

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



R-BONACCİ POLİNOMLARI VE TÜREVLERİ

DOKTORA TEZİ

ÖZNUR ÖZTUNÇ

BALIKESİR, 2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Öznur ÖZTUNÇ tarafından hazırlanan “**R-BONACCI POLİNOMLARI VE TÜREVLERİ**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 02.06.2014 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çökluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

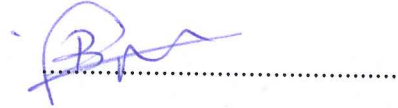
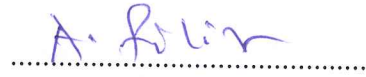
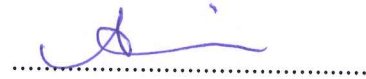
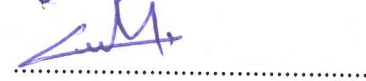
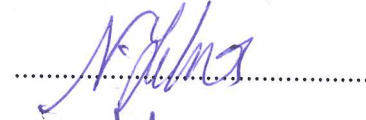
Danışman
Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR

Üye
Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Üye
Prof. Dr. Ali GÜVEN

Üye
Yrd. Doç. Dr. Ali FİLİZ

Üye
Yrd. Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR

.....

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Rektörlüğü Bilimsel Projeler Birimi tarafından 2013/02 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

R-BONACCİ POLİNOMLARI VE TÜREVLERİ
DOKTORA TEZİ
ÖZNUR ÖZTUNÇ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)
BALIKESİR, HAZİRAN - 2014

Bu tez çalışmasında R -Bonacci polinomları ve türevlerinin sıfır yerlerini açık ifadelerle belirlemek amacıyla uygun yöntemler araştırılmıştır.

İlk olarak R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerini belirlemek için simetrik polinomlar elde edilmiştir. Simetrik polinomlar yardımıyla özel durumlarda referans noktaları bulunarak sıfır yerleri hesaplanmıştır. Diğer yandan simetrik polinomların diğer durumlarda sıfır yerlerinin karakterizasyonuna elverişli olmamasından dolayı R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerini içeren ideal bir halka bölge elde edilmesi amaçlanmıştır. Öncelikle iyi bilinen Lucas eşitliği kullanılarak bu polinomların sıfır yerlerini içeren yeni bir halka bölge elde edilmiştir. Ayrıca sıfır yerlerinin mutlak değerleri için Gershgorin teoremi kullanılarak üst sınır bulunmuştur. R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerini içeren yeni halka bölgelerin bilinen tekniklerle elde edilen bölgelerle kıyaslaması yapılmıştır.

Daha sonra R -Bonacci polinomlarının türev polinomlarının bazı sınıflarının sıfır yerleri simetrik polinomlar yardımıyla hesaplanmıştır. Sıfır yerleri elde edilemeyen türev polinomlarının sıfırları için yeni halka bölgeler kullanılmıştır. Ayrıca tüm Fibonacci polinomlarının birinci mertebeden türevinin sıfır yerlerinin sağladığı bir eşitlik elde edilmiştir. Son olarak Lucas polinomlarının sıfır yerlerini Fibonacci polinomlarının sıfır yerlerine resmeden fonksiyonlar bulunmuştur. Bu fonksiyonların sıfırları nasıl resmettikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: R – Bonacci Polinomları, Simetrik Polinomlar, Gershgorin Çemberi

ABSTRACT

R-BONACCI POLYNOMIALS AND THEIR DERIVATIVES PHD THESIS

ÖZNR ÖZTUNÇ

BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. NİHAL YILMAZ ÖZGÜR)

BALIKESIR, JUNE - 2014

In this thesis, appropriate methods are investigated in order to determine explicitly the zeros of R -Bonacci polynomials and their derivatives.

At first, symmetric polynomials are obtained to determine the zeros of R -Bonacci polynomials. These zeros are calculated with the help of symmetric polynomials, finding reference points in some special cases. On the other hand, it is aimed to obtain an optimal annulus area which includes the zeros of R -Bonacci polynomials since symmetric polynomials are inconvenient for characterization of the zeros of these polynomials in other cases. Initially, a new annulus area containing the zeros of these polynomials is obtained using well known Lucas identity. Also, an upper bound for absolute value of the zeros is found making use of Gershgorin theorem. These new annulus areas that include the zeros of R -Bonacci polynomials are compared with the areas obtained by known techniques.

The zeros of some classes of the derivatives of R -Bonacci polynomials are calculated by means of symmetric polynomials. The new annulus areas are used for the zeros of derivatives of these polynomials whose zeros can not be obtained. Moreover, an identity satisfied by the zeros of first order derivative of Fibonacci polynomials is obtained. Finally, the functions mapping zeros of Lucas polynomials to zeros of Fibonacci polynomials are found. Also, it is examined how these functions map zeros.

KEYWORDS: R – Bonacci Polynomials, Symmetric Polynomials, Gershgorin Circle

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	6
2.1 Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Sıfır Yerleri	6
2.2 Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Sıfır Yerlerinin Simetrik Polinomları	10
2.3 Tribonacci Polinomları ve Simetrik Polinomları	13
2.4 Polinomların Sıfır Yerleri için Üst Sınır Bulma	17
2.4.1 Polinomların Sıfır Yerleri için Cauchy Sınırı	17
2.4.2 Gershgorin Teoremi Kullanılarak Polinomların Sıfır Yerleri için Üst Sınır	17
3. R-BONACCİ POLİNOMLARININ SIFIR YERLERİ	20
3.1 R – Bonacci Polinomlarının Simetrik Polinomlar Yardımıyla Elde Edilen Sıfır Yerleri	21
3.2 R – Bonacci Polinomlarının Sıfır Yerlerini İçeren Halka Bölgeler	25
3.3 R – Bonacci Polinomlarının Sıfır Yerleri için Gershgorin Sınırı	32
4. R-BONACCİ POLİNOMLARIN TÜREVLERİNİN SIFIR YERLERİ	39
4.1 Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Türevleri	39
4.1.1 Fibonacci Polinomlarının Birinci Mertebeden Türevlerinin Sıfır Yerleri	39
4.1.2 Lucas Polinomlarının Sıfır Yerlerini Fibonacci Polinomlarının Sıfır Yerlerine Resmeden Fonksiyonlar	42
4.2. R – Bonacci Polinomlarının Türevlerinin Simetrik Polinomlar Yardımıyla Elde Edilen Sıfırları	45
4.2.1 Tribonacci Polinomlarının Türevlerinin Sıfır Yerleri	46
4.2.2 R – Bonacci Polinomlarının Türevlerinin Sıfır Yerleri	54
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	63
6. EKLER	64
7. KAYNAKLAR	68

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>	
Şekil 2.1:	$T_{60}(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri	15
Şekil 3.1:	$Q_5(x)$ Polinomunun Sıfır Yerlerinin Kompleks Düzlemde Gösterimi	23
Şekil 3.2:	$B_6(x)$ Polinomunun Sıfır Yerlerinin Kompleks Düzlemde Gösterimi	24
Şekil 3.3:	$A(z)$ Polinomunun Sıfır Yerlerini Kapsayan \mathfrak{R}_4 Halka Bölgesi	30
Şekil 3.4:	$T_3(x)$ Polinomunun Sıfır Yerlerini Kapsayan \mathfrak{R}_4 ve C_1 Çemberleri	37
Şekil 4.1:	$n = 4$ için $\alpha_4(x)$ Fonksiyonu	42
Şekil 4.2:	$n = 3$ için $\beta_3(x)$ Fonksiyonu	43
Şekil 4.3:	$T_{20}(x)$ 'in Sıfırları	45
Şekil 4.4:	$T_{20}^{iv}(x)$ 'in Sıfırları	45
Şekil 4.5:	$T_{16}^{24}(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri	49
Şekil 4.6:	$T_{14}^{20}(x)$ 'in Sıfırları	53
Şekil 4.7:	$T_6^{iv}(x)$ 'in Sıfırları	53
Şekil 4.8:	$Q_8^{13}(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri	58
Şekil 4.9:	$B_8^{(18)}(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri	59

SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge:</u>	<u>Tanımı:</u>
$F_n(x)$	n . Fibonacci Polinomu
$L_n(x)$	n . Lucas Polinomu
$T_n(x)$	n . Tribonacci Polinomu
$Q_n(x)$	n . Quadranacci Polinomu
$R_n(x)$	n . R – Bonacci Polinomu
$Sinhz$	Sinüs Hiperbolik Fonksiyon
$Coshz$	Kosinüs Hiperbolik Fonksiyon
$Tanhz$	Tanjant Hiperbolik Fonksiyon
$F_n^{(k)}(x)$	Fibonacci Polinomlarının k . Mertebeden Türevi
$L_n^{(k)}(x)$	Lucas Polinomlarının k . Mertebeden Türevi
σ_j	Simetrik Polinom
$A = (a_{ij})$	$n \times n$ tipindeki kare matris
$f(x)$	A matrisinin karakteristik polinomu
λ_i	A matrisinin özdeğerleri
$\ A\ $	A matrisinin normu
C_i	Gershgorin Çemberi
$\binom{n}{j}_r$	r -nomial katsayı
$C(n, k)$	n 'nin k 'lı kombinasyonu
F_k	k . Fibonacci sayısı
$A(z)$	Sabit olmayan kompleks polinom
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
\mathfrak{R}_1	Fibonacci sayıları kullanılarak elde edilen halka bölge

P_n	n . Pell sayısı
\mathfrak{R}_2	Cesaro eşitliği kullanılarak elde edilen halka bölge
$F_{t,k}$	k . t – Fibonacci sayısı
\mathfrak{R}_3	t – Fibonacci sayıları kullanılarak elde edilen halka bölge
\mathfrak{R}_4	Lucas eşitliği kullanılarak elde edilen yeni halka bölge
r_n	$n \times n$ tipindeki kare matris
\wp_n	$n \times n$ tipindeki kare matris
$I_{(r-1) \times (n-1)}$	$(r-1) \times (n-1)$ tipindeki birim matris
$\alpha_n(x)$	$L_{2n}(x)$ 'in sıfırlarını $F_{2n}(x)$ 'in sıfırlarına resmeden fonksiyon
$ArcSin$	Ters Sinüs Fonksiyonu
$\beta_n(x)$	$L_{2n+1}(x)$ 'in sıfırlarını $F_{2n+1}(x)$ 'in sıfırlarına resmeden fonksiyon
$T_n^{(t)}(x)$	Tribonacci Polinomlarının t . Mertebeden Türevi
$\sigma(k, n)$	Özel tanımlanan bir fonksiyon
γ_2, ω_2	Özel katsayılar
ϱ_2, φ_2	Özel katsayılar
ξ_2, δ_2	Özel katsayılar
$R_n^{(t)}(x)$	t . mertebeden R – Bonacci Polinomu

ÖNSÖZ

C. Morley der ki: “Bir matematik problemine dalıp gitmekten daha büyük mutluluk yoktur”. Gerçekten İngiliz Matematikçi G.H. Hardy de insanların tıpkı hoş bir melodiyi sevdikleri gibi matematiğe belli bir değer verip ve ondan hoşlandıklarını söylemiştir. Matematikçiler de matematik yapmanın güzelliğinin bilincinde yeni teoriler ortaya atıp, bu teorilerin fizik, kimya, tıp, mühendislik, tıp vb. alanlarda can bulmasını sağlamışlardır.

Öncelikle probleme çok önem veren matematikçiler problemi çözmek için gerekli matematik yöntemi uygulayarak yoksa kendileri yeni bir yöntem yaratırlar. Problem çözüldüğünde de matematik dergilerinde yayın yapmaktadırlar. İşte bu bilimsel yöntemi öğrenme süreci lisansüstü eğitimden geçmektedir. Tabii ki, doktora eğitimi akademik yetkinliğin ve entelektüel birikimin son aşamalarından birisidir. İşte tam bu aşamada tanışmak kısmet oldu sevgili danışman hocam Prof. Dr. Nihal Yılmaz ÖZGÜR ile. Öğrencilik yılımın ilk gününden itibaren bana karşı gösterdiği sabır, bana kazandırdığı matematiksel çalışma disiplini ve problem üretme ve çözüme yaklaşımları, çapraz disiplinler yaklaşımı ile problemime yeni bir ivmeyi nasıl kazandırmam gerektiğini bana sindire sindire büyük bir heyecan ve sevgiyle öğreten sevgili hocama ne kadar minnettar olduğumu söylesem azdır.

Eğitimim boyunca bana her zaman vakit ayıran engin deneyim ve tecrübelerinden faydalandığım tez izleme komitesindeki hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora başvuru aşamasında bir kilit görevi üstlenip bana yol gösteren, bu süreçte fikirleriyle beslediğim Araştırmacı Ünal SIVACIOĞLU’na, bu yoğun çalışma sürecinde bana destek olan sevgili iş arkadaşım Uzman Özlem TÜLEK’e ve tüm Bilgi İşlem Dairesi mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca destekleriyle gücüme güç katan, her zaman iki yanımda varlıklarıyla beni daha da yüreklendiren canım annem Birgül ÖZTUNÇ ve canım babam Mesut ÖZTUNÇ iyi ki varsınız.

Balıkesir, 2014

1. GİRİŞ:

x 'in en büyük kuvveti n olduğunda n . dereceden olarak isimlendirilen polinomlar en genel halde aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$p(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerlerine $p(x)$ polinomun sıfır yerleri denir. Reel veya kompleks eşlenik şeklinde olabilen polinomların sıfır yerleri yüzyıllar boyunca belki de en popüler çalışma konuları arasında yerini almaktadır. Çünkü polinom çalışmalarının tarihsel gelişimi incelendiğinde, M.Ö. 2000 yılında Mezopotamya'da yaşayan eski Bablylon kabilesinin pozitif köklerin nasıl hesaplanabildiğini bilmeleri hatta bazı özel durumlarda ikinci dereceden denklemleri de çözebilmeleri buna en iyi örnektir. Eski Yunanlılar ise M.Ö. 5. yüzyılda bu çözümlere geometrik yorumlamalar da eklemiştir.

İkinci dereceden denklemleri üç kategoriye ayırıp her biri için ayrı ayrı çözümleri sadece pozitif kökler için (negatif ve irrasyonel kökler hariç) Diofante M.S. 3. yüzyılda vermiştir. M.S. 600 yıllarında ise Hintlilerin ilk defa sıfırı keşfetmeleri ile birlikte Arap uygarlıkları birinci ve ikinci denklemleri çözebilir hale gelmiş olmalarına rağmen üçüncü dereceden denklemin sadece özel durumlarını ele almışlardır. 780-850 yıllarında yaşadığı tahmin edilen Muhammed İbn Musa el Harizmi 830 yılında yazdığı "El Cebr vel Mukabele" adlı kitabında ilk defa "cebir" ve "kök" kelimesini kullanarak matematik dünyasına bu yeni terimleri tanıtmıştır.

1500-1515 yılları arasında Avrupa'nın en popüler üniversitelerinden biri olan Bologna Üniversitesinden profesör Scipione del Ferro (1465-1526) $x^3 + cx = d$, $c, d > 0$ kübik denkleminin çözümü için genel cebirsel bir çözüm metodu elde etmiştir. Fakat modern üniversitelerde profesörler yeni çalışmalarını hemen yayınlamalarına rağmen XVI. yüzyılda İtalya'da akademik ortamın çok farklı olması Ferro'nun bu çalışmasını saklamasına neden olmakla birlikte çalışmalarına öldükten sonra ulaşılabilmiştir.

Rönesans'ın gelmesiyle birlikte İtalyan matematikçi Gerolamo Cardona (1501-1576) "*The Great of Art*" adlı kitabında üçüncü dereceden denklemlerin çözümlerini derecelerini düşürme yöntemiyle tamamlamıştır. Onun öğrencisi olan Lodovico Ferrari'nin (1522-1565) aynı kitapta dördüncü dereceden denklemlerin çözümü ile ilgili çalışmaları da bulunmaktadır. Negatif sayılar hala bilinmemesine rağmen bu sayılarla yapılan işlemler doğrudur.

1799 yılında Carl Friedrich Gauss cebirin temel teoremi yani sabit olmayan her polinomun en az bir kökünün varolacağını ispatlamakla birlikte n . dereceden bir polinomun n tane kökünün varlığı ispatlamıştır. Bundan sonra çalışmalar beşinci ve daha yüksek dereceden polinomların köklerini elde etmek amacıyla devam eden çalışmalar Will Niels Henrik Abel (1802-1829)'in beşinci (ve daha yüksek) dereceden denklemlerin köklerini verecek bir formülün bulunamayacağını ispatlanmasıyla son bulmuştur. 1832 yılında Evariste Galois ölmeden önceki gün arkadaşına yazdığı 31 sayfalık mektupta derecesi dörtten büyük olan her polinom için çalışacak bir 'kök bulma yöntemi' bulmanın neden imkânsız olduğunu anlatmıştır.

En ünlüsü 17. yüzyılda Newton'un iterasyon metodu olan nümerik çalışmalar son zamanlarda polinomların yaklaşık köklerini hesaplamak amacıyla daha ağırlık kazanmıştır. Pafnuti Chebyshev (1821-1894) "*The calculation of roots of equations*" adlı çalışmasında $y = f(x)$ fonksiyonun tersinin seriye açılımını kullanarak polinomların sıfır yerlerini bulmuştur. XVIII. yüzyılda Bernoulli'nin ardından XIX. yüzyılın başlarında Graeffe'nin metodu en önemli nümerik çalışma yöntemleri arasına girmektedir. Robert Hjalmar Mellin (1854-1933) Mellin integralleri vasıtasıyla keyfi polinom eşitliklerini çözmüştür. Andre Bloch (1893-1948) ve George Polya (1887-1985) rastgele katsayılı keyfi dereceden polinomların sıfır yerlerini araştırmışlardır. Richard Brauer (1901-1977) cisim teorisini kullanarak beşinci dereceden denklemlerin Klein çözümlerini analiz etmiştir [1,2].

Geniş bir polinom sınıfı olan Fibonacci polinomları ilk kez Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan (1814-1894) ve Alman matematikçi E. Jacobsthal tarafından, Lucas polinomları da 1970 yılında M. Bicknell tarafından tanımlanmıştır. Bu polinom sınıfının çıkış noktası modern uygulamalı bilimler dünyasında halen çok ilgi duyulan ve çok sayıda uygulama alanı bulan Altın Oran ve Fibonacci sayılarına dayanmaktadır. Fibonacci dizisi, F_n , $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç

şartlarıyla birlikte $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlılama bağıntısıyla tanımlanır. Ayrıca bu dizinin ardışık iki terimi arasındaki oran altın orana yakınsamaktadır. Bu sayıların izlerini mühendislik, doğa ve sanattan başlayıp [3-13] parçaçık ve teorik fizik [14-17] gibi birçok modern araştırma alanlarında görmek mümkündür. Bu sayıları, sayılar teorisi, diferansiyel denklemler, olasılık, istatistik, nümerik analiz ve lineer cebir vb. gibi matematiğin hemen hemen her alanında görmek mümkündür [18].

1984 yılından beri Amerika’da organize edilen, bu sayıların kendisi ve uygulamaları ile ilgilenen bilim insanlarını bir araya getiren “*Fibonacci Numbers and Theirs Applications*” konferansının kurucularından V. E. Hoggat Jr ve M. Bicknell 1973 yılında Fibonacci polinomlarının Binet formülünün, sinüs ve kosinüs hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifadesini yazıp sıfır yerlerini sade ve kullanışlı bir formülüzasyon halinde elde etmişlerdir [19]. Sayılar teorisinde henüz çözülememiş problemlerden biri olan *Fibonacci dizisinde sonsuz sayıda asal var mıdır?* sorusuna cevap arayan W. A. Webb ve E. A. Parberry Fibonacci polinomlarının bölünebilme özelliklerini kullanarak bu sorunun cevabını net bir şekilde ortaya koymuşlardır [20]. Ayrıca, k -elemanlı pozitif (a_1, a_2, \dots, a_k) tamsayı koordinatları $F_n(x)$ Fibonacci polinomlarını göstermek üzere $\sum_{a_1+a_2+\dots+a_k=n} F_{a_1+1}(x) \cdot F_{a_2+1}(x) \dots F_{a_k+1}(x)$ polinomlarını içeren bu toplamı elde etmede farklı çalışma konuları arasında yerini almaktadır [21]. x^n ’nin Fibonacci polinomlarının birleşimi olarak yazılabileceği ispatlandıktan sonra bu polinomların birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin katsayıları arasındaki bağıntılar incelenmiş ardından integral temsili elde edilmiştir [22]. $h(x)$ –Fibonacci polinomları da aynı tekrarlılama bağıntısında $h(x)$ reel katsayılı bir polinomu kullanarak üretilmiş bu polinomların üreteç fonksiyonları, cebirsel ifadeleri, karakteristik denklemi, binet formülleri elde edilmiştir [23]. Bazı Fibonacci-tipindeki polinomların reel sıfır yerlerinin yakınsadıkları nokta araştırılmış, bazı yorumlamalar yapılmıştır [24]. Ayrıca bu polinomların Fibonacci polinomları gibi sıfır yerleri açık ifadelerle bilinmediği için bu Fibonacci-tipindeki polinomların sıfır yerlerinin mutlak değerlerinin üst sınırını elde etme ve bu polinomların reel köke sahip olmaları için gerek ve yeter şartlara değinilmiş ayrıca maximum reel kökün asimptotik davranışı birçok çalışmaların ana konusu olmuştur [25-29]. Hem Fibonacci sayılarının hem de polinomların birçok uygulamasıyla birlikte temel özellikleriyle bulunduran temel bir

kaynak da 2001 yılında basılmıştır [30]. Fibonacci polinomların türevleri ile ilgili farklı çalışmalarda literatürde yerini almaktadır [31].

