Bu problemin çözümü, C. Libis tarafından çalışılmıştır. Çözüm sonsuz boyutlu bir Fibonacci matrisini içerir. Bu matris şu şekildedir.

$$H = \begin{bmatrix} H_{0n} \\ H_{1n} \\ \vdots \\ H_{mn} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Her bir $h_{i,j}$ elemanı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} h_{0,j} &= 0 & j \geq 0 \text{ ise} \\ h_{j,j} &= 1 & j \geq 1 \text{ ise} \\ h_{i,j} &= 0 & i > j \text{ ise} \\ h_{i,j} &= h_{i,j-2} + h_{i,j-1} + h_{i-1,j-1} & i \geq 1 \text{ ve } j \geq 2 \text{ ise [10].} \end{aligned}$$

Notasyon: $h_{i,j}$ ile H matrisinin i . satır j . sütun elemanı kastedilmiştir.

4.8.1 Teorem

$$h_{1,n} = F_n \quad (4.30)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned} h_{1,j} &= h_{1,j-2} + h_{1,j-1} + h_{0,j-1} \\ &= h_{1,j-2} + h_{1,j-1} \end{aligned}$$

$h_{1,0} = 0$ ve $h_{1,1} = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
h_{1,2} &= h_{1,0} + h_{1,1} = 0 + 1 = 1 = F_2 \\
h_{1,3} &= h_{1,1} + h_{1,2} = 1 + 1 = 2 = F_3 \\
h_{1,4} &= h_{1,2} + h_{1,3} = 1 + 2 = 3 = F_4 \\
&\vdots \\
h_{1,n} &= h_{1,n-2} + h_{1,n-1} = F_{n-2} + F_{n-1} = F_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tümevarımla da gösterecek olursak,

$n = 1$ için,

$$h_{1,1} = 1 = F_1$$

olup, doğru olduğu görülür.

$n = k$ için doğruluğunu kabul edelim.

$$h_{1,k} = F_k$$

olsun.

$n = k + 1$ için,

$$\begin{aligned}
h_{1,k+1} &= h_{1,k-1} + h_{1,k} + h_{0,k} \\
&= F_{k-1} + F_k = F_{k+1}
\end{aligned}$$

olur [10].

4.8.2 Örnek $h_{2,5}$ i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
h_{25} &= h_{23} + h_{24} + h_{14} \\
&= (h_{2,1} + h_{2,2} + h_{1,2}) + (h_{2,2} + h_{2,3} + h_{1,3}) + F_4 \\
&= (0 + 1 + F_2) + [1 + (h_{2,1} + h_{2,2} + h_{1,2}) + F_3] + F_4 \\
&= 2 + [1 + (0 + 1 + F_2) + 2] + 3 = 10
\end{aligned}$$

H matrisini derinlemesine inceleyecek olursak: Öncelikle bu matris bize girdileri Fibonacci sayılarından oluşan sadece 2×2 ya da 3×3 tipinde sonlu boyutlu matrisler değil, sonsuz boyutlu matrislerin de var olabileceğini göstermektedir.

H matrisinin, $\forall j \geq 0$ için $h_{0,j} = 0$ olduğundan H sonsuz boyutlu matrisinin ilk satır elemanlarının hepsi 0 dır. Bu satıra sıfırcı satır diyebiliriz. Ayrıca herhangi bir 0. satır ya da sütun elemanının 0 olacağı aşıkardır.

$h_{i,i} = 1$ olduğundan H matrisinin asal köşegen üzerindeki tüm elemanları 1 dir.

$i > j$ iken $h_{ij} = 0$ olduğundan, H matrisi üst üçgensel matristir. Böylelikle H matrisinin determinantı köşegen elemanlarının çarpımı ile bulunabilir.