R -Bonacci polinomları da 1973 yılında V.E. Hoggat Jr ve M Bicknell tarafından ilk defa matematik dünyasına kazandırılmış birçok çalışmanın da başını çekmiştir [32]. Bu konunun ilgi çekmesinin nedeni bu polinomların özel hali Fibonacci polinomlarının olması ve R -Bonacci polinomları için yapılan bir çalışmanın daha büyük bir polinom sınıfını kapsamasıdır. $r = 2$ iken Fibonacci polinomları, $r = 3$ iken Tribonacci polinomları, $r = 4$ iken de Quadronacci polinomları elde edilmektedir. Fibonacci polinomlarının sıfır yerlerinin formülizasyonu Hoggat tarafından elde edilmiş olmasına rağmen, n artarken formülizasyon zorlaştığından nümerik yaklaşımlar daha ağırlıklı olarak kullanılmıştır. R -Bonacci polinomlarının sıfır yerleri $\frac{2\pi}{r}$ açıyla farkedene r -yıldızlı üzerinde bulunur [33]. Bu çalışma ise bu polinomların sıfır yerlerinin güzel geometrik eğriler belirttiğini göstermektedir. Dahası $r = 3$ iken Tribonacci polinomlarının Zero Attractor kümesi elde edilmiş ve güzel geometrik yorumlamalara yer verilmiştir [34]. Bu çalışmada kullanılan teknik öncesinde Euler polinomları için yapılmıştır [35].

Son dönemdeki çalışmalardan da görülebileceği gibi polinomların sıfır yerlerini formülize etme polinomları karakterize etmek açısından oldukça önemlidir ki eğer bu mümkün değilse polinomların sıfırları için üst sınır elde etme konveks bir bölgede kaç tane negatif, pozitif, kompleks kök barındırdığı problemi yıllardır güncelliğini korumuştur. Hatta bu analizler farklı metotları içinde barındıran nümerik çalışmalarla da ağırlık kazanmıştır [36-38].

R -Bonacci polinomları ve türevlerinin sıfır yerlerini incelenmesi amaçlanan bu tezde bu polinomlar iki gruba ayrılarak analiz yapılmıştır. İlk olarak R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerinden oluşan simetrik polinomlar elde edilmiştir. Bu simetrik polinomlar R -Bonacci polinomlarının sıfır yerleri sadece $n = 1$ için elde edilen referans noktası yardımıyla hesaplanmıştır. Simetrik polinom tekniğinin diğer n değerleri için yetersiz kalmasından dolayı R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerini içeren ideal bir bölge bulunması amaçlanmıştır. Bunun için R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerini içeren üst sınırlar Gershgorin ve Cauchy teknikleri

kullanılarak elde edilmiştir. İki teknikle elde edilen yeni sınırlar, literatürde var olan sınırlarla kıyaslanmıştır. R -Bonacci polinomları sıfır yerlerini içeren sınır için hangi yöntemin hangi durumda tutarlı olduğu araştırılmıştır.

İkinci kısımda R -Bonacci polinomlarının türevlerinin sıfır yerlerinin formülüzasyonunun elde edilmesi amaçlanmıştır. Kullanılan teknik ise bu polinomların türevlerinin sıfır yerlerinden oluşan simetrik polinomlardır. Bunun için öncelikle $r=2$ iken elde edilen Fibonacci polinomlarının birinci mertebeden sıfır yerlerini veren eşitlik elde edilmiş ardından Lucas polinomlarının sıfır yerlerini Fibonacci polinomların sıfır yerlerine resmeden fonksiyonlar bulunmuştur. Tribonacci polinomları için üç gruba, R -Bonacci polinomları için ise r tane gruba ayrılarak elde edilecek olan simetrik polinomlar tüm R -Bonacci polinomları için tek teoremlerle ifade edilmiştir. Sonrasında belli R -Bonacci türev polinomlarının sıfır yerleri açık ifadelerle belirlenmiştir. Sıfır yerleri belirlenemeyen türev polinomları için önceki bölümde elde edilen konveks sınırlar kullanılmıştır.

2. ÖNBİLGİLER

2.1 Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Sıfır Yerleri

Genellikle n . dereceden bir polinom eşitliğinin köklerini bulmak n arttıkça zorlaşmaktadır. Cebirin temel teoreminden bilinen n tane kökü veren direk bir formülüzasyonun bulunamaması bu konudaki çalışmaların farklılıklarına yol açmıştır. Bu sebeple bir polinom sınıfının sıfır yerlerini açık ifadelerle belirlemek büyük önem taşımaktadır. R -Bonacci polinomlarının $r = 2$ iken özel bir hali olan polinom sınıfı Fibonacci polinomlarının sıfırları, hiperbolik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak elde edilmiştir [19]. Öncelikle Fibonacci ve Lucas polinomlarının sıfır yerlerini belirlemek için bu çalışmada kullanılan teknik açıklanacaktır.

2.1.1 Tanım: Fibonacci polinomu $F_1(x) = 1$ ve $F_2(x) = x$ başlangıç şartlarıyla,

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Fibonacci polinomlarının cebirsel ifadesi

$$F_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} \quad n \geq 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir. $F_{2n}(0) = 0$ ve $x = 0$ tek reel kökü oluşturmasının yanında $F_{2n+1}(x)$ polinomlarının $x = 1$ dışında hiç reel kökü yoktur [22].

2.1.2 Tanım: Benzer şekilde Lucas polinomu $L_n(x)$, $L_1(x) = x$ ve $L_2(x) = x^2 + 2$ başlangıç şartlarıyla,

$$L_{n+1}(x) = xL_n(x) + L_{n-1}(x) \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanır. İlk otuz Fibonacci ve Lucas polinomları sırasıyla Ek 6.1 ve Ek 6.2 gibi sıralanır.

Fibonacci polinomunun karakteristik denklemi,

$$y^2 = xy + 1 \quad (2.4)$$

dir ve bu denklemin köklerinin $\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ ve $\beta = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ olduğu bilinmektedir. Bu kökler kullanılarak n . Fibonacci ve Lucas polinomları aşağıdaki Binet formülü yardımıyla elde edilebilir.

2.1.3 Teorem (Binet Formülleri): Fibonacci ve Lucas polinomları için

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{e^{nz} - (-1)^{-nz}}{e^z + e^{-z}} \quad (2.5)$$

$$L_n(x) = \alpha^n + \beta^n = e^{nz} + (-1)^n e^{-nz} \quad (2.6)$$

eşitlikleri sağlanır.

Fibonacci ve Lucas polinomlarının sıfır yerlerini bulmak için hiperbolik fonksiyonları kullanarak uygun değişken değişimi aşağıdaki gibi yapılır [19].

Kompleks analizden ,

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{ve} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (2.7)$$

hiperbolik fonksiyonlarının

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1 \quad (2.8)$$

$$\cosh iy = \cos y \quad (2.9)$$

$$\sinh iy = i \sin y \quad (2.10)$$

özellikleri bilinmektedir.

Eğer $x = 2 \sinh z$ alınırsa, $\sqrt{x^2 + 4} = 2 \cosh z$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\beta &= \sinh z - \cosh z = -e^{-z} \\ \alpha &= \cosh z + \sinh z = e^z\end{aligned}\tag{2.11}$$

denklemleri kolayca elde edilir.

Çift ve tek indisli Fibonacci ve Lucas polinomlarının,

$$F_{2n}(x) = \frac{\sinh 2nz}{\cosh z}\tag{2.12}$$

$$F_{2n+1}(x) = \frac{\cosh(2n+1)z}{\cosh z}\tag{2.13}$$

$$L_{2n}(x) = 2 \cosh 2nz\tag{2.14}$$

$$L_{2n+1}(x) = 2 \sinh(2n+1)z\tag{2.15}$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Bu durumda, $F_{2n}(x) = 0$ olması için $\sinh 2nz = 0$ ve $\cosh z \neq 0$ eşitliklerin sağlanması gerekir. (2.10) kullanılarak,

$$\sinh 2nz = \sinh i(-i2nz) = i \sin(-i2nz) = 0\tag{2.16}$$

elde edilir. $z = x + iy$ alınırsa,

$$-i2n(x + iy) = -2nix + 2ny = \pm k\pi\tag{2.17}$$

sonucuna ulaşılır. (2.17) denkleminin reel ve sanal kısımlarının eşitliğinden

$$x = 0 \text{ ve } 2ny = \pm k\pi\tag{2.18}$$

bulunur. (2.13) denkleminde benzer işlemler tekrar edilirse,

$$\begin{aligned}\cosh(2n+1)z &= \cosh i(-i(2n+1)z) \\ &= \cos(-i(2n+1)z) = \cos(i(2n+1)z) = 0\end{aligned}\quad (2.19)$$

elde edilir. Tekrar $z = x + iy$ alınarak,

$$(ix - y)(2n+1) = (2nx + x)i + (-2ny - y) = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}\quad (2.20)$$

bulunur. (2.20) denkleminin her iki tarafın eşitliğinden reel ve imajiner (sanal) kısımlar

$$x = 0 \text{ ve } (2n+1)y = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}\quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak Fibonacci polinomlarının sıfır yerleri,

$$F_{2n}(x) = 0 : \quad x = \pm 2i \sin \frac{k\pi}{2n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1\quad (2.22)$$

$$F_{2n+1}(x) = 0 : \quad x = \pm 2i \sin \left(\frac{2k+1}{2n+1} \right) \frac{\pi}{2} \quad k = 0, 1, \dots, n-1\quad (2.23)$$

olarak bulunur.

Lucas polinomların sıfır yerleri için $L_{2n}(x) = 2 \cosh 2nz$ olduğu (2.14) denklemi ele alınır ve yukarıdaki benzer işlemler tekrar edilirse,

$$-i2n(x + iy) = -2nix + 2ny = \pm \frac{(2k+1)}{2} \pi\quad (2.24)$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $x = 0$ ve $y = \pm \frac{(2k+1)}{2n} \frac{\pi}{2}$ olduğu kolayca görülmektedir.

Benzer işlemler tek Lucas polinomları için de yapılır.

Sonuç olarak tek ve çift indisli Lucas polinomların sıfırları,

$$L_{2n}(x) = 0 : x = \pm 2i \sin \left[\left(\frac{2k+1}{2n} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.25)$$

$$L_{2n+1}(x) = 0 : x = \pm 2i \sin \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.26)$$

şeklinde olmalıdır. Böylece Fibonacci ve Lucas polinomlarının sıfırları (2.22), (2.23) ve (2.25), (2.26) denklemleriyle Hoggat ve Bicknell tarafından 1973 yılında sade bir hale getirilmiştir.

Basit olmasının yanında Fibonacci ve Lucas polinomlarının sıfır yerleri arasında önemli bir geçiş sağlayan bağıntı aşağıdaki gibidir.

2.1.4 Teorem: $L_n^{(k)}(x)$ ve $F_n^{(k-1)}(x)$ sırasıyla n . Lucas polinomunun k . mertebeden türevi ve n . Fibonacci polinomunun $(k-1)$. mertebeden türevini gösterebilir. Bu halde,

$$L_n^{(k)}(x) = n F_n^{(k-1)}(x) \quad (2.27)$$

elde edilir [31].

Yukarıdaki sonuca dayanarak kolayca söylenebilir ki, k . mertebeden Lucas polinomunun sıfır yerleri ile $(k-1)$. mertebeden Fibonacci polinomunun sıfır yerleri çakışmaktadır. Böylece birinci mertebeden Lucas polinomlarının sıfır yerleri de (2.22), (2.23) eşitliklerindeki gibi olmalıdır.

2.2 Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Sıfır Yerlerinin Simetrik Polinomları

Bir simetrik polinom $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ n tane değişkene sahiptir ve değişkenler kendi aralarında yer değiştirdiğinde polinomun kendisi elde edilir. Simetrik polinomun tanımıyla birlikte genel açıklamaları aşağıdaki gibi verilebilir.

2.2.1 Tanım: $0 \leq j \leq m$ için $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$ kümesi üzerinde tanımlı olan simetrik polinomlar $\sigma_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\prod_{k=1}^m (t + x_k) = \sum_{j=0}^m \sigma_j(x_1, x_2, \dots, x_m) t^{m-j} \quad (2.28)$$

$\sigma_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ simetrik polinomunun en genel hali:

$$\sigma_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \sum_{l_1=0}^{m-1} \sum_{l_2=l_1}^{m-1} \dots \sum_{l_j=l_{j-1}}^{m-1} \prod_{i=1}^j x_{l_i} \quad (2.29)$$

şeklindedir [39].

Özel durumlar ele alındığında $\sigma_0 = 1$ ve $j > m$ için $\sigma_j = 0$ elde edilir. Örnek olarak $m=4$ alındığında aşağıdaki sıfırdan farklı simetrik polinomlar elde edilir.

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 1, \\ \sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ \sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \\ \sigma_4 &= x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

gösterimler açıkça görülebileceği gibi x_1, x_2, x_3, x_4 'den bağımsızdır. Özetlemek gerekirse $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_m)$ simetrik olması için gerek ve yeter şart değişkenlerin herhangi bir kombinasyonu altında σ invaryant kalır [40].

Fibonacci polinomlarının sıfır yerlerinin karelerinden elde edilen simetrik polinoma yer verilmeden önce bu polinomların sıfır yerlerinin konumu incelenebilir. $F_n(x)$ polinomunun sıfırlarının imajiner eksende ve kompleks eşlenik köklere karşılık geldiği açıktır. $F_{2n}(x)$ çift indisli polinomların sıfırları $x_k > 0$, $k > 0$ için,

$$x_0 = 0, \pm ix_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.30)$$

Benzer şekilde $F_{2n+1}(x)$ tek indisli polinomların sıfırları,

$$\pm ix_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.31)$$

olmalıdır [39].

M. He, D. Simon, P. Ricci tarafından elde edilen simetrik polinomlar Fibonacci polinomların tek ve çift olmasına bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir [33].

2.2.2 Teorem: $F_{2n}(x)$ 'in sıfırlarının karelerinden oluşan j . simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_j(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n-1}^2) = \binom{2n-j-1}{j}. \quad (2.32)$$

$j=1$ ve $j=n-1$ yazılarak $F_{2n}(x)$ polinomların sıfır yerlerinin karelerinin toplamını ve çarpımını veren simetrik polinomlar aşağıdaki şekilde verilebilir [39].

2.2.3 Sonuç: $F_{2n}(x)$ çift indisli polinomunun sıfırları sabit bir n için aşağıdaki bağıntıları sağlamaktadır:

$$(a) \quad \prod_{k=1}^{n-1} x_k^2 = n, \quad (2.33)$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = 2(n-1). \quad (2.34)$$

2.2.4 Teorem: $F_{2n+1}(x)$ 'in sıfırlarının karelerinden oluşan j . simetrik polinom aşağıdaki gibidir [39]:

$$\sigma_j(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n-1}^2) = \binom{2n-j}{j}. \quad (2.35)$$

2.2.5 Sonuç: $F_{2n+1}(x)$ tek indisli indisli türev polinomunun sıfırları sabit bir n için aşağıdaki bağıntıları sağlamaktadır.

$$(a) \quad \prod_{k=1}^{n-1} x_k^2 = 1, \quad (2.36)$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = 2n-1. \quad (2.37)$$

Teorem 2.1.4 kullanılarak, elde edilmiş Fibonacci polinomların sıfırlarından oluşan simetrik polinomlar ile Lucas polinomların birinci mertebeden türev polinomlarının sıfırlarının simetrik polinomları aynı olması gerekeceğinden (2.33), (2.34) ve (2.36), (2.37) sonuçları Lucas polinomların birinci mertebeden türevleri için de geçerlidir.

2.3 Tribonacci Polinomları ve Simetrik Polinomları

Fibonacci polinomlarının daha genelleştirilmiş hali olan $T_n(x)$ Tribonacci polinomları $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = 1$ ve $T_2(x) = x^2$ başlangıç şartlarıyla,

$$T_{n+3}(x) = x^2 T_{n+2}(x) + x T_{n+1}(x) + T_n(x) \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlama ilk kez 1973 yılında Hoggat ve Bicknell tarafından yapılmıştır [32]. İlk otuz Tribonacci polinomuna Ek 6.3'deki gibi sıralanır. Bu polinomların katsayıları sıralandığında

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3		
1	4	6	2	
1	5	10	7	1
1	6	15	16	6
...

bulunur. Bu katsayıların dizilimi değiştirildiğinde

1										
1	1	1								
1	2	3	2	1						
1	3	6	7	6	3	1				
1	4	10	16	19	16	10	4	1		
1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1
...

bulunur ki, bu katsayılar binomial katsayıları oluşturur. Bu katsayı $\binom{n}{j}_3$ şeklinde gösterilmekle birlikte bu dizilimde n . satır ve j . sütunu gösterir. Bu katsayı,

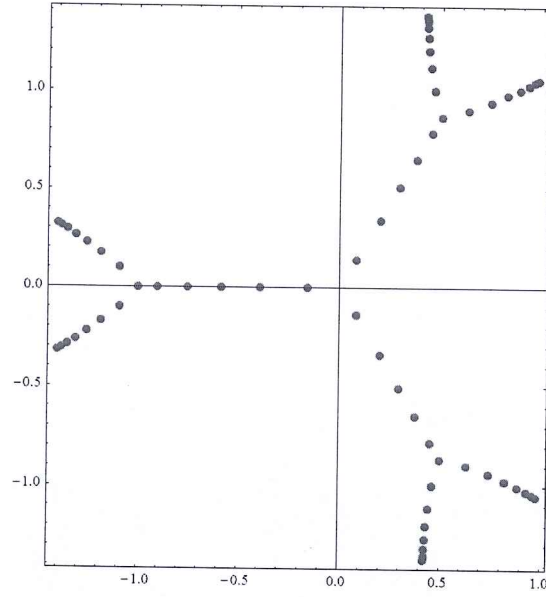
$$j > n \text{ ise } \binom{n}{j}_3 = 0 \quad (2.39)$$

olmalıdır. Böylece bu katsayı kullanılarak Tribonacci polinomları tekrar yazıldığında

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor 2/3(n-1) \rfloor} \binom{n-j-1}{j}_3 x^{2n-3j-2} \quad (2.40)$$

elde edilir. Fibonacci polinomlarının sıfır yerlerindeki formülüzasyonunun Tribonacci polinomlarında bulunmamasından dolayı nümerik çalışmalar daha ağırlık kazanmıştır. Örneğin [33] nolu çalışmada katsayılar arasında bağıntı kullanılarak bu polinomların sıfır yerlerinin tespiti çalışması yapılmıştır.

Örneğin 60. dereceden Tribonacci polinomunun sıfır yerleri aşağıdaki şekilde görülebilir.



Şekil 2.1: $T_{60}(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri

Fibonacci polinomlarının sıfır yerleri imajiner eksende bulunmasına rağmen Tribonacci polinomlarının kökleri kompleks düzlemde $\frac{2\pi}{3}$ dönmeyle elde edilir. Yani Tribonacci polinomlarının sıfır yerleri 3 kümeye ayrılır: Bu kümeler uygun bir $\{x_i\}$ kümesi için, $\{x_i\}$, $\left\{x_i e^{\frac{2\pi i}{3}}\right\}$ ve $\left\{x_i e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right\}$ şeklindedir. Tribonacci polinomlarının sıfır yerlerinin küpleri toplamını veren simetrik polinomlar M. X. He, D. Simon, P. E. Ricci tarafından [39] nolu çalışmada elde edilmiştir. Şimdi bu sonuçlara yer verilecektir.

2.3.1 Teorem:

(i) $T_{3n+1}(x)$ in sıfırlarının küplerinden oluşan j . simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_j(x_1^3, x_2^3, \dots, x_{2n}^3) = (-1)^j \binom{3n-j}{j}_3. \quad (2.41)$$

(ii) $T_{3n+2}(x)$ in sıfırlarının küplerinden oluşan j . simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_j(x_1^3, x_2^3, \dots, x_{2n}^3) = (-1)^j \binom{3n-j+1}{j}_3 \quad (2.42)$$

(iii) $T_{3n}(x)$ in sıfırlarının küplerinden oluşan j . simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_j(x_1^3, x_2^3, \dots, x_{2n}^3) = (-1)^j \binom{3n-j-1}{j}_3 \quad (2.43)$$

(2.41), (2.42) ve (2.43) nolu eşitliklerde $j=1$ yazılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

2.3.2 Sonuç:

(i) $T_{3n+1}(x)$ in sıfırları aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\sum_{k=1}^{2n} x_k^3 = -(3n-1). \quad (2.44)$$

(ii) $T_{3n+2}(x)$ in sıfırları aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\sum_{k=1}^{2n} x_k^3 = -3n. \quad (2.45)$$

(iii) $T_{3n}(x)$ in sıfırları aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} x_k^3 = -(3n-2). \quad (2.46)$$

2.4 Polinomların Sıfır Yerleri için Üst Sınır Bulma

Polinomların sıfır yerlerini araştırılırken bu sıfır yerlerinin reel ekseninde veya kompleks düzlemde nasıl dağıldığı problemi önemli bir çalışma konusudur. Bu lokasyon çalışması çok fazla tekniği içinde barındırmaktadır. Örneğin rasyonel kök teoremi bir polinomun rasyonel köklerinin bulunmasını sağlarken tek değişkenli bir polinomun maksimum pozitif ve maksimum negatif köklerinin sayısı, ilave olarak karmaşık ve reel köklerinin sayısı, denklemin kökleri bulunmadan, Descartes'in işaret kuralı ile tespit edilebilir. Bu metotların hepsi farklı amaçlar için kullanılmaktadır. Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan Cauchy'nin metoduyla birlikte bir polinomun karakteristik polinomunu veren matrisin elemanları kullanılarak bulunan Gershgorin çemberleri vasıtasıyla üst sınır elde etme tekniğinden bahsedilecektir.

2.4.1 Polinomların Sıfır Yerleri için Cauchy Sınırı

2.4.1.1 Teorem: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ monik n . dereceden bir polinom olsun. Eğer x , $P(x) = 0$ 'in bir kökü ise, bu halde

$$|x| \leq 1 + \max_{i=0,1,\dots,n-1} |a_i| \quad (2.47)$$

şeklinde olmalıdır [41].

2.4.2 Gershgorin Teoremi Kullanılarak Polinomların Sıfır Yerleri için Üst Sınır

Lineer cebirde özdeğerler $n \times n$ tipindeki kare matrisler için tanımlanır. Özdeğerlerin bilinen en önemli özelliklerinden biri o matrisin karakteristik polinomunun köklerini belirtmesidir. Yani, $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tipinde kompleks terimli bir matris olsun. A 'nın karakteristik polinomu $f(x)$ olsun ve λ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ise A matrisinin özdeğerlerini gösterebilir. Bu durumda,

$$f(\lambda_i) = 0 \quad (2.48)$$

ve $\|A\|$, A matrisinin normunu göstermek üzere

$$\max |\lambda_i| \leq \|A\| \quad (2.49)$$

olduğu bilinmektedir.

2.4.2.1 Tanım: Gershgorin çemberleri

$$C_i = \{z : |z - a_{ii}| \leq r_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.50)$$

ve

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad (n \geq 2) \quad (2.51)$$

olmak üzere a_{ii} merkezli r_i yarıçaplı disklerin ailesi Gershgorin çemberleri olarak isimlendirilir.

2.4.2.2 Teorem (Gershgorin Çember Teoremi): $n \geq 2$ olmak üzere her bir i ($1 \leq i \leq n$) için öyle bir j ($1 \leq j \leq n$) elemanı vardır öyle ki

$$\lambda_i \in C_j \quad (2.52)$$

ve ayrıca

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n \quad (2.53)$$

olur [42].

$n \times n$ tipindeki $A = (a_{ij})$ matrisi ele alınsın. Dolayısıyla Gershgorin Çember Teoremi gereği $A = (a_{ij})$ matrisinin özdeğerleri yani $A = (a_{ij})$ matrisinin karakteristik polinomunun sıfır yerleri aynı olduğundan bu teknik kullanılarak polinomların sıfır yerlerini içeren üst sınır bulunabilir.

3. R -BONACCİ POLİNOMLARININ SIFIR YERLERİ

Polinomların sıfır yerlerinin büyüklükleri üzerinde sınırlar belirlemek, 1829 yılında polinomların katsayılarını içeren çok basit bir üst sınır elde eden Cauchy'e kadar uzanmaktadır [41]. 1966 yılında ise Marden "*Geometry of polynomials*" adlı kitabında bu problemi kapsamlıca ele almıştır [43]. 1991 yılında Zeheb polinomları kompleks ya da reel katsayılı olarak ayırıp Cauchy'nin elde ettiği sınırı daha da genellemiştir [44].

Polinomların sıfırlarının lokasyon teorisi, lineer kontrol teorisi, elektrik ağları, kök yaklaşım teorisi, sinyal işleme ve kodlama teorisi dahil olmak üzere uygulamalı matematiğin birçok alanında uygulamaya sahiptir. Çünkü uygulamaların daha değerli hale gelmesi için polinomların sıfırlarını içinde barındıran bölgenin iyi belki de en iyi hale getirilmesine ihtiyaç vardır [43,45,46].

Bu bölümde R -Bonacci polinomlarının sıfırlarını içeren halka bölge elde etme problemi ele alınacaktır. Problemin çıkış noktası ise, R -Bonacci polinomlarının sıfır yerleri için elde edilmek istenen formülüzasyon sürecinde karşılaşılan güçlüklerdir.

Öncelikli amacımız R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerini karakterize etmektedir. R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerinin $\frac{2\pi}{r}$ dönme ile elde edilebileceği aşağıdaki özdeşlik yardımıyla ispatlanmıştır [39].

$$R_n(xw^k) = w^{kn} R_n(x), w = e^{\frac{2\pi i}{r}}, k = 0, 1, \dots, r-1, n = 1, 2, \dots$$

Aynı çalışmada R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerinin $x^r + 1 = 0$ eşitliğinin sıfırlarıyla başlayan r -yıldızlı oluşturduğuna dair bir tahmin verilmiştir. Biz bu bölümde bu varsayımı R -Bonacci polinomlarının belli sınıfları için simetrik polinomlar yardımıyla doğrulamış olduk. $p \in \{0, 1\}$ ve $n = 1$ için referans noktalarını bularak $R_{rn+p}(x)$ polinomunun sıfır yerlerini elde ettik. Diğer n değerleri için bizim yöntemimizin cevap vermemesi nedeniyle R -Bonacci polinomlarının sıfırlarının bir üst sınırını elde etmek için Gershgorin teoremi ve Lucas eşitliği kullanılacaktır. Ardından Gershgorin teoremi vasıtasıyla elde edilen üst sınırlar karşılaştırılacaktır.

3.1. R – Bonacci Polinomlarının Simetrik Polinomlar Yardımıyla Elde Edilen Sıfır Yerleri

n bir tamsayı olsun. $R_{-k}(x) = 0$, $k = 0, 1, \dots, r-2$, $R_1(x) = 1$, $R_2(x) = x^{r-1}$ başlangıç şartlarıyla $r \geq 2$ için aşağıdaki tekrarlama bağıntısıyla R – Bonacci polinomları tanımlanabilir [32]:

$$R_{n+r}(x) = x^{r-1}R_{n+r-1}(x) + x^{r-2}R_{n+r-2}(x) + \dots + R_n(x) \quad (3.1)$$

Bu kısımda R – Bonacci polinomlarının sıfır yerleri incelenecektir. Bunun için R – Bonacci polinomlarının sıfırlarından oluşan simetrik polinomlar bulunduktan sonra bu polinomlar vasıtasıyla R – Bonacci polinomlarının $n=1$ için sıfırlarını üreten referans noktaları elde edilecektir.

R – Bonacci polinomlarının genel gösterimi, $\binom{n}{j}_r$ r – nomial katsayıyı göstermek üzere aşağıdaki gibidir [32].

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(r-1)(n-1)}{r} \rfloor} \binom{n-j-1}{j}_r x^{(r-1)(n-1)-rj} \quad (3.2)$$

M. X. He, D. Simon ve P. E. Ricci $r=2$ yani Fibonacci polinomlarının cebirsel ifadesini kullanarak bu polinomların sıfır yerlerinin simetrik polinomlarını elde etmişti. Öncelikle R – Bonacci polinomları için bu sonuçlar genellenecektir. Bu genelleme sayesinde de He, Simon, Ricci'nin bu polinomların sıfır yerlerinin $2\pi/r$ açılı ile r -yıldızlı oluşturduğu varsayımı bazı sınıflar için doğrulanmıştır.

3.1.1 Teorem: $R_m(x)$ polinomlarının sıfırlarını içeren en genel simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma(x_1^r, \dots, x_{(r-1)n-1}^r) = (-1)^j \binom{rn-j-1}{j}_r. \quad (3.3)$$

İspat: R – Bonacci polinomlarının sıfır yerlerinin $\frac{2\pi}{r}$ açıyla oluştuğu bilinmektedir. Bu nedenle $R_m(x)$ polinomları aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$R_m(x) = x \prod_{k=1}^{(r-1)n-1} (x - x_k) \left(x - x_k e^{\frac{2\pi i}{r}} \right) \dots \left(x - x_k e^{-\frac{2\pi i}{r}} \right)$$

Bu halde çarpma işlemleri yapılırsa,

$$\begin{aligned} R_m(x) &= x \{ x^{r^2n-m-r} - \\ & x^{r^2n-m-2r} \sum_{k=1}^{(r-1)n-1} x_k^r + x^{r^2n-m-3r} \sum_{j \neq k}^{(r-1)n-1} x_j^r x_k^r \\ & - x^{r^2n-m-4r} \sum_{j \neq k \neq l}^{(r-1)n-1} x_j^r x_k^r x_l^r + \dots - \prod_{k=1}^{(r-1)n-1} x_k^r \} \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^{(r-1)n-1} (-1)^j x^{(r-1)(m-1)-rj} \left\{ \sum_{1=l_1 < l_2 < \dots < l_j} \prod_{i=1}^j x_{l_i}^r \right\} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{(r-1)n-1} (-1)^j \sigma_j(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{(r-1)n-1}^r) x^{(r-1)(m-1)-rj}. \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $R_m(x)$ polinomu aşağıdaki hale gelir:

$$R_m(x) = \sum_{j=0}^{(r-1)n-1} (-1)^j \sigma_j(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{(r-1)n-1}^r) x^{(r-1)(m-1)-rj} \quad (3.5)$$

(3.2) ve (3.5) birbirine eşit olduğundan istenilen sonuç elde edilmiş olur. \square

3.1.2 Sonuç: $R_m(x)$ polinomun sıfırları aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sum_{k=1}^{(r-1)n-1} x_k^r = - \binom{rn-2}{1}_r. \quad (3.6)$$

İspat: Eşitlik (3.3)'de, j yerine 1 yazılarak istenen sonuç elde edilir. \square

Şimdi benzer şekilde $R_{m+1}(x)$ polinomlarının r . mertebeden sıfır yerlerinden oluşan simetrik polinomlarına ve bu simetrik polinomun özel durumlardaki halinden elde edilen toplam formülüne yer verilecektir.

3.1.3 Teorem: $R_{m+1}(x)$ polinomlarının sıfırlarını içeren en genel simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma(x_1^r, \dots, x_{(r-1)n}^r) = (-1)^j \binom{rn-j}{j}_r. \quad (3.7)$$

İspat: Benzer mantıktan hareketle $R_{m+1}(x)$ polinomu aşağıdaki şekilde de gösterilebilir.

$$R_{m+1}(x) = x \prod_{k=1}^{(r-1)n} (x - x_k) \left(x - x_k e^{\frac{2\pi i}{r}}\right) \dots \left(x - x_k e^{-\frac{2\pi i}{r}}\right)$$

Çarpma işlemi yapılarak

$$\begin{aligned} R_{m+1}(x) &= \{x^{r^2n-m} - \\ & x^{r^2n-m-r} \sum_{k=1}^{(r-1)n} x_k^r + x^{r^2n-m-2r} \sum_{j \neq k}^{(r-1)n} x_j^r x_k^r \\ & - x^{r^2n-m-3r} \sum_{j \neq k \neq l}^{(r-1)n} x_j^r x_k^r x_l^r + \dots - \prod_{k=1}^{(r-1)n} x_k^r\} \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^{(r-1)n} (-1)^j x^{m(r-1)-rj} \left\{ \sum_{1=l_1 < l_2 < \dots < l_j} \prod_{i=1}^j x_{l_i}^r \right\} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{(r-1)n} (-1)^j \sigma_j(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{(r-1)n}^r) x^{m(r-1)-rj}. \end{aligned}$$

elde edilir. $R_{m+1}(x)$ polinomu sonuç olarak aşağıdaki hale gelecektir.

$$R_{m+1}(x) = \sum_{j=0}^{(r-1)n} (-1)^j \sigma_j(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{(r-1)n}^r) x^{m(r-1)-rj}. \quad (3.8)$$

Benzer şekilde (3.2) ve (3.8) birbirine eşit olduğundan istenen sonuç kolayca elde edilmiş olur. \square

3.1.4 Sonuç: $R_{m+1}(x)$ polinomunun sıfır yerleri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\sum_{k=1}^{(r-1)n} x_k^r = - \binom{rn-1}{1}_r. \quad (3.9)$$

İspat: Eşitlik (3.7)'de, j yerine 1 yazılarak istenen sonuç elde edilir.

3.1.5 Teorem: $R_{m+p}(x)$ polinomunda $p=0$ ve $n=1$ için bu polinomun tüm sıfır yerlerini üreten $p=1$ için ise 0 hariç diğer sıfır yerlerini üreten x_j referans sıfırları aşağıdaki denklemi sağlar.

$$x_j^r = -1 \quad (3.10)$$

İspat: $R_{m+p}(x)$ polinomunun referans sıfır kümesi x_j olsun. $R_{m+p}(x)$

polinomunun diğer sıfır yerleri $2\pi/r$ açıyla belirlendiği için (3.7) ve (3.9) nolu eşitlikler kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{r-1} x_k^r = x_j^r + \left(x_j e^{\frac{2\pi i}{r}}\right)^r + \left(x_j e^{\frac{4\pi i}{r}}\right)^r + \dots + \left(x_j e^{-\frac{4\pi i}{r}}\right)^r = -(r-1) \quad (3.11)$$

ve

$$\sum_{k=1}^{r-2} x_k^r = x_j^r + \left(x_j e^{\frac{2\pi i}{r}}\right)^r + \left(x_j e^{\frac{4\pi i}{r}}\right)^r + \dots + \left(x_j e^{-\frac{6\pi i}{r}}\right)^r = -(r-2) \quad (3.12)$$

denklemleri bulunur. (3.11) ve (3.12) yeniden düzenlenerek $R_{m+p}(x)$ polinomunun $p = 0, 1$ ve $n = 1$ için referans sıfır kümesi elde edilmiş olur. \square

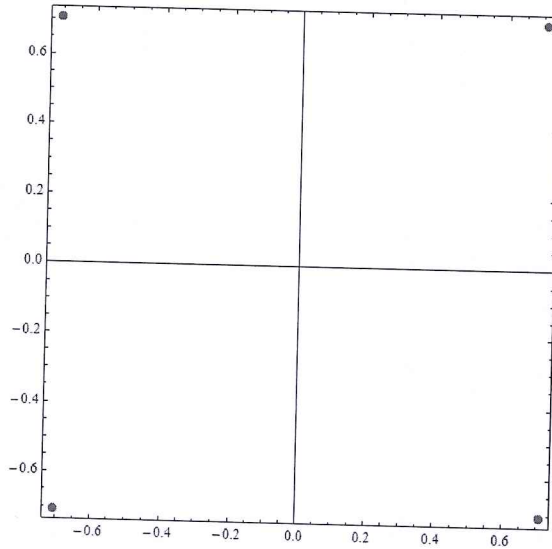
3.1.6 Örnek: $p = 1$ ve $r = 4$ için aşağıdaki Quadronacci polinomu elde edilir.

$$Q_5(x) = (x^4 + 1)^3.$$

(3.10) kullanılarak bu polinomun referans sıfır kümesi aşağıdaki gibidir.

$$x_j = (-1)^{\frac{1}{4}}, -(-1)^{\frac{1}{4}}, (-1)^{\frac{3}{4}}, -(-1)^{\frac{3}{4}}.$$

Her bir referans noktası $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ açıyla üç adet nokta üretecektir. Böylece istenen kökler aşağıdaki Şekil 3.1 den görülebileceği gibi elde edilmiş olur.



Şekil 3.1: $Q_5(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri

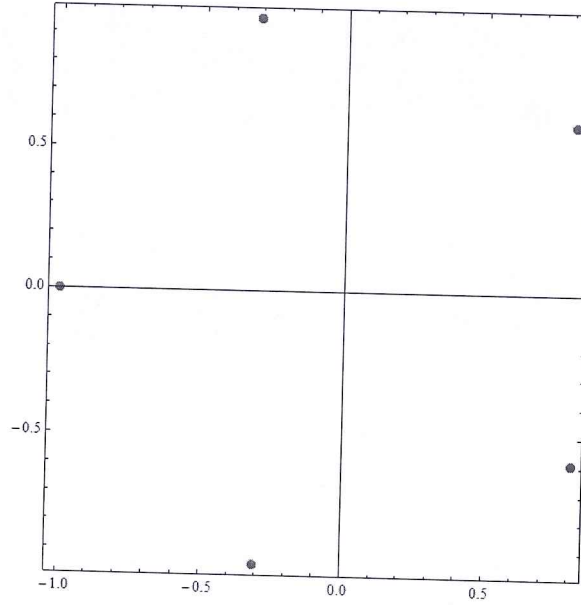
3.1.7 Örnek: $p = 1$ ve $r = 5$ için

$$B_6(x) = (x^5 + 1)^4$$

altıncı 5-Bonacci polinomu elde edilir. Benzer şekilde bu polinomun da referans sıfır kümesi aşağıdaki gibidir.

$$x_j = (-1), (-1)^{1/5}, -(-1)^{2/5}, (-1)^{3/5}, -(-1)^{4/5}.$$

Bu referans noktaları $2\pi i/5, 4\pi i/5, 6\pi i/5, 8\pi i/5$ açısıyla $B_6(x)$ polinomunun tüm sıfır yerlerini üretecektir.



Şekil 3.2: $B_6(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri

3.2 R – Bonacci Polinomların Sıfır Yerlerini İçeren Halka Bölgeler

2001 yılında José Luis Díaz-Barrero Fibonacci sayıları ve binom katsayılarını içeren özdeşlikten faydalanarak tüm polinom sınıfının sıfırlarını içeren halka bölge elde etmiştir. Bu probleme ilk katkıları olan Cauchy ve Gauss'un elde ettiği sınırla karşılaştırma yaparak elde edilen üst sınırın daha küçük, alt sınırın da daha büyük olduğunu tespit etmiştir. Díaz-Barrero

$$\sum_{k=1}^n 2^{n-k} 3^k F_k C(n, k) = F_{4n}, \quad (3.13)$$

eşitliğini kullanarak tüm polinom sınıflarının sıfırlarını içeren aşağıdaki halka bölgeyi elde etmiştir [47].

3.2.1 Teorem: $A(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($a_k \neq 0$) sabit olmayan kompleks bir polinom olsun.

$$r_1 = \frac{3}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{2^n F_k C(n, k) \left| \frac{a_0}{a_k} \right|}{F_{4n}} \right\}^{1/k} \quad (3.14)$$

ve

$$r_2 = \frac{2}{3} \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{4n}}{2^n F_k C(n, k) \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right|} \right\}^{1/k} \quad (3.15)$$

olmak üzere $A(z)$ polinomunun sıfırları $\mathfrak{R}_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ halka bölgesinde bulunur [47].

Díaz-Barrero, bu sınırları $A(z) = z^3 + 0.1z^2 + 0.3z + 0.7$ polinomuna uygulamış ve bu polinomun tüm sıfırlarını içinde bulunduran halka bölgeyi $\mathfrak{R}_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 = 0.58 \leq |z| \leq 1.23 = r_2\}$ olarak elde etmiştir. Cauchy'nin alt ve üst sınırlarını (2.47)'yi $A(z)$ polinomuna uygulamış ve bu halka bölgenin $0.41 \leq |z| < 1.7$ olduğunu elde ettikten sonra $A(z)$ polinomunun sıfırları için elde edilen \mathfrak{R}_1 halka bölgesinin daha iyi olduğu sonucuna varmıştır [47].

2003 yılında ise J. L. Diaz $A(z)$ polinomunun sıfır yerlerinin halka bölgesini hesaplarken

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{j-1}^{n-k} B_j^k P_k = P_{j,n} \quad (3.16)$$

Cesaro eşitliğini kullanmıştır. Bu eşitlikte $j = 2$ için Pell dizileri kullanılmıştır ki tüm polinom sınıflarının sıfırları için elde ettiği sınır aşağıdaki gibidir [48].

3.2.2 Teorem: $A(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($a_k \neq 0$) sabit olmayan kompleks bir polinom olsun.

$$r_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{2^k P_k \binom{n}{k} |a_0|}{P_{2n} |a_k|} \right\}^{1/k} \quad (3.17)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{P_{2n} |a_{n-k}|}{2^k P_k \binom{n}{k} |a_n|} \right\}^{1/k} \quad (3.18)$$

olmak üzere $A(z)$ polinomunun sıfırları $\mathfrak{R}_2 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ halka bölgesinde bulunur [48].

J. L. Diaz $A(z)$ polinomu için $\mathfrak{R}_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0.6 \leq |z| \leq 1.16\}$ halka bölgesini elde etmiş, Díaz-Barrero'nun elde ettiği \mathfrak{R}_1 bölgesi ile karşılaştırma yapmıştır. Bu karşılaştırmaya göre r_1 artarken r_2 değeri de azalmıştır. Dolayısıyla J. L. Diaz'ın Pell dizilerini içeren Cesaro eşitliğini kullanarak elde ettiği \mathfrak{R}_2 bölgesi Díaz-Barrero'nun Fibonacci sayıları ve binom katsayılarından oluşan özdeşlikten elde ettiği \mathfrak{R}_1 bölgesine göre daha iyi bir bölgedir.

2011 yılında M. Bidklam elde edilen \mathfrak{R}_1 ve \mathfrak{R}_2 halka bölgelerini daha da iyileştirmek için hem Fibonacci hem de Pell dizilerini kapsayan t -Fibonacci sayılarını kullanmıştır [49]. M. Bidklam

$$\sum_{k=1}^n (t^2 + 1)^{n-k} (t^3 + 2t)^k F_{t,k} \binom{n}{k} = F_{t,4n} \quad (3.19)$$

özdeşliğini ispatlayarak yeni bir halka bölge elde etmiştir. Eşitlik (3.19)'da $t = 1$ için Díaz-Barrero'nun elde ettiği \mathfrak{R}_1 bölgesi elde edilmekte, $t = 2$ için ise

$$\lambda_k = \frac{5^n P_k \binom{n}{k}}{P_{4n}} \quad (3.20)$$

olmak üzere

$$r_1 = \frac{12}{5} \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \lambda_k \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.21)$$

ve

$$r_2 = \frac{5}{12} \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{1}{\lambda_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.22)$$

elde edilir ki, $\mathfrak{R}_3 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ bölgesi bulunur.

$$\left(\frac{12}{5}\right)^n \frac{5^n}{\left[(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} \right]} \geq 2^n \quad (3.23)$$

olduğundan \mathfrak{R}_2 halka bölgesine göre kıyaslama yapılırsa r_1 daha büyük tam tersine r_2 ise küçüktür. Dolayısıyla M. Bidklam'ın elde ettiği yeni \mathfrak{R}_3 halka bölgesi hem \mathfrak{R}_1 i kapsamaması hem de \mathfrak{R}_2 'den daha iyi sonuçlar vermesinden dolayı daha değerlidir.