$i \geq 1$ ve $j \geq 2$ için $h_{i,j} = h_{i,j-2} + h_{i,j-1} + h_{i-1,j-1}$ olduğundan (Tekrarlama bağıntısı) her bir $h_{i,j}$ elemanını aynı satırdaki $h_{i,j-2}$, $h_{i,j-1}$ elemanlarını ve bir önceki satırdaki $h_{i-1,j-1}$ elemanını toplayarak elde ederiz. (Burada $h_{i-1,j-1}$ elemanı $h_{i,j-1}$ 'in bir üstündeki elemandır.)

Böylece H sonsuz boyutlu matrisi şu şekilde elde edilir.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$H =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55 $\leftarrow F_n$
	2	0	0	1	2	5	10	20	38	71	130	235
	3	0	0	0	1	3	9	22	51	111	233	474
	4	0	0	0	0	1	4	14	40	105	255	593
	5	0	0	0	0	0	1	15	56	176	487	918
						$\vdots$						

4.8.3 Örnek

$$h_{3,6} = h_{3,4} + h_{3,5} + h_{2,4} \\ = 3 + 9 + 10 = 22$$

4.8.4 Örnek

$$h_{2,7} = h_{2,5} + h_{2,6} + h_{1,6} \\ = 10 + 20 + 8 = 38$$

olarak bulunabilir.

Asıl fark etmemiz gereken ise,

$$\begin{aligned} h_{2,7} &= 1.8 + 1.5 + 2.3 + 3.2 + 5.1 + 8.1 = 38 \\ &= F_1 F_6 + F_2 F_5 + F_3 F_4 + F_4 F_3 + F_5 F_2 + F_6 F_1 \\ &= F_1 h_{1,6} + F_2 h_{1,5} + F_3 h_{1,4} + F_4 h_{1,3} + F_5 h_{1,2} + F_6 h_{1,1} \\ &= \sum_{j=1}^7 F_j h_{1,7-j} \\ &= \sum_{j=1}^7 F_j F_{7-j} \\ &= \sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=7}} F_j F_k \end{aligned}$$

bulunur.

Bunu daha da genelleyecek olursak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

4.8.5 Teorem $n \geq 2$ için

$$h_{2,n} = \sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=n}} F_j F_k \quad (4.31)$$

İspat: Tümevarım kullanacağız.

$n = 2$ için,

$$h_{2,2} = 1 = F_1 F_1$$

Şimdi iddiayı $m \geq 2$ ve $m \in N$ için kabul edelim.

$$h_{2,m} = \sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=m}} F_j F_k$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=m+1}} F_j F_k &= \sum_{j=1}^m F_j F_{m+1-j} \\ &= \sum_{j=1}^m F_j (F_{m-j} + F_{m-j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m F_j F_{m-j} + \sum_{j=1}^m F_j F_{m-1-j} \\ &= \sum_{j=1}^m F_j F_{m-j} + \sum_{j=1}^{m-1} F_j F_{m-1-j} + F_m F_{-1} \text{ ve} \end{aligned}$$

$F_{-1} = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} &= h_{2,m} + h_{2,m-1} + h_{1,m} \\ &= h_{2,m+1} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$h_{1n} = F_n$ olduğundan,

$$h_{2,n} = \sum_{\substack{i,j \geq 1 \\ i+j=n}} F_i F_j = \sum_{i=1}^n F_i F_{n-i} = \sum_{i=1}^n F_i h_{1,n-i} \quad (4.32)$$

elde edilir [10].

$h_{3,n}$ elemanlarını bulmak için de, $h_{2,n-1}, h_{2,n-2}, \dots, h_{2,1}$ elemanları ile $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ elemanlarını sırasıyla çarpıp toplarız.

4.8.6 Teorem $n \geq 3$ için

$$h_{3,n} = \sum_{i=1}^n F_i h_{2,n-i} \quad (4.33)$$

İspat: Tümevarım kullanılır.