Burada R – Bonacci polinomlarının sıfır yerlerini içeren ideal bölgeyi bulabilmek için amaç şu ana kadar literatürde elde edilen \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 , \mathfrak{R}_3 halka bölgelerinden daha iyi bir bölge bulabilmektir. Bunun için en genel monik polinomlar ele alınarak, sonuçlar R – Bonacci polinomları için değerlendirilecektir. Bu bölümde tüm polinomların sıfır yerlerini içeren yeni bir halka bölge literatürde çok iyi bilinen aşağıdaki Lucas eşitliği yardımıyla elde edilecektir.

3.2.3 Tanım: (Lucas, 1876) F_i i . Fibonacci sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1 \quad (3.24)$$

elde edilir.

3.2.4 Teorem: $A(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($a_k \neq 0$) sabit olmayan kompleks bir polinom

olsun.

$$r_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_k}{F_{n+2} - 1} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.25)$$

ve

$$r_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{n+2} - 1}{F_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} \quad (3.26)$$

olmak üzere $A(z)$ polinomunun sıfırları $\mathfrak{R}_4 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ halka bölgesinde bulunur.

İspat: (3.25) nolu eşitlikten

$$r_1^k \leq \frac{F_k}{F_{n+2} - 1} \left| \frac{a_0}{a_k} \right|, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.27)$$

olduğu açıkça görülmektedir. Şimdi farzedelim ki, $|z| < r_1$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |A(z)| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| \geq |a_0| - \sum_{k=1}^n |a_k| |z|^k > |a_0| - \sum_{k=1}^n |a_k| r_1^k \\ &= |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k}{a_0} \right| r_1^k \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) nolu eşitlikte (3.27) kullanılarak

$$|A(z)| > |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k}{a_0} \right| r_1^k \right) \geq |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{F_{n+2} - 1} \right) = 0$$

eşitsizliği elde edilir ki, $A(z)$ polinomunun $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1\}$ içinde hiçbir sıfırı bulunmamaktadır.

$A(z)$ polinomunun tüm sıfır yerleri

$$P(z) = |a_n|z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \dots - |a_1|z - |a_0| = 0$$

eşitliğinin bir tek pozitif köküne eşit veya daha küçük modüle sahip olduğundan $P(r_2) \geq 0$ olduğu görülebilirse ispat tamamlanmış olacaktır.

(3.26) nolu eşitlikten,

$$\left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \leq \frac{F_k}{F_{n+2}-1} r_2^k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olduğu bilindiğinden bu halde,

$$\begin{aligned} P(r_2) &= |a_n| \left[r_2^n - \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| r_2^{n-k} \right] \\ &\geq |a_n| \left[r_2^n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{F_k}{F_{n+2}-1} r_2^k \right) r_2^{n-k} \right] \\ &= |a_n| r_2^n \left(1 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{F_k}{F_{n+2}-1} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $P(r_2) \geq 0$ olur ki bu da $A(z)$ polinomunun tüm sıfır yerlerinin $|z| \leq r_2$ diskinde olduğunu yani r_2 'nin bir üst sınır olduğunu gösterir. Böylece sonuç olarak $A(z)$ polinomunun tüm sıfır yerleri $\mathfrak{R}_4 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ halka bölgesinde bulunur. \square

3.2.5 Örnek: $A(z) = z^3 + 0.1z^2 + 0.3z + 0.7$ polinomu için Teorem 3.2.4'deki r_1 ve r_2 sınırları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$n = 3$ için $a_0 = 0.7, a_1 = 0.3, a_2 = 0.1, a_3 = 1$ olduğundan öncelikle $A(z)$ polinomunun sıfır yerleri için alt sınır

$$k = 1 \text{ için } \left\{ \frac{F_1}{F_5 - 1} \left| \frac{a_0}{a_1} \right| \right\} = \left\{ \frac{F_1}{F_5 - 1} \left| \frac{0.7}{0.3} \right| \right\} = \left\{ \frac{7}{12} \right\} = 0.58333,$$

$$k = 2 \text{ için } \left\{ \frac{F_2}{F_5 - 1} \left| \frac{a_0}{a_2} \right| \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{4} \left| \frac{0.7}{0.1} \right| \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{7}{4} \right\}^{\frac{1}{2}} = 1.32288,$$

$$k = 3 \text{ için } \left\{ \frac{F_3}{F_5 - 1} \left| \frac{a_0}{a_3} \right| \right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{0.7}{1} \right| \right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{ \frac{0.7}{2} \right\}^{\frac{1}{3}} = 0.7047$$

elde edileceğinden $r_1 = \min_{1 \leq k \leq 3} \left\{ \frac{F_k}{F_{n+2} - 1} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} = 0.58333$ bulunur. Benzer şekilde $A(z)$

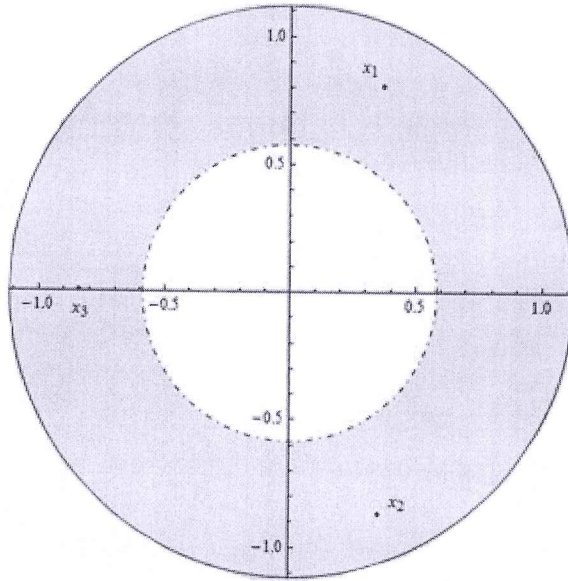
polinomunun sıfır yerlerini içeren bölge için üst sınır

$$k=1 \text{ için } \left\{ \frac{F_5 - 1}{F_1} \left| \frac{a_{3-1}}{a_3} \right| \right\} = \left\{ \frac{4}{1} \left| \frac{0.1}{1} \right| \right\} = 0.4,$$

$$k=2 \text{ için } \left\{ \frac{F_5 - 1}{F_2} \left| \frac{a_{3-2}}{a_3} \right| \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{4}{1} \left| \frac{0.3}{1} \right| \right\}^{1/2} = \{1.2\}^{1/2} = 1.09545,$$

$$k=3 \text{ için } \left\{ \frac{F_5 - 1}{F_3} \left| \frac{a_{3-3}}{a_3} \right| \right\}^{1/3} = \left\{ \frac{4}{2} \left| \frac{0.7}{1} \right| \right\}^{1/3} = \{1.4\}^{1/3} = 1.11869$$

bulunacağından $r_2 = \max_{1 \leq k \leq 3} \left\{ \frac{F_{n+2} - 1}{F_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} = 1.11869$ olarak elde edilir.



Şekil 3.3: $A(z)$ Polinomunun Sıfır Yerlerini Kapsayan \mathfrak{R}_4 Halka Bölgesi

Yukarıdaki $\mathfrak{R}_4 = \{z \in \mathbb{C} : 0.58333 \leq |z| \leq 1.11869\}$ halka bölgesi gerçekten $A(z)$ polinomunun sıfır yerleri olan $z_{1,2} = 0.352894 \pm 0.862659i$ ve $z_3 = -0.805788$ noktalarını içerir.

Díaz-Barrero'nun elde ettiği halka bölgenin $\mathfrak{R}_1 = \{z \in \mathbb{C} : r_1 = 0.58 \leq |z| \leq 1.23 = r_2\}$ şeklinde olduğu bilindiğinden $A(z) = z^3 + 0.1z^2 + 0.3z + 0.7$ polinomu için Lucas eşitliği kullanılarak elde edilen yeni $\mathfrak{R}_4 = \{z \in \mathbb{C} : 0.58333 \leq |z| \leq 1.11869\}$ halka bölge alt sınır olarak aynı değeri verse de üst sınırı daha da küçültmüştür. J. L. Diaz'ın $A(z)$ polinomu için elde ettiği $\mathfrak{R}_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0.6 \leq |z| \leq 1.16\}$ bölgesi ile \mathfrak{R}_4 sınırı kıyaslandığında ise, \mathfrak{R}_4 'ün üst sınırının daha küçük olduğu gözlenmektedir. Böylece elde edilen yeni halka bölge \mathfrak{R}_1 'e göre daha da iyi \mathfrak{R}_2 'ye göre ise nispeten daha iyidir.

3.3 R – Bonacci Polinomların Sıfır Yerleri için Gershgorin Sınırı

R – Bonacci polinomlarının (3.2) denklemindeki cebirsel gösterimi yeniden yazılıp daha sade şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(r-1)(n-1)}{r} \rfloor} \binom{n-j-1}{j}_r x^{(r-1)(n-1)-rj} = \sum_{j=0}^{(r-1)(n-1)} a_j x^j. \quad (3.29)$$

Bu kısımda kullanılacak olan teknik, öncelikle karakteristik polinomu R – Bonacci polinomlarını veren bir matrisin elemanları kullanılarak Gershgorin çemberleri oluşturmaktır. Bu karakteristik polinomun özdeğerlerinin R – Bonacci polinomlarının sıfır yerlerini oluşturduğu ispatlanacak ve polinomların sıfır yerlerinin mutlak değeri için üst sınır belirlemek kolaylaşmış olacaktır.

$a_j \in \binom{n}{j}_r$ olmak üzere aşağıdaki nxn tipindeki matrisi ele alalım.

$$r_n = \begin{pmatrix} -\frac{a_{(r-1)(n-1)-1}}{a_{(r-1)(n-1)}} & -\frac{a_{(r-1)(n-1)-2}}{a_{(r-1)(n-1)}} & \dots & -\frac{a_1}{a_{(r-1)(n-1)}} & -\frac{a_0}{a_{(r-1)(n-1)}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.1 Yardımcı Teorem: Aşağıdaki $n \times n$ tipindeki kare

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

matrisin determinanı

$$\det(\mathcal{P}_n) = (-1)^n \quad (3.30)$$

şeklindedir.

İspat: Son sütuna göre açılım yapılırsa $\det(\mathcal{P}_n) = (-1) \det(\mathcal{P}_{(n-1) \times (n-1)})$ olacağından \mathcal{P}_n matrisinin determinantının $(-1)^n$ olduğu açıkça görülmektedir.

3.3.2 Teorem: $n \geq 1$ olsun ve a_j elemanları (3.29) eşitliğindeki r -nomial katsayıyı göstere. r_n matrisinin karakteristik polinomu; R -Bonacci polinomlarını verir.

İspat: r_n matrisinin $r_n(x)$ karakteristik polinomu $I_{(r-1)(n-1)}$, $(r-1)x(n-1)$ tipinde birim matrisi göstermek üzere, $xI_{(r-1)(n-1)} - r_n$ matrisin determinantıyla belirlendiğinden bilindiğinden aşağıdaki determinant hesaplamaları yapılabilir:

$$r_n(x) = \det \left(xI_{(r-1)(n-1)} - r_n \right) = \begin{pmatrix} \frac{x + a_{(r-1)(n-1)-1}}{a_{(r-1)(n-1)}} & \frac{a_{(r-1)(n-1)-2}}{a_{(r-1)(n-1)}} & \dots & \frac{a_1}{a_{(r-1)(n-1)}} & \frac{a_0}{a_{(r-1)(n-1)}} \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{pmatrix}_{(r-1)x(n-1)}$$

$r_n(x)$ son sütuna göre açılıp (3.30) eşitliği kullanılarak,

$$r_n(x) = \frac{a_0}{a_{(r-1)(n-1)}} (-1)^{1+(r-1)(n-1)} \delta_{(n-1)(r-1)-1}$$

$$+ x (-1)^{2(r-1)(n-1)} \det \begin{pmatrix} \frac{x + a_{(r-1)(n-1)-1}}{a_{(r-1)(n-1)}} & \frac{a_{(r-1)(n-1)-2}}{a_{(r-1)(n-1)}} & \dots & \frac{a_1}{a_{(r-1)(n-1)}} \\ -1 & x & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}_{(r-1)x(n-1)-1}$$

elde edilir. Son sütuna göre benzer şekilde açılırsa,

$$r_n(x) = \frac{a_0}{a_{(r-1)(n-1)}} + x \frac{a_1}{a_{(r-1)(n-1)}} +$$

$$x^2 (-1)^{2((r-1)(n-1)-1)} \det \begin{pmatrix} \frac{x + a_{(r-1)(n-1)-1}}{a_{(r-1)(n-1)}} & \frac{a_{(r-1)(n-1)-2}}{a_{(r-1)(n-1)}} & \dots & \frac{a_2}{a_{(r-1)(n-1)}} \\ -1 & x & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}_{(r-1)x(n-1)-2}$$

bulunur. Bu şekilde işlemlere devamla,

$$r_n(x) = x^{(r-1)(n-1)-1} \left(\frac{x + a_{(r-1)(n-1)-1}}{a_{(r-1)(n-1)}} \right) + x^{(r-1)(n-1)-2} \left(\frac{a_{(r-1)(n-1)-2}}{a_{(r-1)(n-1)}} \right) + \dots$$

$$+ x^2 \left(\frac{a_2}{a_{(r-1)(n-1)}} \right) + x \left(\frac{a_1}{a_{(r-1)(n-1)}} \right) + \left(\frac{a_0}{a_{(r-1)(n-1)}} \right)$$

elde edilir. R – Bonacci polinomları için $a_{(r-1)(n-1)} = 1$ olduğundan,

$$r_n(x) = x^{(r-1)(n-1)} + a_{(r-1)(n-1)-1} x^{(r-1)(n-1)-1} + a_{(r-1)(n-1)-2} x^{(r-1)(n-1)-2} + \dots + x^2 a_2 + x a_1 + a_0$$

$$= \sum_{j=0}^{(r-1)(n-1)} a_j x^j$$

$$= R_n(x)$$

elde edilir ki, bu da r_n matrisinin karakteristik polinomunun R – Bonacci polinomları olduğunu ispatlar. \square

3.3.3 Örnek: R -Bonacci polinomlarında $r=3$, $n=3$ alındığında Ek 6.3'den $T_3(x) = x^4 + x$ olduğu açıktır. $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=1$ olduğu için karakteristik polinomun matrisi aşağıdaki gibidir.

$$r_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomu ise,

$$r_3(x) = \det(xI_4 - r_3) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

olacaktır. Son sütuna göre açılım yapılırsa,

$$r_3(x) = (-1)^8 x \det \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan da ilk satıra göre açılım yapılırsa,

$$r_3(x) = x(x^3 + 1) = x^4 + x = T_3(x)$$

elde edilir.

3.3.4 Sonuç: $i=1,2,\dots,n$ için $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ ($n \geq 2$), $C_i = \{z : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$ olmak

üzere a_{ii} merkezli r_i merkezli çemberlerin ailesi olsun.

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}| = |a_{(r-1)(n-1)-2}| + \dots + |a_1| + |a_0| \\
r_2 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = |a_{21}| + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}| = 1 \\
&\vdots \\
r_{(r-1)(n-1)} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Gershgorin teoremine göre r_n matrisinin tüm özdeğerleri yani R – Bonacci polinomlarının sıfır yerleri aşağıdaki çember ailesinin birleşiminde bulunur.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{ z : \left| z - a_{(r-1)(n-1)-1} \right| \leq |a_{(r-1)(n-1)-2}| + \dots + |a_1| + |a_0| \right\} \\
C_2 &= C_3 = \dots = C_{(r-1)(n-1)} = \left\{ z : |z| \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

3.3.5 Sonuç: R – Bonacci polinomlarının tüm sıfır yerleri C_1 diskinin içinde bulunur.

İspat: $C_2, C_3, \dots, C_{(r-1)(n-1)}$ disklerin hepsi aynı birim disk olduğundan ve C_1 çemberi tarafından kapsanacağından ispat açıktır.

3.3.6 Örnek: Benzer şekilde $T_3(x)$ polinomu ele alındığında bu polinomun Gershgorin çemberi $C_1 = \{z : |z| \leq 1\}$ olmalıdır. Gerçekten $T_3(x) = x^4 + x$ polinomunun sıfır yerleri $x_1 = 0, x_2 = -1, x_{3,4} = 0.5 \pm 0.866025i$ şeklindedir. Aşağıdaki şekilden de görülebileceği gibi $T_3(x)$ polinomunun tüm sıfırları C_1 diskinin içinde ya da üzerindedir.

Burada R – Bonacci polinomlarında $r=3$ iken sıfır yerlerinin sınırı için Gershgorin çemberi kullanılmıştır. Şimdi aynı $T_3(x)$ polinomunun sıfırları için önceki kısımda elde edilen halka bölge elde edilip kıyaslama yapılacaktır.

3.3.7 Örnek: Halka bölgesinin alt ve üst sınırları $T_3(x) = x^4 + x$ polinomu için aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Polinomun katsayıları $a_0 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_1 = 1$ ve

$k=1$ için $\left\{ \frac{F_1}{F_6-1} \left| \frac{a_0}{a_1} \right| \right\} = \left\{ \frac{1}{5-1} \left| \frac{0}{1} \right| \right\} = 0$ olduğundan, halka bölgesinin alt sınırı

hesaplamak için $k \in \{2, 3, 4\}$ için hesaplama yapmaya gerek yoktur. Böylece

$r_1 = \min_{1 \leq k \leq 3} \left\{ \frac{F_k}{F_{n+2}-1} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{1/k} = 0$ olur. Dolayısıyla elde edilecek bölge halka değil disk

olacaktır.

Benzer şekilde $T_3(x)$ Tribonacci polinomunun sıfır yerlerini içeren bölge için üst sınır,

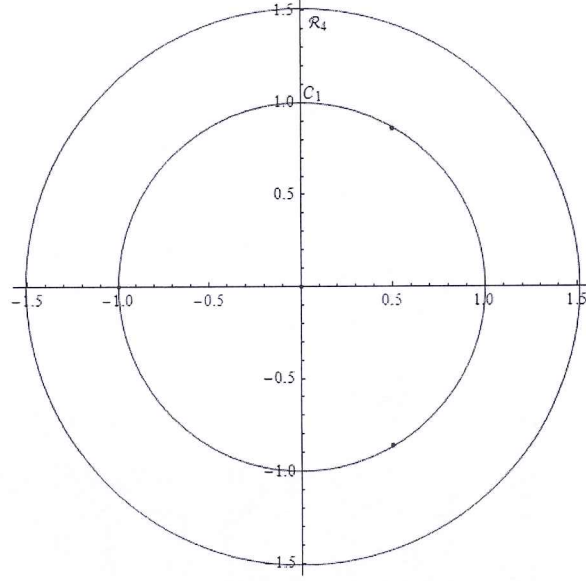
$$k=1 \text{ için } \left\{ \frac{F_6-1}{F_1} \left| \frac{a_{4-1}}{a_4} \right| \right\} = \left\{ \frac{7}{1} \left| \frac{0}{1} \right| \right\} = 0,$$

$$k=2 \text{ için } \left\{ \frac{F_6-1}{F_2} \left| \frac{a_{4-2}}{a_4} \right| \right\}^{1/2} = 0,$$

$$k=3 \text{ için } \left\{ \frac{F_5-1}{F_3} \left| \frac{a_{4-3}}{a_4} \right| \right\}^{1/3} = \left\{ \frac{7}{2} \left| \frac{1}{1} \right| \right\}^{1/3} = 1.51829$$

bulunacağından $r_2 = \max_{1 \leq k \leq 3} \left\{ \frac{F_{n+2}-1}{F_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{1/k} = 1.51829$ olarak elde edilir.

Yukarıdaki $\mathfrak{R}_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1.51829\}$ halka bölgesi gerçekten $T_3(x) = x^4 + x$ polinomunun sıfır yerleri olan $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = 0.5 \pm 0.866025i$ noktalarını içerir.



Şekil 3.4: $T_3(x)$ Polinomunun Sıfır Yerlerini Kapsayan \mathcal{R}_4 ve C_1 Çemberleri

Gershgorin teoremi kullanılarak elde edilen yeni bölge C_1 Örnek 3.3.7'de görülebileceği üzere $T_3(x)$ polinomunun tüm sıfırlarını içinde ya da üzerinde bulundurmasından dolayı belki de olabilecek en iyi sınırdır. Fakat R -Bonacci polinomlarında derece arttıkça r -nomial katsayı da büyüyeceğinden R -Bonacci polinomlarının sıfırlarını barındıran sınır daha da büyüyeceğinden Gershgorin sınırının pek başarılı olduğu söylenemez. Fakat n artmasına rağmen daha küçük diskler sunacak olan Lucas eşitliğinden faydalanılarak elde edilen sınırı kullanmak daha mantıklı olacaktır.

4. *R*-BONACCİ POLİNOMLARININ TÜREVLERİNİN SIFIR YERLERİ

R – Bonacci polinomlarının türevlerinin sıfır yerlerinin formülize edilmesi amaçlanan bu bölümde elde edilen sonuçlar üç gruba ayrılarak analiz edilecektir. Bunun için öncelikle Fibonacci ve Lucas polinomların türevlerinin sıfır yerlerini veren eşitlikler verilecektir. İşlemlerde kolaylık olması açısından Fibonacci ve Lucas polinomlarının hiperbolik fonksiyon şeklindeki gösteriminden faydalanılacaktır. Ardından Lucas polinomların sıfırlarını Fibonacci polinomların sıfır yerlerine ayrıca Lucas polinomların birinci mertebeden türevinin sıfır yerlerine resmeden fonksiyonlar elde edilecektir. Bu fonksiyonların sıfır yerlerini resmetme şekilleri incelenecektir. Ayrıca bu fonksiyonların kompleks düzlemde değişim miktarları ve grafikleri verilecektir. Asıl hedeflenen *R* – Bonacci polinomlarının türevlerinin sıfır yerlerinin formülizasyonu da bazı sınıflar için simetrik polinomlar vasıtasıyla elde edilmiştir. Sıfır yerleri formülize edilemeyen türev polinomları için ise sıfır yerlerini barındıran disklerin varlığı örneklerle incelenecektir.

4.1 Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Türevleri

4.1.1 Fibonacci Polinomlarının Birinci Mertebeden Türevlerinin Sıfır Yerleri

Bu bölümde öncelikle değişken değiştirme yöntemiyle elde edilen Fibonacci ve Lucas polinomlarının sıfır yerlerinin hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilen açık ifadeler kullanılarak bu polinomların birinci mertebeden türevlerinin sıfır yerleri araştırılacaktır.

Fibonacci polinomları için hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla elde edilen (2.12) ve (2.13) denklemlerinden faydalanılarak türev polinomların sıfır yerleri özel tanımlı fonksiyon cinsinden ifade edilecektir.

(2.9) ve (2.10) eşitlikleri kullanılarak (2.12) ve (2.13) eşitlikleri aşağıdaki eşitlikler haline getirilebilir. $x = 2 \sinh z$ olmak üzere

$$F_{2n}(x) = -i \frac{\sin(2niz)}{\cos(iz)} \quad (4.1)$$

ve

$$F_{2n}(x) = \frac{\cos[i(2n+1)z]}{\cos(iz)}. \quad (4.2)$$

haline getirilebilir. Şimdi bu son eşitliklerden faydalanarak $F'_{2n}(x)$ ve $F''_{2n+1}(x)$ polinomlarının sıfır yerlerini veren eşitlikler elde edilebilecektir.

4.1.1.1 Teorem: $F'_{2n}(x)$ polinomunun ve $L''_{2n}(x)$ polinomunun sıfırları, $x = 2 \sinh z$ olmak üzere

$$2n = -\tan(2niz) \tan(iz) \quad (4.3)$$

denklemini sağlar.

İspat: (4.1) eşitliğinden doğrudan türev alınarak $F'_{2n}(x) = 0$ eşitliğinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$2n \cosh(2niz) \cos(iz) = -\sinh(2niz) \tan(iz) \quad (4.4)$$

Burada

$$\cosh(iz) \neq 0$$

olmalıdır. (4.4) denklemi yeniden düzenlenerek (4.3) elde edilir ki, bu denklemi sağlayan z 'ler çift indisli Fibonacci polinomunun birinci mertebeden türevinin sıfırlarını ve Lucas polinomların ikinci mertebeden sıfırlarını oluşturacaktır. \square

4.1.1.2 Örnek: $F'_6(x) = 5x^4 + 12x^2 + 3$ türev polinomunun sıfırları (4.3)'e göre aşağıdaki eşitliği sağlamaktadır:

$$6 = -\tan(6iz) \tan(iz).$$

Yarım açı formülleri kullanılarak

$$3 = -\frac{\tan(3iz) \tan(iz)}{1 - \tan^2(3iz)}$$

bulunur. $x = 2 \sinh z$ eşitliği yardımıyla $F'_6(x)$ ve $L''_6(x)$ polinomlarının sıfır yerleri olan aşağıdaki kökler kolayca elde edilmiş olur.

Bu sıfır yerleri gerçekten

$$-i\sqrt{\frac{1}{5}(6-\sqrt{21})}, i\sqrt{\frac{1}{5}(6-\sqrt{21})}, -i\sqrt{\frac{1}{5}(6+\sqrt{21})}, i\sqrt{\frac{1}{5}(6+\sqrt{21})}$$

şekindedir.

4.1.1.3 Teorem: $F'_{2n+1}(x)$ ve böylece $L''_{2n+1}(x)$ polinomunun sıfırları

$$2n+1 = \tan(iz) \cot(i(2n+1)z) \quad (4.5)$$

denklemini sağlar.

İspat: Benzer işlemler tek indisli Fibonacci polinomları için (4.2) eşitlik kullanılarak, $F'_{2n+1}(x)$ denklemin sıfırlarının yukarıdaki (4.5) eşitliğini sağlayacağı görülür. \square

4.1.2 Lucas Polinomlarının Sıfır Yerlerini Fibonacci Polinomlarının Sıfır Yerlerine Resmeden Fonksiyonlar

Bu bölümde sırasıyla $L_{2n}(x)$ ve $L_{2n+1}(x)$ Lucas polinomların sıfır yerleri $F_{2n}(x)(L'_{2n}(x))$ ve $F_{2n+1}(x)(L'_{2n+1}(x))$ 'in sıfırlarına resmeden fonksiyonlar bulunup bazı örnekler kompleks düzlemde çizdirilmiş ve sıfırları resmetme sıraları incelenmiştir.

$L_{2n}(x)$ polnomunun sıfır yerlerinin modülleri (mutlak değerleri) x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) ile $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sırasıyla gösterilsin. Benzer şekilde çift indisli Fibonacci polinomların veya çift indisli Lucas polinomlarının birinci mertebeden türevinin sıfırlarının modülü de y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) ile $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ sırasıyla ele alınsın.

4.1.2.1 Teorem: $L_{2n}(x)$ 'in sıfırlarının modülü $F_{2n}(x)(L'_{2n}(x))$ 'in sıfırlarının modülüne

$$\alpha_n(x) = 2 \sin\left(\arcsin \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4n}\right) \quad (4.6)$$

fonksiyonu yardımıyla resmedilir.

İspat: $F_{2n}(x)(L'_{2n}(x))$ ve $L_{2n}(x)$ polinomların sıfırlarının formatı sırasıyla (2.22) ve (2.23) deki gibi olduğundan mutlak değerleri aşağıdaki gibidir:

$$x = 2 \sin \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

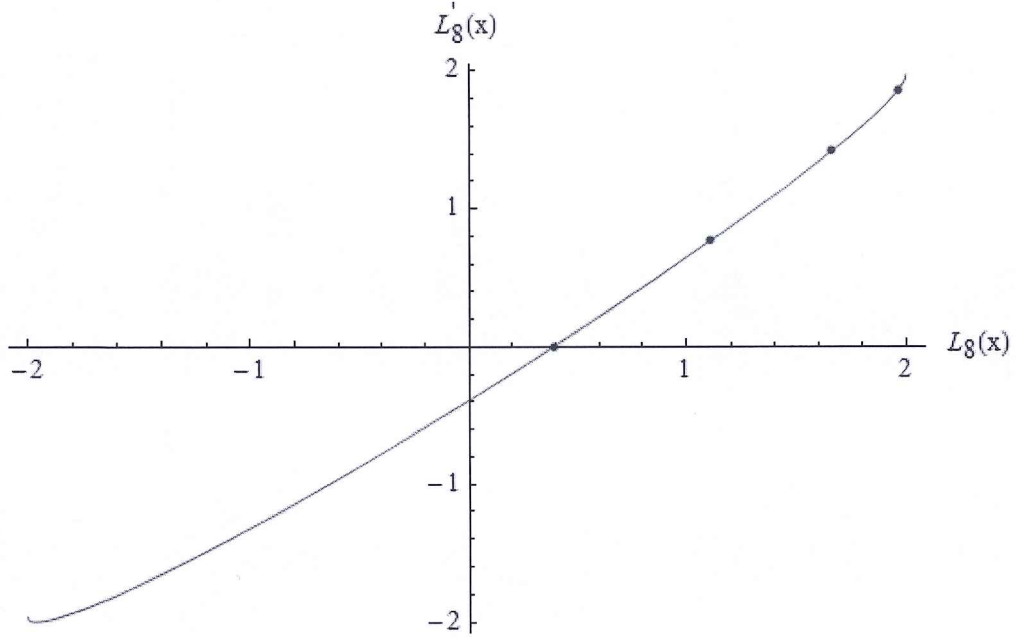
ve

$$y = 2 \sin \left(\frac{2k+1}{2n} \right) \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$\theta = \frac{k\pi}{2n}$ denilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{4n} = \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$$

Ardından istenen fonksiyona kolayca ulaşılır. \square



Şekil 4.1: $n = 4$ için $\alpha_4(x)$ Fonksiyonu

Benzer şekilde tek indisli Fibonacci ve Lucas polinomları ele alındığında $L_{2n+1}(x)(F'_{2n+1}(x))$ 'in sıfırlarının mutlak değeri x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ile gösterilmek üzere küçükten büyüğe $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ şeklinde; $L'_{2n+1}(x)$ 'in de sıfırlarının mutlak değeri ise y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) ile gösterilmek üzere $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

4.1.2.2 Teorem: $L_{2n+1}(x)(F'_{2n+1}(x))$ 'in sıfırlarının modülünü $L'_{2n+1}(x)$ sıfırlarının modülüne

$$\beta_n(x) = 2 \sin\left(\arcsin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right) \quad (4.7)$$

fonksiyonu yardımıyla resmedilir.

İspat: $L_{2n+1}(x)$ ve $L'_{2n+1}(x)$ polinomlarının sıfırları (2.25) ve (2.26) şeklinde olduğu bilindiğinden bu sıfır yerlerinin modülleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$y = 2 \sin \frac{k\pi}{2n+1}, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

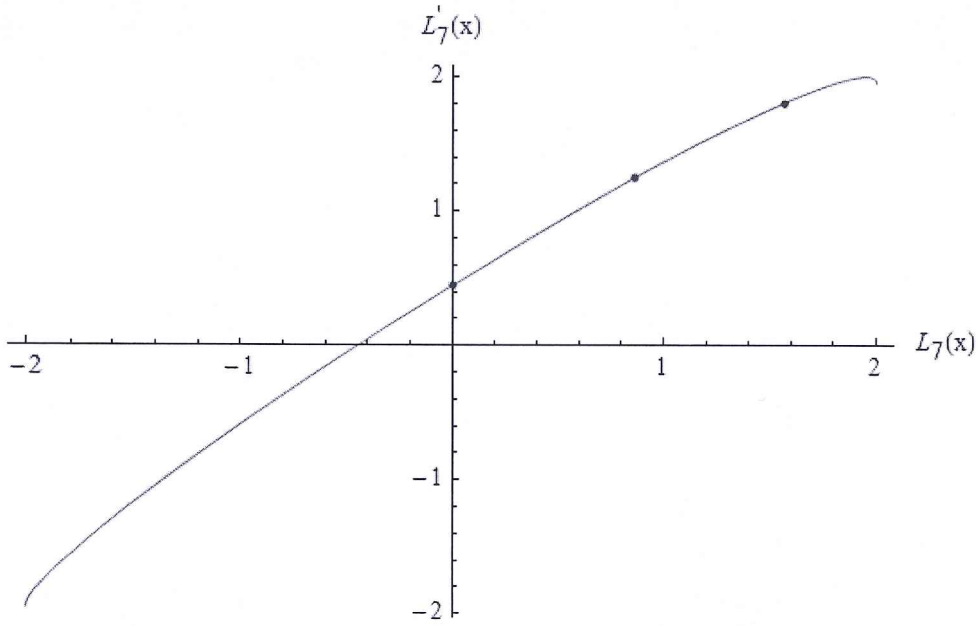
ve

$$x = 2 \sin \left(\frac{2k+1}{2n+1} \right) \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$\theta = \frac{k\pi}{2n+1}$ alınarak aşağıdaki eşitlik haline getirilebilir.

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2(2n+1)} = \arcsin\left(\frac{y}{2}\right),$$

Bu halde istenen fonksiyon kolayca elde edilir. \square



Şekil 4.2: $n = 3$ için $\beta_3(x)$ Fonksiyonu

$\alpha_8(x)$ ve $\beta_7(x)$ fonksiyonlarının sırasıyla $L_8(x)$ in sıfırlarını $L'_8(x)$ in sıfırlarına ve $L_7(x)$ in sıfırlarını $L'_7(x)$ in sıfırlarına resmettiği Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de görülmektedir.

4.2. R -Bonacci Polinomlarının Türevlerinin Simetrik Polinomlar Yardımıyla Elde Edilen Sıfırları

x_1, x_2, \dots, x_k R -Bonacci polinomlarının türevlerinin sıfır yerlerini $x_k \in \mathbb{C}$ olsun. R -Bonacci polinomlarının cebirsel gösterimi aşağıdaki gösterim ile [32] nolu çalışmada V. E. Hoggatt, M. Bicknell tarafından

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j-1}{j}_r x^{(r-1)(n-1)-rj} \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilmişti. Burada $\binom{n}{j}_r$ r -nomial katsayısı gösterilsin. Direkt türev alma işlemi uygulanarak R -Bonacci polinomlarının t . mertebeden türevinin genel gösterimini veren cebirsel gösterim de yeniden yazılabilir:

$$R_n^{(t)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-j-1}{j}_r ((r-1)(n-1)-rj) \dots ((r-1)(n-1)-rj-t+1) x^{(r-1)(n-1)-rj-t} \quad (4.9)$$

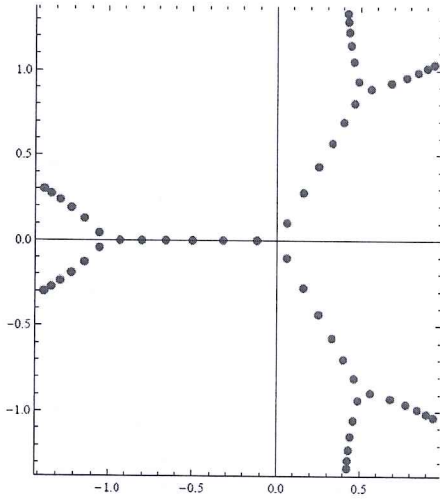
M. X. He, D. Simon ve P. E. Ricci (4.8) cebirsel gösterimi kullanarak Fibonacci polinomlarının sıfırlarını içeren simetrik polinomları elde etmişlerdir [39]. Bu bölümdeki asıl amaç bütün Fibonacci, Tribonacci ve Quadranacci polinomların t . mertebeden türevini kapsayan $R_n^{(t)}(x)$ ' in sıfırlarını içeren en genel simetrik polinomları elde etmektir. Simetrik polinomlar, Tribonacci polinomları için üç adımda elde edilip, R -Bonacci polinomları için r adımda elde edilecek olan bu polinomlar tek teoremle ifade edilecektir. R -Bonacci polinomlarının türevlerinin tüm sınıfları için verilecek olan en genel simetrik polinom bu açıdan düşünüldüğünde daha kullanışlı olduğu belirtilmelidir. Ayrıca tüm $R_n^{(t)}(x)$ polinomların sıfır yerlerinin r . mertebeden kuvvetlerini içeren simetrik polinomlar kullanılarak bu polinomların bazı sınıflarının sıfır yerleri açık şekilde ifade edilmiştir. Bu formüller bu polinomların sıfır yerlerinin karakterizasyonu açısından sade ve kullanışlıdır.

4.2.1 Tribonacci Polinomlarının Türevlerinin Sıfır Yerleri

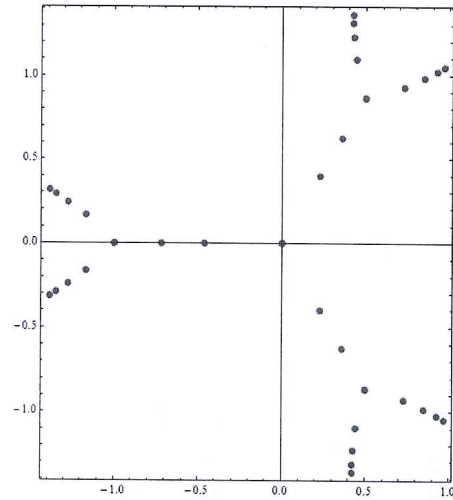
Sabit olmayan bir polinomunun sıfırları ile aynı polinomunun birinci mertebeden türevinin sıfır yerlerinin aynı konveks bölge içinde kaldığı Gauss-Lucas Teoreminden bilinmektedir. Öncelikle bu bölümde R – Bonacci polinomlarının $r = 3$ iken özel hali olan bazı Tribonacci polinomlarının türevlerinin simetrik polinomları bulunması hedeflenmiştir. Tribonacci polinomların türevlerinin de sıfır yerlerinin, x_k bu polinomların referans yerlerini göstermek üzere $\{x_k\}$, $\{x_k e^{\frac{2\pi i}{3}}\}$ ve $\{x_k e^{-\frac{2\pi i}{3}}\}$ gibi üç gruba ayrıldığı bilindiğinden aşağıdaki örnekte de incelenebileceği gibi bu polinomların sıfırları 3-yıldızlı oluştururlar.

4.2.1.1 Örnek:

$T_{20}(x)$ ve $T_{20}^{(iv)}(x)$ polinomunun sıfır yerleri kompleks düzlemde karşılaştırmalı olarak aşağıdaki şekildeki gibi gösterilebilir.



Şekil 4.3: $T_{20}(x)$ 'in Sıfırları



Şekil 4.4: $T_{20}^{(iv)}(x)$ 'in Sıfırları

Tribonacci polinomları için elde edilen simetrik polinomlar şu ana kadar türevleri için literatürde elde edilmemiş olup sıfır yerleri için herhangi bir formülüzasyon verilememiştir. Bu bölümde $T_{3n}^{(l)}(x)$, $T_{3n+1}^{(l)}(x)$, $T_{3n+2}^{(l)}(x)$ polinomlarının sıfır yerlerinden oluşan simetrik polinomlar bulunduktan sonra edilen formüller örneklenecektir.

4.2.1.2 Teorem: $t=3k$ ve $k \in \mathbb{N}^+$ için, $T_{3n+1}^{(t)}(x)$ 'in sıfırlarının küplerinden oluşan en genel simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma\left(x_1^3, \dots, x_{2n-\left(\frac{t}{3}\right)}^3\right) = \frac{(-1)^j (6n-3j)(6n-3j-1)\dots(6n-3j-t+1) \binom{3n-j}{j}_3}{6n(6n-1)\dots(6n-t+1)}. \quad (4.10)$$

İspat: $T_{3n+1}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfırlarının üç kümeye gruplandığı bilindiğinden bu polinom aşağıdaki şekilde yazabilir:

$$T_{3n+1}^{(t)}(x) = 6n(6n-1)\dots(6n-t+1) \prod_{k=1}^{2n-\left(\frac{t}{3}\right)} (x-x_k)\left(x-x_k e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\left(x-x_k e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right).$$

Çarpma işlemine devam edilerek,

$$\begin{aligned} T_{3n+1}^{(t)}(x) &= 6n(6n-1)\dots(6n-t+1) \left\{ x^{6n-t} - \right. \\ &\quad \left. x^{6n-t-3} \sum_{k=1} x_k^3 + x^{6n-t-6} \sum_{j \neq k} x_j^3 x_k^3 - x^{6n-t-9} \sum_{j \neq k \neq l} x_j^3 x_k^3 x_l^3 + \dots - \prod_{k=1}^{2n-\left(\frac{t}{3}\right)} x_k^3 \right\} \\ &= 6n(6n-1)\dots(6n-t+1) \left\{ \sum_{j=0}^{2n-\left(\frac{t}{3}\right)} (-1)^j x^{6n-3j-t} \left\{ \sum_{1=l_1 < l_2 < \dots < l_j} \prod_{i=1}^j x_{l_i}^3 \right\} \right\} \\ &= 6n(6n-1)\dots(6n-t+1) \sum_{j=0}^{2n-\left(\frac{t}{3}\right)} \sigma_j\left(x_1^3, x_2^3, \dots, x_{2n-\left(\frac{t}{3}\right)}^3\right) x^{6n-3j-t}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki son eşitlik yeniden düzenlenerek aşağıdaki hale getirilir:

$$T_{3n+1}^{(t)}(x) = \sum_{j=0}^{2n-\left(\frac{t}{3}\right)} 6n(6n-1)\dots(6n-t+1) \sigma_j\left(x_1^3, x_2^3, \dots, x_{2n-\left(\frac{t}{3}\right)}^3\right) x^{6n-3j-t} \quad (4.11)$$

Ayrıca (4.8) ve (4.11) birbirine eşit olduğundan istenilen (4.10) simetrik polinom elde edilmiş olur. \square

Teorem 4.2.1.2'in bazı özel halleri doğrudan bu polinomların sıfır yerlerinin küplerini içeren toplam ve çarpım formüllerini verir.

4.2.1.3 Sonuç: $j = 2n - \left(\frac{t}{3}\right)$ için $T_{3n+1}^{(t)}(x)$ ' in sıfırları aşağıdaki denklemleri

sağlar:

$$(i) \prod_{k=1}^{2n - \left(\frac{t}{3}\right)} x_k^3 = \frac{(-1)^j t(t-1)\dots(1)}{6n(6n-1)\dots(6n-t+1)} \binom{3n-j}{j}_3 = \gamma_j \quad (4.12)$$

ve

$$(ii) \sum_{k=1}^{2n - \left(\frac{t}{3}\right)} x_k^3 = -\frac{(6n-3)(6n-4)\dots(6n-t-2)}{6n(6n-1)\dots(6n-t+1)} \binom{3n-1}{1}_3 = \omega_j. \quad (4.13)$$

İspat: Eşitlik (4.10)'de j yerine 1 ve $2n - \left(\frac{t}{3}\right)$ yazılırsa istenen sonuç elde edilir. \square

(4.12) ve (4.13) eşitlikleri kullanılarak $T_{3n+1}^{(t)}(x)$ ' in bazı sınıflarının sıfır yerlerinin formülü şimdi tanımlanacak olan $\sigma(k, n)$ fonksiyonu yardımıyla elde edilebilir.