$n = 3$ için,

$$\sum_{i=1}^3 F_i h_{2,3-i} = F_1 h_{2,2} + F_2 h_{2,1} + F_3 h_{2,0} = 1.1 + 1.0 + 2.0 = 1 = h_{3,3}$$

$n = 4$ için ,

$$\sum_{i=1}^4 F_i h_{2,4-i} = F_1 h_{2,3} + F_2 h_{2,2} + F_3 h_{2,1} + F_4 h_{2,0} = 1.2 + 1.1 + 2.0 + 0 = 3 = h_{3,4}$$

n için iddianın doğruluğunu kabul edelim.

$$h_{3,n} = \sum_{i=1}^n F_i h_{2,n-i}$$

doğru olsun.

$n + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i h_{2,n+1-i} = F_1 h_{2,n} + \sum_{i=2}^{n+1} F_i h_{2,n+1-i}$$

$j + 1 = i$ dönüşümü yapılırsa,

$$= F_1 h_{2,n} + \sum_{j=1}^n F_{j+1} h_{2,n-j}$$

$F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} &= F_1 h_{2,n} + \sum_{j=1}^n (F_j + F_{j-1}) h_{2,n-j} \\ &= F_1 h_{2,n} + \sum_{j=1}^n F_j h_{2,n-j} + \sum_{j=1}^n F_{j-1} h_{2,n-j} \\ &= h_{2,n} + h_{3,n} + \sum_{j=1}^n F_{j-1} h_{2,n-j} \\ &= h_{2,n} + h_{3,n} + \sum_{j=0}^{n-1} F_j h_{2,n-j-1} \\ &= h_{2,n} + h_{3,n} + \sum_{j=1}^{n-1} F_j h_{2,n-j-1} \\ &= h_{2,n} + h_{3,n} + h_{3,n-1} = h_{3,n+1} \end{aligned}$$

elde edilir [10].

4.8.7 Örnek

$$\begin{aligned} h_{3,7} &= \sum_{i=1}^7 F_i h_{2,7-i} \\ &= F_1 h_{2,6} + F_2 h_{2,5} + F_3 h_{2,4} + F_4 h_{2,3} + F_5 h_{2,2} + F_6 h_{2,1} \\ &= 1.20 + 1.10 + 2.5 + 3.2 + 5.1 + 8.0 = 51. \end{aligned}$$

Şimdi bölümün başında bahsedilen problemin yeniden dönelim:

4.8.8 Teorem

$$h_{3,n} = \sum_{\substack{i,j,k \geq 1 \\ i+j+k=n}} F_i F_j F_k \quad (4.34)$$

İspat: Teorem 4.8.6 ve Teorem 4.8.5'i kullanalım.

$$\begin{aligned}
h_{3,n} &= \sum_{i=1}^n F_i h_{2,n-i} \\
&= \sum_{i=1}^n F_i \left(\sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=n-i}} F_j F_k \right) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 1 \\ i+j+k=n}} F_i F_j F_k
\end{aligned}$$

bulunur [10].

4.8.9 Örnek

$$\begin{aligned}
h_{3,5} &= \sum_{\substack{i,j,k \geq 1 \\ i+j+k=5}} F_i F_j F_k \\
&= F_1 \sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=4}} F_j F_k + F_2 \sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=3}} F_j F_k + F_3 \sum_{\substack{j,k \geq 1 \\ j+k=2}} F_j F_k \\
&= F_1(F_1 F_3 + F_2 F_2 + F_3 F_1) + F_2(F_1 F_2 + F_2 F_1) + F_3(F_1 F_1) \\
&= 1 \cdot (1.2 + 1.1 + 2.1) + 1 \cdot (1.1 + 1.1) + 2 \cdot (1.1) = 9 \\
h_{3,5} &= \sum_{i=1}^5 F_i h_{2,5-i} = F_1 h_{2,4} + F_2 h_{2,3} + F_3 h_{2,2} + F_4 h_{2,1} + F_5 h_{2,0} \\
&= 1.5 + 1.2 + 2.1 + 3.0 + 5.0 = 9
\end{aligned}$$

olarak da bulunabilir.

Herhangi bir m . satır n . sütundaki $h_{m,n}$ elemanını aşağıdaki şekilde genelleleyebiliriz.