4.2.1.4 Tanım: $k, n \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(k, n)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sigma(k, n) = k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1). \quad (4.14)$$

$\sigma(k, n)$ fonksiyonunu tanımlamadaki amaç işlem yapılırken (4.12) ve (4.13) eşitliklerinin daha sade yazılmasıdır.

4.2.1.4 Teorem: γ_2 ve ω_2 (4.12) ve (4.13) eşitliğindeki katsayılar olmak üzere $j = 2$ için $T_{3n+1}^{(6n-6)}(x)$ polinomunun sıfırları aşağıdaki gibidir:

$$x_k = \sqrt[3]{\frac{\omega_2 \pm \sqrt{\omega_2^2 - 4\gamma_2}}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.15)$$

İspat: (4.12) ve (4.13) nolu eşitliklerde $t = 6n - 6$ yazılarak

$$\sum_{k=1}^2 x_k^3 = -\binom{3n-1}{1}_3 \frac{(6n-3)(6n-4)\dots(4)}{6n(6n-1)\dots 7} \quad (4.16)$$

ve

$$\prod_{k=1}^2 x_k^3 = \binom{3n-2}{2}_3 \frac{(6n-6)(6n-7)\dots(1)}{6n(6n-1)\dots 7}. \quad (4.17)$$

denklemleri elde edilir. Ardından (4.16) ve (4.17) eşitlikleri yeniden düzenlenerek

$$\sum_{k=1}^2 x_k^3 = -\binom{3n-1}{1}_3 \frac{\sigma(4, 6n-6)}{\sigma(7, 6n-6)} = \omega_2$$

ve

$$\prod_{k=1}^2 x_k^3 = \binom{3n-2}{2}_3 \frac{\sigma(1, 6n-6)}{\sigma(7, 6n-6)} = \gamma_2.$$

bulunur. İndis 2 ye kadar gittiğinden aşağıdaki iki bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir:

$$x_1^3 x_2^3 = \gamma_2 \text{ and } x_1^3 + x_2^3 = \omega_2.$$

$x_1^3 = \gamma_2 / x_2^3$ ikinci denklemde yerine yazılarak, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(x_2^3)^2 - \omega_2 x_2^3 + \gamma_2 = 0.$$

Hatta, x_1 yukarıdaki denklemi de sağladığı için, (x_1, x_2) nokta çifti $T_{3n+1}^{(6n-6)}(x)$ polinomunun sıfır yerlerini oluşturmaktadır. Dolayısıyla $T_{3n+1}^{(6n-6)}(x)$ polinomunun sıfır yerleri yukarıdaki eşitlik (4.15)'teki gibi olmalıdır.

4.2.1.5 Örnek: $n = 5$ için Tribonacci polinomunun 24. mertebeden türevi

$$a_0 = 56460804557724788981760000, a_3 = 25407362050976155041792000000$$

$$a_6 = 368406749739154248105984000000 \text{ olmak üzere } T_{16}^{(24)}(x) = a_0 + a_3 x^3 + a_6 x^6$$

şeklindedir. Bu polinom için (4.16) ve (4.17) eşitliklerinde $n = 5$ için $\omega_2 = -\frac{14}{203}$ ve

$\gamma_2 = \frac{1}{6525}$ elde edilir ve (4.15) eşitliğinde bu değerler yazılarak

$k = 0$ için

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-\frac{14}{203} - \sqrt{\left(\frac{14}{203}\right)^2 - \frac{4}{6525}}}{2}} = 0.20274+0351156i$$

ve

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{-\frac{14}{203} + \sqrt{\left(\frac{14}{203}\right)^2 - \frac{4}{6525}}}{2}} = 0.0659893 + 0.114297i;$$

$k=1$ için

$$x_3 = \sqrt[3]{\frac{-\frac{14}{203} - \sqrt{\left(\frac{14}{203}\right)^2 - \frac{4}{6525}}}{2}} e^{\frac{2\pi i}{3}} = -0.405480133$$

ve

$$x_4 = \sqrt[3]{\frac{-\frac{14}{203} + \sqrt{\left(\frac{14}{203}\right)^2 - \frac{4}{6525}}}{2}} e^{\frac{4\pi i}{3}} = -0.131979;$$

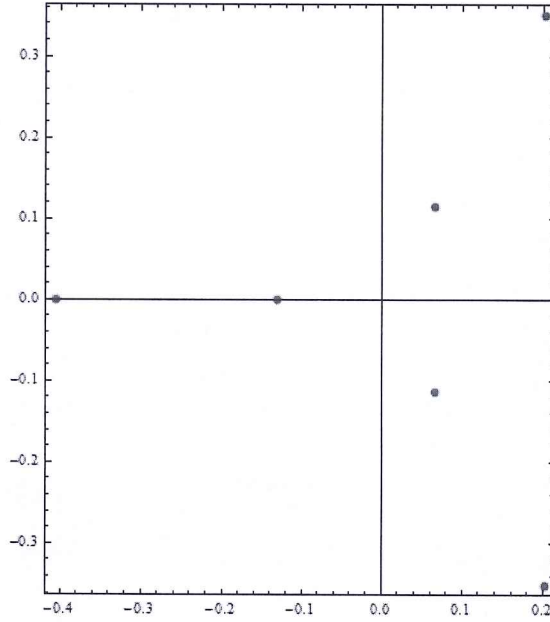
$k=2$ için

$$x_5 = \sqrt[3]{\frac{-\frac{14}{203} - \sqrt{\left(\frac{14}{203}\right)^2 - \frac{4}{6525}}}{2}} e^{\frac{4\pi i}{3}} = 0.20274 - 0.351156i$$

ve

$$x_6 = \sqrt[3]{\frac{-\frac{14}{203} + \sqrt{\left(\frac{14}{203}\right)^2 - \frac{4}{6525}}}{2}} e^{\frac{4\pi i}{3}} = 0.0659893 - 0.114297i.$$

elde edilir ki bu kökler gerçekten $T_{16}^{(24)}(x)$ polinomunun sıfır yerlerini oluşturmaktadır. Bulunan bu sıfır yerleri kompleks düzlemde de aşağıdaki gibi gösterilebilir:



Şekil 4.5: $T_{16}^{24}(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri

4.2.1.6 Teorem: $t = 3k + 1$ ve $k \in \mathbb{N}^+$ için $T_{3n}^{(t)}(x)$ 'in sıfırlarını içeren en genel simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma\left(x_1^3, \dots, x_{2n - \left(\frac{t+2}{3}\right)}^3\right) = \frac{(-1)^j (6n-3j-2)(6n-3j-3)\dots(6n-3j-(t+1))}{(6n-2)(6n-3)\dots(6n-(t+1))} \binom{3n-j-1}{j}_3. \quad (4.18)$$

İspat: Teorem 4.2.1.4'ün ispat mantığının aynısıyla sonuç kolayca elde edilir. \square

4.2.1.7 Sonuç: $j = 2n - \left(\frac{t+2}{3}\right)$ için $T_{3n}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfırları aşağıdaki denklemleri

$$(i) \prod_{k=1}^{2n - \left(\frac{t+2}{3}\right)} x_k^3 = \frac{(-1)^j t(t-1)\dots 1}{(6n-2)(6n-3)\dots(6n-(t+1))} \binom{n + \left(\frac{t+2}{3}\right) - 1}{2n - \left(\frac{t+2}{3}\right)}_3 = \mathcal{G}_j \quad (4.19)$$

ve

$$(ii) \sum_{k=1}^{2n - \left(\frac{t+2}{3}\right)} x_k^3 = -\frac{(3n-1)(6n-3)(6n-4)\dots(6n-t-2)}{(6n-2)(6n-3)\dots(6n-(t+1))} \binom{3n-2}{1}_3 = \phi_j \quad (4.20)$$

denklemlerini sağlar.

İspat: Eşitlik (4.17)'de j yerine 1 ve $2n - \left(\frac{t}{3}\right)$ yazılırsa istenen sonuç elde edilir. \square

4.2.1.8 Teorem: $t = 3k + 2$ ve $k \in \mathbb{N}^+$ için $T_{3n+2}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfırlarından oluşan simetrik polinom aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\sigma\left(x_1^2, \dots, x_{2n-\left(\frac{t}{3}\right)}^2\right) = \frac{(-1)^j (6n-3j-2)(6n-3j+2)\dots(6n-3j-t+3)}{(6n+2)(6n+1)\dots(6n-t+3)} \binom{3n-j+1}{j}_3. \quad (4.21)$$

İspat: Teorem 4.2.1.4'ün ispat mantığıyla istenen ifade kolayca elde edilir. \square

4.2.1.9 Sonuç: $j = 2n - \left(\frac{t-2}{3}\right)$ için $T_{3n+2}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfır yerleri

$$(i) \prod_{k=1}^{2n-\left(\frac{t-2}{3}\right)} x_k^3 = \frac{(-1)^j t(t-1)\dots 1}{(6n+2)(6n+1)\dots(6n-t+3)} \binom{n+\left(\frac{t+2}{3}\right)-1}{2n-\left(\frac{t-2}{3}\right)}_3 = \psi_j \quad (4.22)$$

ve

$$(ii) \sum_{k=1}^{2n-\left(\frac{t-2}{3}\right)} x_k^3 = -\frac{(6n-1)(6n-2)\dots(6n-t)}{(6n+2)(6n+1)\dots(6n-t+3)} \binom{3n}{1}_3 = \omega_j. \quad (4.23)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat: Eşitlik (4.21)'de j yerine 1 ve $2n - \left(\frac{t}{3}\right)$ yazılırsa istenen sonuç elde edilir. \square

$T_{3n}^{(t)}(x)$ ve $T_{3n+2}^{(t)}(x)$ Tribonacci türev polinomlarının kökleri aşağıdaki gibi elde edilir.

4.2.1.10 Teorem: $T_{3n+j}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfırları $j = 0, 2$ için aşağıdaki gibi formülize edilebilir: $T_{3n+2}^{(t)}(x)$ ve $T_{3n}^{(t)}(x)$ polinomların sıfır yerleri ξ_2 ve δ_2 yerine

sırasıyla ϱ_2 , φ_2 ve ψ_2 ω_2 olmak üzere (4.15) gibidir.

İspat: İspatlar benzer şekilde elde edilir. \square

4.2.1.11 Örnek: $T_{3n+2}^{(t)}(x)$ polinomu ele alındığında $j=2$ için $t=6n-4$ olduğundan $n=4$ için aşağıdaki polinom elde edilir:

$$T_{14}^{(20)}(x) = 160571532539658240000 + 51704033477769953280000x^3 + 560127029342507827200000x^6$$

ξ_2 ve δ_2 değerleri sırasıyla ω_2 ve γ_2 yerine (4.14) nolu eşitlikte yerine yazılarak

$$x_k = \sqrt[3]{\frac{\xi_2 \pm \sqrt{\xi_2^2 - \delta_2}}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.24)$$

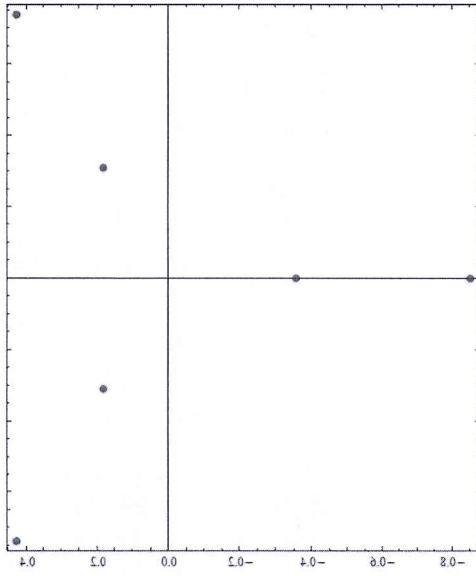
bulunur.

$r=3$ ve $n=2$ için altıncı Tribonacci polinomunun dördüncü mertebeden türevi $T_6^{(iv)}(x) = 5040x^6 + 3360x^3 + 144$ olan polinomunun sıfır yerlerini bulalım.

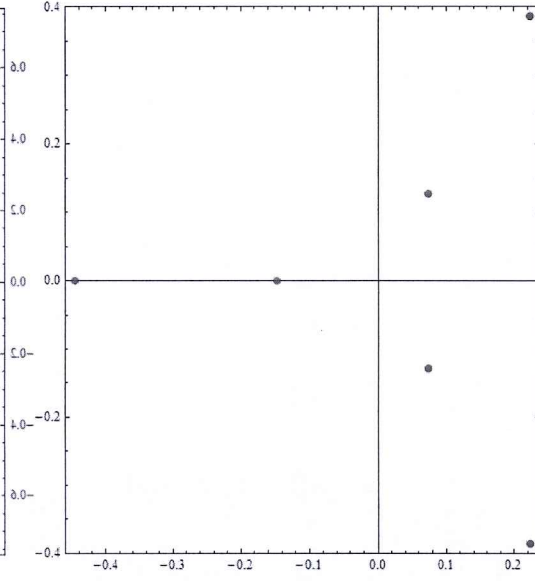
$\omega_2 = 2/3$, $\gamma_2 = 1/35$ değerleri (4.15) nolu eşitlikte yazılarak bu polinomun sıfırları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$x_k = \sqrt[3]{\frac{2/3 \pm \sqrt{(2/3)^2 - 4/35}}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$T_6^{(iv)}(x)$ polinomunun kökleri gerçekten $x_1 = -0.852991$, $x_2 = -0.358399$, $x_3 = 0.179199 - 0.310382i$, $x_4 = 0.179199 + 0.310382i$, $x_5 = 0.426495 - 0.738712i$ ve $x_6 = 0.426495 + 0.738712i$ olup gerçekten yeni elde edilen değerlerle çakışmaktadır. Benzer şekilde $T_{14}^{(20)}(x)$ ve $T_6^{(iv)}(x)$ polinomlarının sıfır yerleri aşağıdaki gibi dağılmaktadır.



Şekil 4.6: $T_{14}^{(20)}(x)$ 'in Sıfırları



Şekil 4.7: $T_6^{(iv)}(x)$ 'in Sıfırları

4.2.2 R -Bonacci Polinomlarının Türevlerinin Sıfır Yerleri

$R_n^{(t)}(x)$ t türevi göstermek üzere türev polinomunun cebirsel hali yeniden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$R_n^{(t)}(x) = \sum_{j=0}^{n-j-1} \binom{n-j-1}{j}_r ((r-1)(n-1)-rj) \dots ((r-1)(n-1)-rj-t+1) x^{(r-1)(n-1)-rj-t}. \quad (4.25)$$

Bu bölümde öncelikle $R_{m+p}^{(t)}(x)$ 'in sıfırlarını içeren en genel simetrik polinom elde edildikten sonra t 'nin bazı özel hallerinde $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfır yerlerinin açık ifadelerine yer verilecektir.

4.2.2.1 Teorem: $k \in \mathbb{N}^+$ ve $p \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ olmak üzere eğer

$$t = rk - (1-p)(r-1), \quad (4.26)$$

$$\mu = ((r-1)(rn+p-1)) \dots (rn(r-1) - t + (p-1)r + (2-p)) \quad (4.27)$$

ve

$$\eta = (r-1)n - \left(\frac{t+(1-p)(r-1)}{r} \right) \quad (4.28)$$

tanımlanırsa, bu halde $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfırlarını içeren en genel simetrik polinom aşağıdaki gibidir:

$$\sigma(x_1^r, \dots, x_\eta^r) = \frac{(-1)^j ((r-1)(rn+p-1)-rj) \cdot ((r-1)(rn+p-1)-rj-t+1) \binom{rn+p-j-1}{j}}{((r-1)(rn+p-1)) \cdot (rn(r-1)-t+(p-1)r+(2-p))} \quad (4.29)$$

İspat: R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerinin r tane kümeye $\{x_k\}$,

$\{x_k e^{2\pi i/r}\}, \dots, \{x_k e^{-2\pi i/r}\}$ şeklinde gruplandırıldığı bilindiğinden $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomun

aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_{m+p}^{(t)}(x) = \mu \prod_{k=1}^{\eta} (x - x_k) \left(x - x_k e^{\frac{2\pi i}{r}} \right) \left(x - x_k e^{-\frac{2\pi i}{r}} \right) \quad (4.30)$$

Çarpma işlemleri yapıp tüm terimler yeniden toparlanırsa $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomları aşağıdaki hale getirilir.

$$\begin{aligned} R_{m+p}^{(t)}(x) &= \mu \{ x^{r^2 n - m - (t+(1-p)(r-1))} - \\ &\quad x^{r^2 n - m - (t+(1-p)(r-1)) - r} \sum_{k=1}^{\eta} x_k^r + x^{r^2 n - m - (t+(1-p)(r-1)) - 2r} \sum_{j \neq k}^{\eta} x_j^r x_k^r \\ &\quad - x^{r^2 n - m - (t+(1-p)(r-1)) - 3r} \sum_{j \neq k \neq l}^{\eta} x_j^r x_k^r x_l^r + \dots + \prod_{k=1}^{\eta} x_k^r \} \\ &= \mu \left\{ \sum_{j=0}^{\eta} (-1)^j x^{r^2 n - m - (t+(1-p)(r-1)) - rj} \left\{ \sum_{1=l_1 < l_2 < \dots < l_j} \prod_{i=1}^j x_{l_i}^r \right\} \right\} \\ &= \mu \sum_{j=0}^{\eta} (-1)^j \sigma_j(x_1^r, x_2^r, \dots, x_\eta^r) x^{(r-1)(m+p-1) - rj - t}. \end{aligned}$$

$R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun en sade hali aşağıdaki gibi olacaktır:

$$R_{m+p}^{(t)}(x) = \sum_{j=0}^{\eta} \mu \sigma_j(x_1^r, x_2^r, \dots, x_\eta^r) x^{(r-1)(m+p-1) - rj - t}. \quad (4.31)$$

Diğer taraftan (4.31) ve (4.9) eşitliklerinin ikisi de $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun en genel hali olduğundan istenilen gösterim kolayca elde edilmiş olur.

$R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun r . sıfır yerlerini içeren toplam ve çarpım formülleri aşağıdaki gibi elde edilir.

4.2.2.2 Sonuç: t ve η sırasıyla (4.26) ve (4.27) eşitliklerindeki gibi olsun. $k \in \mathbb{N}^+$ ve $p \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ olmak üzere, $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfırları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$(i) \prod_{k=1}^{\lambda} x_k^r = \frac{(-1)^\lambda ((r-1)(rn+p-1)-r\lambda) \cdot ((r-1)(rn+p-1)-r\lambda-t+1)}{((r-1)(rn+p-1)) \cdot (rn(r-1)-t+(p-1)r+(2-p))} \binom{rn+p-\lambda-1}{\lambda}_r = \nu_\lambda \quad (4.32)$$

ve

$$(ii) \sum_{k=1}^{\lambda} x_k^r = -\frac{((r-1)(rn+p-1)-r) \cdot ((r-1)(rn+p-1)-r-t+1)}{((r-1)(rn+p-1)) \cdot (rn(r-1)-t+(p-1)r+(2-p))} \binom{rn+p-2}{1}_r = \psi_\lambda. \quad (4.33)$$

İspat: (4.29) nolu eşitlikte j yerine 1 ve p yazılarak istenilen sonuç elde edilmiş olur. \square

Şimdi R -Bonacci polinomlarının sıfır yerlerinden oluşan simetrik polinomlara ve toplam, çarpım formüllerine yer verildikten sonra bu polinomların sıfır yerlerinin formülizasyonu için yine $\sigma(k, n)$ fonksiyonu kullanılacaktır.

4.2.2.3 Teorem: $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfırları aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$t = r(r-1)n - 2r - (1-p)(r-1)$ için $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfır yerleri

$\left[r((r-1)n - \left(\frac{t+(1-p)(r-1)}{r} \right)) \right]$ tanedir ve bu sıfırlar, ξ_2 ve δ_2 sırasıyla (4.32) ve (4.33) eşitliklerindeki katsayılar olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$x_k = \sqrt{\frac{\psi_2 \pm \sqrt{\psi_2^2 - 4\nu_2}}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{r}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r-1. \quad (4.34)$$

İspat: $R_{m+p}^{(r(r-1)n-2r-(1-p)(r-1))}(x)$ polinomu $r((r-1)n - \left(\frac{t+(1-p)(r-1)}{r} \right))$ dereceden olduğundan $\sigma(k, n)$ fonksiyonu ve sırasıyla (4.32) ve (4.33) eşitlikleri kullanılarak, aşağıdaki toplam ve çarpım formülleri elde edilir

$$\prod_{k=1}^2 x_k^r = x_1^r x_2^r = \nu_2$$

ve

$$\sum_{k=1}^2 x_k^r = x_1^r + x_2^r = \psi_2.$$

$x_1^r = \frac{\nu_2}{x_2^r}$ olduğu bilindiğinden aşağıdaki ikinci dereceden denklem kolayca elde edilir:

$$x_2^{2r} - \psi_2 x_2^r + \nu_2 = 0.$$

Bu denklem çözülerek kökler kolayca bulunur. Böylece, $R_{m+p}^{(t)}(x)$ polinomunun kökleri (4.34) gibi olmalıdır.

$r=2$, $r=4$ ve $r=5$ için sırasıyla Fibonacci, Quadranacci ve 5-Bonacci polinomları elde edildiğinden bu polinomlar için sonuçlar tek tek verilir ve örneklendirilecek ve Teorem 2.1.4 kullanılarak bu sonuçlar Lucas polinomları için de uyarlanacaktır.

4.2.2.4 Sonuç: $p \in \{0, 1\}$ ve $t = 2n - 5 + p$ alındığında, $F_{2n+p}^{(t)}(x)$ polinomunun sıfır yerleri v_2 ve ψ_2 sırasıyla (4.32) ve (4.33) daki eşitlikler olmak üzere aşağıdaki gibi verilebilir:

$$x_k = \left(\frac{\psi_2 \pm \sqrt{\psi_2^2 - 4v_2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{k\pi i}, (k = 0, 1) \quad (4.35)$$

(2.27) eşitliğinde verilen $L_n^{(r+1)}(x)$ ve $F_n^{(t)}(x)$ polinomlarınının sıfır yerlerinin aynı olduğu bilindiğinden $p \in \{0, 1\}$ için $L_{2n+p}^{(r+1)}(x)$ polinomlarınının sıfır yerleri için de (4.35) eşitliğin geçerli olduğu açıktır.

Aşağıdaki sonuç, Tribonacci polinomlarınının türevlerinin bazı sınıflarınının sıfır yerleri için üç adımda elde edilen sonuçları tek sonuca indirgemektedir. Ayrıca Teorem 4.3.1.3 tüm R -Bonacci polinomlarınının türevlerinin sıfır yerlerini taradığı için daha geneldir.

4.2.2.5 Sonuç: $p \in \{0, 1, 2\}$ ve $t = 6n - 8 + 2p$ için $T_{3n+p}^{(t)}(x)$ 'nin sıfırları da, sırasıyla v_2 ve ψ_2 (4.32) ve (4.32) eşitliklerindeki gibi olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilir

$$x_k = \left(\frac{\psi_2 \pm \sqrt{\psi_2^2 - 4v_2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2k\pi i}{3}}, (k = 0, 1, 2) \quad (4.36)$$

$r=4$ ve $r=5$ için elde edilen Quaronacci ve 5-Bonacci polinomlarınının türevlerinin sıfır yerleri de (4.34) nolu eşitlikteki gibidir. Tek farkı

$\left(\frac{\psi_2 \pm \sqrt{\psi_2^2 - 4\nu_2}}{2} \right)$ ifadesinin sırasıyla derecesinin $1/4$, $1/5$ ve $e^{\frac{k\pi i}{2}}$, $e^{\frac{2k\pi i}{5}}$ dönme

farkının olmasıdır. Bu nedenle Quadranacci ve 5-Bonacci polinomları için sonuçlar tekrarlanmayıp örnek verilecektir.

4.2.2.6 Örnek: $p = n = 2$ ve $r = 4$ için aşağıdaki Quadranacci türev polinomu

elde edilir: $Q_8^{(13)}(x) = 93405312000 + 88921857024000x^4 + 1267136462592000x^8$.

(4.32) ve (4.33) nolu eşitlikler kullanılarak

$$\prod_{k=1}^2 x_k^4 = \binom{5}{2}_4 \frac{\sigma(1,13)}{\sigma(9,13)} = \frac{1}{13566} = \nu_2$$

$$\sum_{k=1}^2 x_k^4 = -\binom{6}{1}_4 \frac{\sigma(5,13)}{\sigma(9,13)} = -\frac{4}{57} = \psi_2$$

elde edilir. (4.34) nolu eşitlik kullanılarak, $Q_8^{(13)}(x)$ polinomunun kökleri

$k = 0$ için,

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{-\frac{4}{57} + \sqrt{\left(-\frac{4}{57}\right)^2 - \frac{4}{13566}}}{2}} = 0.127788 + 0.127788i$$

ve

$$x_2 = \sqrt[4]{\frac{-\frac{4}{57} - \sqrt{\left(-\frac{4}{57}\right)^2 - \frac{4}{13566}}}{2}} = 0.36255 + 0.36255i;$$

$k = 1$ için

$$x_3 = \sqrt[4]{\frac{-\frac{4}{57} + \sqrt{\left(-\frac{4}{57}\right)^2 - \frac{4}{13566}}}{2}} e^{\frac{\pi i}{2}} = -0.36255 + 0.36255i$$

ve

$$x_4 = \sqrt[4]{\frac{-\frac{4}{57} - \sqrt{\left(-\frac{4}{57}\right)^2 - \frac{4}{13566}}}{2}} e^{\frac{\pi i}{2}} = -0.127788 + 0.127788i;$$

$k = 2$ için

$$x_5 = \sqrt[4]{\frac{-\frac{4}{57} + \sqrt{\left(-\frac{4}{57}\right)^2 - \frac{4}{13566}}}{2}} e^{\pi i} = -0.127788 - 0.127788i$$

ve

$$x_6 = \sqrt[4]{\frac{-\frac{4}{57} - \sqrt{\left(-\frac{4}{57}\right)^2 - \frac{4}{13566}}}{2}} e^{\pi i} = -0.36255 - 0.36255i;$$

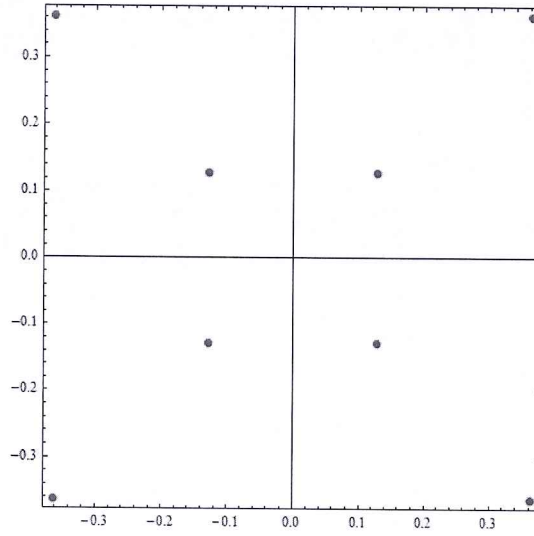
$k = 3$ için

$$x_7 = \sqrt[4]{\frac{-\frac{4}{57} + \sqrt{\left(-\frac{4}{57}\right)^2 - \frac{4}{13566}}}{2}} e^{\frac{3\pi i}{2}} = 0.127788 - 0.127788i$$

ve

$$x_8 = \sqrt[4]{\frac{-\frac{4}{57} - \sqrt{\left(-\frac{4}{57}\right)^2 - \frac{4}{13566}}}{2}} e^{\frac{3\pi i}{2}} = 0.36255 - 0.36255i$$

olarak elde edilir.



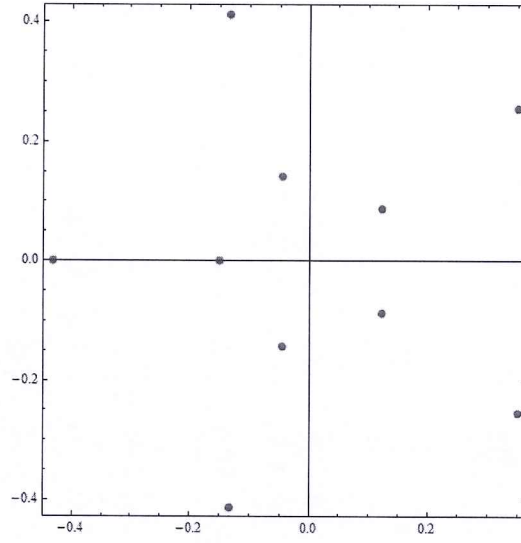
Şekil 4.9: $Q_8^{(13)}(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri

4.2.2.7 Örnek: Sekizinci 5-Bonacci polinomunun 18. mertebeden türev polinomu düşünüldüğünde $p = 3$, $n = 1$ ve $r = 5$ olduğundan aşağıdaki onuncu dereceden polinom elde edilir:

$$B_8^{(18)}(x) = 96035605585920000 + 1292600836944248832000x^5 + 84019054401376174080000x^{10}.$$

Bu polinomun sıfır yerleri (4.34) yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$x_k = \sqrt[5]{\frac{\psi_2 \pm \sqrt{\psi_2^2 - 4\nu_2}}{2}} e^{\frac{2k\pi i}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (4.37)$$



Şekil 4.9: $B_8^{(18)}(x)$ Polinomunun Sıfır Yerleri

Yukarıdaki örneklerden de incelenebileceği üzere (4.34) nolu formülüzasyon tüm R – Bonacci polinomlarını taramaktadır. Fakat sadece belli tipteki türev polinomların sıfır yerlerinin elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Bu sebeple (4.34) nolu eşitliğin çalışmadığı türev polinomlarında önceki bölümde elde edilen \mathfrak{R}_4 halka bölgesi kullanılabilir. Sonuç olarak bu bölümde belli türev polinomları için formülüzasyon diğerleri için de polinomun sıfırlarını barındıran disk belirlenmiş olur.

4.2.2.8 Örnek: $n = 5$ ve $t = 28$ için

$$a_0 = 36586601353405663260180480000000,$$

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0,$$

$$a_3 = 21927569744474460847268167680000000$$

ve

$$a_6 = 410045554221672417843914735616000000$$

olmak üzere $T_{18}^{(28)}(x) = a_0 + a_3x^3 + a_6x^6$ polinomunun sıfır yerleri için aşağıdaki

hesaplamalar yapılabilir:

$$k=3 \text{ için } \left\{ \frac{F_3}{F_8-1} \left| \frac{a_0}{a_3} \right. \right\}^{\frac{1}{3}} = 0.0550525$$

ve

$$k=6 \text{ için } \left\{ \frac{F_6}{F_8-1} \left| \frac{a_0}{a_6} \right. \right\}^{\frac{1}{6}} = 0.181451$$

olduğundan, $r_1 = \min_{1 \leq k \leq 6} \left\{ \frac{F_k}{F_{n+2}-1} \left| \frac{a_0}{a_k} \right. \right\}^{\frac{1}{k}} = 0.0550525$ elde edilir.

Benzer şekilde $T_{18}^{(28)}(x)$ Tribonacci türev polinomunun sıfır yerlerini içeren üst sınır,

$$k=1 \text{ için } \left\{ \frac{F_8-1}{F_1} \left| \frac{a_{6-1}}{a_6} \right. \right\} = 0,$$

$$k=2 \text{ için } \left\{ \frac{F_8-1}{F_2} \left| \frac{a_{6-2}}{a_6} \right. \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$k=3 \text{ için } \left\{ \frac{F_8-1}{F_3} \left| \frac{a_{6-3}}{a_6} \right. \right\}^{\frac{1}{3}} = 0.811682$$

ve benzer şekilde $k=4$ ve $k=5$ için bu değerler 0 olacaktır. Son olarak

$$k=6 \text{ için } \left\{ \frac{F_8-1}{F_6} \left| \frac{a_{6-6}}{a_6} \right. \right\}^{\frac{1}{3}} = 0.246266$$

bulunacağından $r_2 = \max_{1 \leq k \leq 6} \left\{ \frac{F_{n+2}-1}{F_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right. \right\}^{\frac{1}{k}} = 0.811682$ sınırı elde edilir.

Buna göre $\mathfrak{R}_4 = \{z \in \mathbb{C} : 0.0550525 \leq |z| \leq 0.811682\}$ halka bölgesi gerçekten $T_{18}^{(28)}(x)$ polinomunun sıfır yerleri olan

$$\begin{aligned}x_1 &= -0.372656, x_2 = -0.11991, \\x_{3,4} &= 0.0599549 \pm 0.103845i \\x_{5,6} &= 0.186328 \pm 0.32273i\end{aligned}$$

noktalarını içerir. Böylece $T_{18}^{(28)}(x)$ polinomu sıfırları formülize edilemeyen bir polinom olsa da sıfır yerlerini içeren halka bölge elde edildi. Bu şekilde geriye kalan tüm R – Bonacci türev polinomları için sıfırları içeren halka bölgeler elde edilebilmektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

R -Bonacci polinomları ve türevlerinin sıfır yerlerinin incelendiği bu tezde öncelikle R -Bonacci polinomlarının simetrik polinomları elde edilmiş ve bu polinomlar yardımıyla bu polinomların bazı sınıflarının sıfır yerleri bulunmuştur. R -Bonacci polinomlarının sıfırları için sadece $n=1$ durumunda referans nokta yardımıyla tüm sıfır yerlerinin üretilebilmesi sağlanmıştır. Genel bir polinomun köklerini bulduran yeni halka bölge elde edilmiştir. Literatürde bilinen bölgeler yeni bölgelerle kıyaslanmış ve yeni halka bölgelerin daha ince olduğu belirlenmiştir. Diğer yandan karakteristik polinomu R -Bonacci polinomunu veren matristen faydalanılarak bu polinomun sıfır yerlerini barındıran Gershgorin çemberleri elde edilmiştir. Dolayısıyla R -Bonacci polinomlarının sıfır yerleri için elde edilen yeni halka bölge ile birlikte Gershgorin çemberleri kıyaslanmış, hangi yöntemin hangi durumlarda daha geçerli olduğuna dair bazı yorumlar yapılmıştır.

R -Bonacci polinomlarının türevlerinin sıfır yerlerini incelerken farklı bir metot kullanılarak öncelikle Fibonacci polinomlarının birinci mertebeden türevlerinin sıfır yerlerini veren eşitlik elde edilmiş örneklerle incelenip sonuçlar ikinci mertebeden Lucas polinomları için de uyarlanmıştır. Diğer yandan Lucas polinomlarının sıfır yerlerini Fibonacci polinomlarının sıfır yerlerine resmeden fonksiyonlar ve sıfırları resmetme sıraları incelenmiştir. R -Bonacci polinomlarının türev polinomlarının sıfır yerlerini elde etmek için simetrik polinomlar bulunmuştur. Elde edilen bu simetrik polinomlar yardımıyla formülüzasyon bazı tipteki R -Bonacci polinomları için sağlanmıştır. Diğer türev polinomları için ise elde ettiğimiz yeni sınırlar kullanılmıştır.

6. EKLER

$$E_2(x) = x$$

$$E_3(x) = 1 + x^2$$

$$E_4(x) = 2x + x^3$$

$$E_5(x) = 1 + 3x^2 + x^4$$

$$E_6(x) = 3x + 4x^3 + x^5$$

$$E_7(x) = 1 + 6x^2 + 5x^4 + x^6$$

$$E_8(x) = 4x + 10x^3 + 6x^5 + x^7$$

$$E_9(x) = 1 + 10x^2 + 15x^4 + 7x^6 + x^8$$

$$E_{10}(x) = 5x + 20x^3 + 21x^5 + 8x^7 + x^9$$

$$E_{11}(x) = 1 + 15x^2 + 35x^4 + 28x^6 + 9x^8 + x^{10}$$

$$E_{12}(x) = 6x + 35x^3 + 56x^5 + 36x^7 + 10x^9 + x^{11}$$

$$E_{13}(x) = 1 + 21x^2 + 70x^4 + 84x^6 + 45x^8 + 11x^{10} + x^{12}$$

$$E_{14}(x) = 7x + 56x^3 + 126x^5 + 120x^7 + 55x^9 + 12x^{11} + x^{13}$$

$$E_{15}(x) = 1 + 28x^2 + 126x^4 + 210x^6 + 165x^8 + 66x^{10} + 13x^{12} + x^{14}$$

$$E_{16}(x) = 8x + 84x^3 + 252x^5 + 330x^7 + 220x^9 + 78x^{11} + 14x^{13} + x^{15}$$

$$E_{17}(x) = 1 + 36x^2 + 210x^4 + 462x^6 + 495x^8 + 286x^{10} + 91x^{12} + 15x^{14} + x^{16}$$

$$E_{18}(x) = 9x + 120x^3 + 462x^5 + 792x^7 + 715x^9 + 364x^{11} + 105x^{13} + 16x^{15} + x^{17}$$

$$E_{19}(x) = 1 + 45x^2 + 330x^4 + 924x^6 + 1287x^8 + 1001x^{10} + 455x^{12} + 120x^{14} + 17x^{16} + x^{18}$$

$$E_{20}(x) = 2 + 10x + 165x^3 + 792x^5 + 1716x^7 + 2002x^9 + 1365x^{11} + 560x^{13} + 136x^{15} + 18x^{17} + x^{19}$$

$$E_{21}(x) = 1 + 55x^2 + 495x^4 + 1716x^6 + 3003x^8 + 3003x^{10} + 1820x^{12} + 680x^{14} + 153x^{16} + 19x^{18} + x^{20}$$

$$E_{22}(x) = 11x + 220x^3 + 1287x^5 + 3432x^7 + 5005x^9 + 4368x^{11} + 2380x^{13} + 816x^{15} + 171x^{17} + 20x^{19} + x^{21}$$

$$E_{23}(x) = 1 + 66x^2 + 715x^4 + 3003x^6 + 6435x^8 + 8008x^{10} + 6188x^{12} + 3060x^{14} + 969x^{16} + 190x^{18} + 21x^{20} + x^{22}$$

$$E_{24}(x) = 12x + 286x^3 + 2002x^5 + 6435x^7 + 11440x^9 + 12376x^{11} + 8568x^{13} + 3876x^{15} + 1140x^{17} + 210x^{19} + 22x^{21} + x^{23}$$

$$E_{25}(x) = 1 + 78x^2 + 1001x^4 + 5005x^6 + 12870x^8 + 19448x^{10} + 18564x^{12} + 11628x^{14} + 4845x^{16} + 1330x^{18} + 231x^{20} + 23x^{22} + x^{24}$$

$$E_{26}(x) = 13x + 364x^3 + 3003x^5 + 11440x^7 + 24310x^9 + 31824x^{11} + 27132x^{13} + 15504x^{15} + 5985x^{17} + 1540x^{19} + 253x^{21} + 24x^{23} + x^{25}$$

$$E_{27}(x) = 1 + 91x^2 + 1365x^4 + 8008x^6 + 24310x^8 + 43758x^{10} + 50388x^{12} + 38760x^{14} + 20349x^{16} + 7315x^{18} + 1771x^{20} + 276x^{22} + 25x^{24} + x^{26}$$

$$E_{28}(x) = 14x + 455x^3 + 4368x^5 + 19448x^7 + 48620x^9 + 75582x^{11} + 77520x^{13} + 54264x^{15} + 26334x^{17} + 8855x^{19} + 2024x^{21} + 300x^{23} + 26x^{25} + x^{27}$$

$$E_{29}(x) = 51 + 105x^2 + 1820x^4 + 12376x^6 + 43758x^8 + 92378x^{10} + 125970x^{12} + 116280x^{14} + 74613x^{16} + 33649x^{18} + 10626x^{20} + 2300x^{22} + 325x^{24} + 27x^{26} + x^{28}$$

$$E_{30}(x) = 15x + 560x^3 + 6188x^5 + 31824x^7 + 92378x^9 + 167960x^{11} + 203490x^{13} + 170544x^{15} + 100947x^{17} + 42504x^{19} + 12650x^{21} + 2600x^{23} + 351x^{25} + 28x^{27} + x^{29}$$

Ek 6.1: İlk 30 Fibonacci Polinomu

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= x \\
L_2(x) &= 2 + x^2 \\
L_3(x) &= 3x + x^3 \\
L_4(x) &= 2 + 4x^2 + x^4 \\
L_5(x) &= 5x + 5x^3 + x^5 \\
L_6(x) &= 2 - 9x^2 + 6x^4 + x^6 \\
L_7(x) &= 7x + 14x^3 + 7x^5 + x^7 \\
L_8(x) &= 2 + 16x^2 + 20x^4 + 8x^6 + x^8 \\
L_9(x) &= 9x + 30x^3 + 27x^5 + 9x^7 + x^9 \\
L_{10}(x) &= 2 + 25x^2 + 50x^4 + 35x^6 + 10x^8 + x^{10} \\
L_{11}(x) &= 11x + 55x^3 + 77x^5 + 44x^7 + 11x^9 + x^{11} \\
L_{12}(x) &= 2 + 36x^2 + 105x^4 + 112x^6 + 54x^8 + 12x^{10} + x^{12} \\
L_{13}(x) &= 13x + 91x^3 + 182x^5 + 156x^7 + 65x^9 + 13x^{11} + x^{13} \\
L_{14}(x) &= 2 + 49x^2 + 196x^4 + 294x^6 + 210x^8 + 77x^{10} + 14x^{12} + x^{14} \\
L_{15}(x) &= 15x + 140x^3 + 378x^5 + 450x^7 + 275x^9 + 90x^{11} + 15x^{13} + x^{15} \\
L_{16}(x) &= 2 + 64x^2 + 336x^4 + 672x^6 + 660x^8 + 352x^{10} + 104x^{12} + 16x^{14} + x^{16} \\
L_{17}(x) &= 17x + 204x^3 + 714x^5 + 1122x^7 + 935x^9 + 442x^{11} + 119x^{13} + 17x^{15} + x^{17} \\
L_{18}(x) &= 2 + 81x^2 + 540x^4 + 1386x^6 + 1782x^8 + 1287x^{10} - 546x^{12} + 135x^{14} + 18x^{16} + x^{18} \\
L_{19}(x) &= 19x + 285x^3 + 1254x^5 + 2508x^7 + 2717x^9 + 1729x^{11} + 665x^{13} + 152x^{15} + 19x^{17} + x^{19} \\
L_{20}(x) &= 2 + 100x^2 + 825x^4 + 2640x^6 + 4290x^8 + 4004x^{10} + 2275x^{12} + 800x^{14} + 170x^{16} + 20x^{18} + x^{20} \\
L_{21}(x) &= 21x + 385x^3 + 2079x^5 + 5148x^7 + 7007x^9 + 5733x^{11} + 2940x^{13} + 952x^{15} + 189x^{17} + 21x^{19} + x^{21} \\
L_{22}(x) &= 2 + 121x^2 + 1210x^4 + 4719x^6 + 9438x^8 + 11011x^{10} + 8008x^{12} + 3740x^{14} - 1122x^{16} + 209x^{18} + 22x^{20} + x^{22} \\
L_{23}(x) &= 23x + 506x^3 + 3289x^5 + 9867x^7 + 16445x^9 + 16744x^{11} + 10948x^{13} + 4692x^{15} + 1311x^{17} + 230x^{19} + 23x^{21} + x^{23} \\
L_{24}(x) &= 2 + 144x^2 + 1716x^4 + 8008x^6 + 19305x^8 + 27456x^{10} + 24752x^{12} + 14688x^{14} + 5814x^{16} + 1520x^{18} + 252x^{20} + 24x^{22} + x^{24} \\
L_{25}(x) &= 25x + 650x^3 + 5005x^5 + 17875x^7 + 35750x^9 + 44200x^{11} + 35700x^{13} + 19380x^{15} + 7125x^{17} + 1750x^{19} + 275x^{21} + 25x^{23} + x^{25} \\
L_{26}(x) &= 2 + 169x^2 + 2366x^4 + 13013x^6 + 37180x^8 + 63206x^{10} + 68952x^{12} + 50388x^{14} + 25194x^{16} + 8645x^{18} + 2002x^{20} + 299x^{22} + 26x^{24} + x^{26} \\
L_{27}(x) &= 27x + 819x^3 + 7371x^5 + 30888x^7 + 72930x^9 + 107406x^{11} + 104652x^{13} + 69768x^{15} + 32319x^{17} + 10395x^{19} + 2277x^{21} + 324x^{23} + 27x^{25} + x^{27} \\
L_{28}(x) &= 2 + 196x^2 + 3185x^4 + 20384x^6 + 68068x^8 + 136136x^{10} + 176358x^{12} + 155040x^{14} + 94962x^{16} + 40964x^{18} + 12397x^{20} + 2576x^{22} + 350x^{24} + 28x^{26} + x^{28} \\
L_{29}(x) &= 29x + 1015x^3 + 10556x^5 + 51272x^7 + 140998x^9 + 243542x^{11} + 281010x^{13} + 224808x^{15} + 127281x^{17} + 51359x^{19} + 14674x^{21} + 2900x^{23} + 377x^{25} + 29x^{27} + x^{29} \\
L_{30}(x) &= 2 + 225x^2 + 4200x^4 + 30940x^6 + 119340x^8 + 277134x^{10} + \\
&\quad 419900x^{12} + 436050x^{14} + 319770x^{16} + 168245x^{18} + 63756x^{20} + 17250x^{22} + 3250x^{24} + 405x^{26} + 30x^{28} + x^{30}
\end{aligned}$$