4.8.10 Teorem $m \geq 2$ olmak üzere,

$$h_{m,n} = \sum_{i=1}^n F_i h_{m-1,n-i} \quad (4.35)$$

İspat: Öncelikle tüm m değerleri için doğru olduğunu kabul edelim ve n değerleri için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için tümevarım kullanacağız.

$n = 1$ için,

$$\begin{aligned}
h_{m,1} &= \sum_{i=1}^1 F_i h_{m-1,n-i} = F_1 h_{m-1,0} \\
&= 0 = 0
\end{aligned}$$

n değerleri için doğru olduğunu kabul edelim.

$$h_{m,n} = \sum_{i=1}^n F_i h_{m-1,n-i}$$

doğru olsun.

$n + 1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i h_{m-1,n+1-i}$$

$$= F_1 h_{m-1,n} + \sum_{i=2}^{n+1} F_i h_{m-1,n+1-i}$$

$j + 1 = i$ dönüşümü yapalım.

$$= F_1 h_{m-1,n} + \sum_{j=1}^n F_{j+1} h_{m-1,n-j}$$

$F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} &= F_1 h_{m-1,n} + \sum_{j=1}^n (F_j + F_{j-1}) h_{m-1,n-j} \\ &= F_1 h_{m-1,n} + \sum_{j=1}^n F_j h_{m-1,n-j} + \sum_{j=1}^n F_{j-1} h_{m-1,n-j} \\ &= F_1 h_{m-1,n} + \sum_{j=1}^n F_j h_{m-1,n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} F_j h_{m-1,n-j-1} \\ &= F_1 h_{m-1,n} + \sum_{j=1}^n F_j h_{m-1,n-j} + F_0 h_{m-1,n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} F_j h_{m-1,n-j-1} \end{aligned}$$

$F_0 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} &= F_1 h_{m-1,n} + \sum_{j=1}^n F_j h_{m-1,n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} F_j h_{m-1,n-j-1} \\ &= h_{m-1,n} + h_{m,n} + h_{m,n-1} = h_{m,n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de $n \geq 0$ değerleri için doğruluğunu kabul edip eşitliğin $m \geq 2$ için doğru olduğunu gösterelim.

$m = 2$ için $h_{2,n} = \sum_{i=1}^n F_i h_{1,n-i}$ (4.32) elde edilir.

$m = t$ için doğru olsun.

$$h_{tn} = \sum_{i=1}^n F_i h_{t-1,n-i}$$

$m = t + 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i h_{t,n-i} &= \sum_{i=1}^n F_i (h_{t,n-i-2} + h_{t,n-1-i} + h_{t-1,n-1-i}) \\ &= \sum_{i=1}^n F_i h_{t,n-i-2} + \sum_{i=1}^n F_i h_{t,n-1-i} + \sum_{i=1}^n F_i h_{t-1,n-1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} F_i h_{t,n-i-2} + \sum_{i=1}^{n-1} F_i h_{t,n-1-i} + \sum_{i=1}^{n-1} F_i h_{t-1,n-1-i} \\ &= h_{t+1,n-2} + h_{t+1,n-1} + h_{t,n-1} \\ &= h_{t+1,n} \end{aligned}$$

olup, doğru olduğu görülür [10].

4.8.11 Örnek

$$\begin{aligned} h_{4,6} &= \sum_{i=1}^6 F_i h_{3,6-i} = F_1 h_{3,5} + F_2 h_{3,4} + F_3 h_{3,3} + F_4 h_{3,2} + F_5 h_{3,1} + F_6 h_{3,0} \\ &= 1.9 + 1.3 + 2.1 + 3.0 + 5.0 + 0.0 \\ &= 14 \end{aligned}$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayıları ile bu sayılardan oluşan matris yapıları ayrıntılı olarak incelenmiştir. İlk olarak Fibonacci ve Lucas sayılarına ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiş, bu sayı dizilerinin altın oran ile ilişkilerine değinilmiştir. Ardından Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkili matrisler tanımlanmış ve bu matrislerin çeşitli özellikleri araştırılmıştır.

Çalışmanın asıl kısmını oluşturan matris incelemelerinde özellikle Q, M, S, R ve P matrisleri üzerinde durulmuştur. Bu matrislerin kuvvetleri hesaplanmış, Fibonacci ve Lucas sayıları ile aralarındaki ilişkiler ortaya konulmuş ve bazı klasik Fibonacci özdeşlikleri matris yöntemleri kullanılarak yeniden elde edilmiştir. Ayrıca bu tarz matrislerin hangi özellikleri sağladığı ve ne şekilde elde edilebileceği incelenmiştir. Buna ek olarak sonsuz boyutlu Fibonacci matrisleri ve bu matrislerin girdileri incelenmiş, bu matrisin elemanlarının Fibonacci sayıları ile ilişkilerine değinilmiştir. Fibonacci ve Lucas sayılarının yalnızca sayı dizisi olarak değil, aynı zamanda lineer dönüşümler ve matris yapılarının bir parçası olarak değerlendirilebileceği de görülmüştür.

Sonuç olarak Fibonacci sayıları ile ilişkili matrislerin, lineer cebir ve sayılar teorisi arasında önemli bir köprü oluşturduğu görülmüştür. İleride, bu çalışmada ele alınan matris yapıları Pell, Jacobsthal, Tribonacci ve benzeri sayı dizilerine genelleştirilebilir. Bu yönleriyle Fibonacci matrisleri, hem teorik matematik hem de uygulamalı matematik açısından araştırılmaya açık bir çalışma alanı oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Brannan, D., A.** (2006). A First Course in Mathematical Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 468.
- [2] **Harville, D., A.** (1997). Matrix Algebra From a Statistician's Perspective. Springer, New York, USA, 634.
- [3] **Sabuncuoğlu, A.** (2017). Lineer Cebir, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, Türkiye, 394.
- [4] **Torunbalcı Aydın, F.** (2021). Lineer Cebir, Papatya Bilim Üniversite Yayıncılığı, İstanbul, Türkiye, 204.
- [5] **Sheldon, A.** (2015). Linear Algebra Done Right, Springer, New York, USA, 340.
- [6] **Cangül, İ., N.** (2015). Sayılar Teorisi. Dora Yayıncılık, Bursa, Türkiye, 396.
- [7] **Karakaya, S.** (2018). Fibonacci ve Lucas Sayıları ile İlişkili Matrislerin Lineer Kombinasyonları Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 72.
- [8] **Yalçın, A.** (2020). Fibonacci ve Lucas Sayı Dizilerinin Genelleme, Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 64.
- [9] **Hoggatt, V., E.** (1969). Fibonacci and Lucas Numbers. University of Santa Clara, Santa Clara, USA, 92.
- [10] **Koshy, T.** (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley Interscience, New York, USA, 672.
- [11] **Moore, S.** (1983). 67.9 Fibonacci matrices, The Mathematical Gazette, 67, (439), 56-57.
- [12] **Demirtürk, B.** (2010). Fibonacci and lucas sums by matrix methods. International Mathematical Forum, 5, (1-4), 99-107.
- [13] **Bicknell, M., Hoggatt, V. E., Jr.** (1963). Fibonacci matrices and lambda functions. The Fibonacci Quarterly, 1(2), 47-52.
- [14] **Salamone, M.** (2023). Fibonacci Numbers, Undergraduate Thesis, Sacred Heart University, 45.
- [15] **Öndül, A.** (2020). Genelleştirilmiş Fibonacci Q Matrislerinin Lineer Bileşimleri, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 58.
- [16] **Johnson, R., C.** (2008). Fibonacci numbers and matrices, *Durham University, Technical Report*, 31. (in press).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Halil Ünver

Doğum tarihi ve yeri : 31.10.1993 / Çanakkale

E-posta : hllnvr@outlook.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Cebir, Sayılar Teorisi	2026
Lisans	Eskişehir Teknik Üniversitesi/ Matematik	2019
Lise	Salih Korkut Budaras Anadolu Öğretmen Lisesi	2011