Ek 6.2: İlk 30 Lucas Polinomu

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= x^2 \\
T_3(x) &= x + x^4 \\
T_4(x) &= 1 + 2x^3 + x^6 \\
T_5(x) &= 3x^2 + 3x^5 + x^8 \\
T_6(x) &= 2x + 6x^4 + 4x^7 + x^{10} \\
T_7(x) &= 1 + 7x^3 + 10x^6 + 5x^9 + x^{12} \\
T_8(x) &= 6x^2 + 16x^5 + 15x^8 + 6x^{11} + x^{14} \\
T_9(x) &= 3x + 19x^4 + 30x^7 + 21x^{10} + 7x^{13} + x^{16} \\
T_{10}(x) &= 1 + 16x^3 + 45x^6 + 50x^9 + 28x^{12} + 8x^{15} + x^{18} \\
T_{11}(x) &= 10x^2 + 51x^5 + 90x^8 + 77x^{11} + 36x^{14} + 9x^{17} + x^{20} \\
T_{12}(x) &= 4x + 45x^4 + 126x^7 + 161x^{10} + 112x^{13} + 45x^{16} + 10x^{19} + x^{22} \\
T_{13}(x) &= 1 + 30x^3 + 141x^6 + 266x^9 + 266x^{12} + 156x^{15} + 55x^{18} + 11x^{21} + x^{24} \\
T_{14}(x) &= 15x^2 + 126x^5 + 357x^8 + 504x^{11} + 414x^{14} + 210x^{17} + 66x^{20} + 12x^{23} + x^{26} \\
T_{15}(x) &= 5x + 90x^4 + 393x^7 + 784x^{10} + 882x^{13} + 615x^{16} + 275x^{19} + 78x^{22} + 13x^{25} + x^{28} \\
T_{16}(x) &= 1 + 50x^3 + 357x^6 + 1016x^9 + 1554x^{12} + 1452x^{15} + 880x^{18} + 352x^{21} + 91x^{24} + 14x^{27} + x^{30} \\
T_{17}(x) &= 21x^2 + 266x^5 + 1107x^8 + 2304x^{11} + 2850x^{14} + 2277x^{17} + 1221x^{20} + 442x^{23} + 105x^{26} + 15x^{29} + x^{32} \\
T_{18}(x) &= 6x + 161x^4 + 1016x^7 + 2907x^{10} + 4740x^{13} + 4917x^{16} + 3432x^{19} + 1651x^{22} + 546x^{25} + 120x^{28} + 16x^{31} + x^{34} \\
T_{19}(x) &= 1 + 77x^3 + 784x^6 + 3139x^9 + 6765x^{12} + 9042x^{15} + 8074x^{18} + 5005x^{21} + 2184x^{24} + 665x^{27} + 136x^{30} + 17x^{33} + x^{36} \\
T_{20}(x) &= 28x^2 + 504x^5 + 2907x^8 + 8350x^{11} + 14355x^{14} + 16236x^{17} + 12727x^{20} + 7098x^{23} + 2835x^{26} + 800x^{29} + 153x^{32} + 18x^{35} + x^{38} \\
T_{21}(x) &= 7x + 266x^4 + 2304x^7 + 8953x^{10} + 19855x^{13} + 28314x^{16} + 27742x^{19} + 19383x^{22} + 9828x^{25} + 3620x^{28} + 952x^{31} + 171x^{34} + 19x^{37} + x^{40} \\
T_{22}(x) &= 1 + 112x^3 + 1554x^6 + 8350x^9 + 24068x^{12} + 43252x^{15} + 52624x^{18} + 45474x^{21} + 28665x^{24} + 13328x^{27} + 4556x^{30} + 1122x^{33} + 190x^{36} + 20x^{39} + x^{42} \\
T_{23}(x) &= 36x^2 + 882x^5 + 6765x^8 + 25653x^{11} + 58278x^{14} + 87802x^{17} + 93093x^{20} + 71955x^{23} + 41328x^{26} + 17748x^{29} + 5661x^{32} + 1311x^{35} + 210x^{38} + 21x^{41} + x^{44} \\
T_{24}(x) &= 8x + 414x^4 + 4740x^7 + 24068x^{10} + 69576x^{13} + 129844x^{16} + \\
&\quad 168168x^{19} + 157950x^{22} + 110448x^{25} + 58276x^{28} + 23256x^{31} + 6954x^{34} + 1520x^{37} + 231x^{40} + 22x^{43} + x^{46} \\
T_{25}(x) &= 1 + 156x^3 + 2850x^6 + 19855x^9 + 73789x^{12} + 171106x^{15} + 270270x^{18} + 306735x^{21} + 258570x^{24} + \\
&\quad 165104x^{27} + 80580x^{30} + 30039x^{33} + 8455x^{36} + 1750x^{39} + 253x^{42} + 23x^{45} + x^{48} \\
T_{26}(x) &= 45x^2 + 1452x^5 + 14355x^8 + 69576x^{11} + 201643x^{14} + 388752x^{17} + 531531x^{20} + 536640x^{23} + 410346x^{26} + \\
&\quad 241128x^{29} + 109497x^{32} + 38304x^{35} + 10185x^{38} + 2002x^{41} + 276x^{44} + 24x^{47} + x^{50} \\
T_{27}(x) &= 9x + 615x^4 + 9042x^7 + 58278x^{10} + 212941x^{13} + 502593x^{16} + 827190x^{19} + 996216x^{22} + 905658x^{25} + \\
&\quad 633726x^{28} + 344964x^{31} + 146490x^{34} + 48279x^{37} + 12166x^{40} + 2277x^{43} + 300x^{46} + 25x^{49} + x^{52} \\
T_{28}(x) &= 1 + 210x^3 + 4917x^6 + 43252x^9 + 201643x^{12} + 585690x^{15} + 1161615x^{18} + 1665456x^{21} + 1791426x^{24} + \\
&\quad 1481108x^{27} + 955434x^{30} + 484500x^{33} + 193249x^{36} + 60214x^{39} + 14421x^{42} + 2576x^{45} + 325x^{48} + 26x^{51} + x^{54} \\
T_{29}(x) &= 55x^2 + 2277x^5 + 28314x^8 + 171106x^{11} + 616227x^{14} + 1477035x^{17} + 2520336x^{20} + 3198312x^{23} + 3107430x^{26} + \\
&\quad 2355962x^{29} + 1409895x^{32} + 669294x^{35} + 251713x^{38} + 74382x^{41} + 16974x^{44} + 2900x^{47} + 351x^{50} + 27x^{53} + x^{56} \\
T_{30}(x) &= 10x + 880x^4 + 16236x^7 + 129844x^{10} + 585690x^{13} + 1704510x^{16} + 3465840x^{19} + 5182008x^{22} + 5895396x^{25} + 5222264x^{28} + \\
&\quad 3656360x^{31} + 2040885x^{34} + 91822x^{37} + 324093x^{40} + 91080x^{43} + 19850x^{46} + 3250x^{49} + 378x^{52} + 28x^{55} + x^{58}
\end{aligned}$$

Ek 6.3: İlk 30 Tribonacci Polinomu

$$Q_2(x) = x^3$$

$$Q_3(x) = x^2 + x^6$$

$$Q_4(x) = x + 2x^5 + x^9$$

$$Q_5(x) = 1 + 3x^4 + 3x^8 + x^{12}$$

$$Q_6(x) = 4x^3 + 6x^7 + 4x^{11} + x^{15}$$

$$Q_7(x) = 3x^2 + 10x^6 + 10x^{10} + 5x^{14} + x^{18}$$

$$Q_8(x) = 2x + 12x^5 + 20x^9 + 15x^{13} + 6x^{17} + x^{21}$$

$$Q_9(x) = 1 + 12x^4 + 31x^8 + 35x^{12} + 21x^{16} + 7x^{20} + x^{24}$$

$$Q_{10}(x) = 10x^3 + 40x^7 + 65x^{11} + 56x^{15} + 28x^{19} + 8x^{23} + x^{27}$$

$$Q_{11}(x) = 6x^2 + 44x^6 + 101x^{10} + 120x^{14} + 84x^{18} + 36x^{22} + 9x^{26} + x^{30}$$

$$Q_{12}(x) = 3x + 40x^5 + 135x^9 + 216x^{13} + 203x^{17} + 120x^{21} + 45x^{25} + 10x^{29} + x^{33}$$

$$Q_{13}(x) = 1 + 31x^4 + 155x^8 + 336x^{12} + 413x^{16} + 322x^{20} + 165x^{24} + 55x^{28} + 11x^{32} + x^{36}$$

$$Q_{14}(x) = 20x^3 + 155x^7 + 456x^{11} + 728x^{15} + 728x^{19} + 486x^{23} + 220x^{27} + 66x^{31} + 12x^{35} + x^{39}$$

$$Q_{15}(x) = 10x^2 + 135x^6 + 546x^{10} + 1128x^{14} + 1428x^{18} + 1206x^{22} + 705x^{26} + 286x^{30} + 78x^{34} + 13x^{38} + x^{42}$$

$$Q_{16}(x) = 4x + 101x^5 + 580x^9 + 1554x^{13} + 2472x^{17} + 2598x^{21} + 1902x^{25} + 990x^{29} + 364x^{33} + 91x^{37} + 14x^{41} + x^{45}$$

$$Q_{17}(x) = 1 + 65x^4 + 546x^8 + 1918x^{12} + 3823x^{16} + 4950x^{20} + 4455x^{24} + 2882x^{28} + 1353x^{32} + 455x^{36} + 105x^{40} + 15x^{44} + x^{48}$$

$$Q_{18}(x) = 35x^3 + 456x^7 + 2128x^{11} + 5328x^{15} + 8451x^{19} + 9240x^{23} + 7282x^{27} + 4224x^{31} + 1807x^{35} + 560x^{39} + 120x^{43} + 16x^{47} + x^{51}$$

$$Q_{19}(x) = 15x^2 + 336x^6 + 2128x^{10} + 6728x^{14} + 13051x^{18} + 17205x^{22} + 16302x^{26} + 11440x^{30} + 6019x^{34} + 2366x^{38} + 680x^{42} + 136x^{46} + 17x^{50} + x^{54}$$

$$Q_{20}(x) = 5x + 216x^5 + 1918x^9 + 7728x^{13} + 18351x^{17} + 29050x^{21} + 32802x^{25} + 27456x^{29} + 17381x^{33} + 8372x^{37} + 3045x^{41} + 816x^{45} + 153x^{49} + 18x^{53} + x^{57}$$

$$Q_{21}(x) = 1 + 120x^4 + 1554x^8 + 8092x^{12} + 23607x^{16} + 44803x^{20} + 59950x^{24} + 59268x^{28} + 44473x^{32} + 25662x^{36} + 11403x^{40} + 3860x^{44} + 969x^{48} + 171x^{52} + 19x^{56} + x^{60}$$

$$Q_{22}(x) = 56x^3 + 1128x^7 + 7728x^{11} + 27876x^{15} + 63460x^{19} + 100298x^{23} + 116336x^{27} + 102388x^{31} + 69680x^{35} + 36960x^{39} + 15248x^{43} + 4828x^{47} + 1140x^{51} + 190x^{55} + 20x^{59} + x^{63}$$

$$Q_{23}(x) = 21x^2 + 728x^6 + 6728x^{10} + 30276x^{14} + 82885x^{18} + 154518x^{22} + 209352x^{26} + 214500x^{30} + 170261x^{34} + 106080x^{38} + 52088x^{42} + 20060x^{46} + 5967x^{50} + 1330x^{54} + 210x^{58} + 21x^{62} + x^{66}$$

$$Q_{24}(x) = 6x + 413x^5 + 5328x^9 + 30276x^{13} + 100110x^{17} + 220198x^{21} + 347568x^{25} + 412412x^{29} + 378742x^{33} + 273975x^{37} + 157488x^{41} + 72012x^{45} + 26010x^{49} + 7296x^{53} + 1540x^{57} + 231x^{61} + 22x^{65} + x^{69}$$

$$Q_{25}(x) = 1 + 203x^4 + 3823x^8 + 27876x^{12} + 112035x^{16} + 291258x^{20} + 534964x^{24} + 732524x^{28} + 773773x^{32} + 644345x^{36} + 428418x^{40} + 228684x^{44} + 97869x^{48} + 33288x^{52} + 8835x^{56} + 1771x^{60} + 253x^{64} + 23x^{68} + x^{72}$$

$$Q_{26}(x) = 84x^3 + 2472x^7 + 23607x^{11} + 116304x^{15} + 358490x^{19} + 766272x^{23} + 1208220x^{27} + 1461824x^{31} + 1392456x^{35} + 1061360x^{39} + 653242x^{43} + 325584x^{47} + 130986x^{51} + 42104x^{55} + 10605x^{59} + 2024x^{63} + 276x^{67} + 24x^{71} + x^{75}$$

$$Q_{27}(x) = 28x^2 + 1428x^6 + 18351x^{10} + 112035x^{14} + 411334x^{18} + 1024464x^{22} + 1858156x^{26} + 2567656x^{30} + 2784600x^{34} + 2416856x^{38} + 1699354x^{42} + 973998x^{46} + 455430x^{50} + 172900x^{54} + 52689x^{58} + 12628x^{62} + 2300x^{66} + 300x^{70} + 25x^{74} + x^{78}$$

$$Q_{28}(x) = 7x + 728x^5 + 13051x^9 + 100110x^{13} + 440484x^{17} + 1281280x^{21} + 2673268x^{25} + 4211312x^{29} + 5181995x^{33} + 5095376x^{37} + 4064122x^{41} + 2653292x^{45} + 1423461x^{49} + 627000x^{53} + 225379x^{57} + 65296x^{61} + 14927x^{65} + 2600x^{69} + 325x^{73} + 26x^{77} + x^{81}$$

$$Q_{29}(x) = 1 + 322x^4 + 8451x^8 + 82885x^{12} + 440484x^{16} + 1501566x^{20} + 3606980x^{24} + 6472168x^{28} + 9014565x^{32} + 10003396x^{36} + 9002010x^{40} + 6645402x^{44} + 4050743x^{48} + 2043165x^{52} + 850839x^{56} + 290444x^{60} + 80201x^{64} + 17526x^{68} + 2925x^{72} + 351x^{76} + 27x^{80} + x^{84}$$

$$Q_{30}(x) = 120x^3 + 4950x^7 + 63460x^{11} + 411334x^{15} + 1650792x^{19} + 4573582x^{23} + 9346624x^{27} + 14712960x^{31} + 18373616x^{35} + 18576988x^{39} + 15418728x^{43} + 10598276x^{47} + 6060620x^{51} + 2885169x^{55} + 1139512x^{59} + 370392x^{63} + 97704x^{67} + 20450x^{71} + 3276x^{75} + 378x^{79} + 28x^{83} + x^{87}$$

Ek 6.4: İlk 30 Quadronacci Polinomu

7. KAYNAKLAR

- [1] Bösel, T. M., "The History of Polynomial Equations", <http://vimagic.de/hope/>.
- [2] Wolfram Library Archive, "A Short History", <http://library.wolfram.com/examples/quintic/timeline.html>.
- [3] Spinadel, V. W., "The metallic means and design", Nexus II: Architecture and Mathematics, (1998).
- [4] Spinadel, V.W., "The family of metallic means", Vis Math, Available from: <http://members.tripod.com/vismath/>, (1999).
- [5] Spinadel, V.W., "The metallic means family and forbidden symmetries", Int Math J, 279–88, (2002).
- [6] Brousseau, A., "Fibonacci statistics in conifers", Fibonacci Quarterly, 525–32, (1969).
- [7] Carson, J., "Fibonacci numbers and pineapple phyllotaxy the two-year", Coll Math J, 132–6, (1978).
- [8] Caspar, D. and Fontano, E., "Five-fold symmetry in crystalline quasicrystal lattices", Proc Nat Acad Sci, 93, (1996).
- [9] Greller, A.M. and Matzke, E. B., "Organogenesis, aestivation, and thesis in the flower of *Lilium tigrinum*", Bot Gaz, 11, (1970).
- [10] Kirchoff, B.K. and Rutishauser, R., "The phyllotaxy of costus (Costaceae)", Bot Gaz, 88–105, (1990).
- [11] Mitchison, G. J., "Phyllotaxis and the Fibonacci series", Sci, New Ser, 270–5, (1977).
- [12] Onderdonk, P. B., "Pineapples and Fibonacci numbers", Fibonacci Quarterly, 507–8, (1979).
- [13] Stein, W., "Modeling the evolution of stelar architecture in vascular plants", Int J Plant Sci, 229–63, (1993).
- [14] El Naschie, M. S., "Topological defects in the symmetric vacuum, anomalous positron production and the gravitational instanton", IntJ Mod Phys, 835–49, (2004).

- [15] Moore, G. A., "The Limit of Golden Numbers Is $3/2$ ", *The Fibonacci Quarterly*, 32, 211-17, (1994).
- [16] Prodinge, H., "The Asymptotic Behaviour of Golden Numbers", *The Fibonacci Quarterly*, 34, 224-225, (1996).
- [17] El Naschie M. S., "Experimental and theoretical arguments for the number and mass of the Higgs particles.", *Chaos, Solitons & Fractals*, 8, (2005).
- [18] McNamee, J. M., "Numerical methods for roots of polynomials", Part I. *Studies in Computational Mathematics*, 14, *Elsevier B. V.*, ISBN: 978-0-444-52729-5, (2007).
- [19] Bicknell, M. and Hoggatt, V.E., Jr., "Roots of Fibonacci polynomials", *Fibonacci Quarterly*, 11, 271-274, (1973).
- [20] Webb, W. A. and Parberry, E. A., "Divisibility properties of Fibonacci polynomials", *Fibonacci Quarterly*, 7, 457-463, (1969).
- [21] Yuan, Y. and Wenpeng, Z., "Some identities involving the Fibonacci polynomials", *Fibonacci Quarterly*, 40, 314-318, (2002).
- [22] Falc3n, S. and Plaza, 1., "On k -Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives", *Chaos Solitons Fractals*, 39, 1005-1019, (2009).
- [23] Nalli, A. and Haukkanen, P., "On generalized Fibonacci and Lucas polynomials", *Chaos Solitons Fractals*, 42, 3179-3186, (2009).
- [24] Amdeberhan, T., "A note on Fibonacci-type polynomials", *Integers*, 10, 13-18, (2010).
- [25] Andreas, N. P., Gerald, E. B. and Horadam A. F., "Fibonacci Numbers and Their Applications", D. Reidel Publishing Company, (1984).
- [26] Matyas, F., "Real roots of Fibonacci-like polynomials", *Number Theory*, 361-370, (1998).
- [27] Wang, Y. and He, M., "Zeros of a class of Fibonacci-type polynomials" *Fibonacci Quarterly*, 42, 341-347, (2004).
- [28] Matyas, F., "The Asymptotic Behavior of the Real Roots of Fibonacci-like Polynomials", *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.*, 55-61, (1997).
- [29] Matyas, F., "Bounds for the Zeros of Fibonacci-like Polynomials", *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.*, 25, 15-20, (1998).
- [30] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, New York, Pure and Applied Mathematics, 471, (2001).

- [31] Wang, J., "On the k th derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials", *Fibonacci Quarterly*, 33 no. 2, 174-178, (1995).
- [32] Bicknell, M. and Hoggatt, V.E., Jr., "Generalized Fibonacci polynomials", *Fibonacci Quarterly*, 16, 300-303, (1978).
- [33] He, M. X., Ricci, P. E. and Simon D., Numerical results on the zeros of generalized Fibonacci polynomials, *Calcolo*, 34, 25-40, (1997).
- [34] Goh, W., He, M. X. and Ricci, P. E., "On the universal Zero Attractor of the Tribonacci-related polynomials", *Calcolo*, 46, no. 2, 95-129, (2009).
- [35] Boyer, R., Goh, W., "On the Zero Attractor of the Euler polynomials", *Adv. Appl. Math.*, 38, 97-132, (2007).
- [36] Georgieva, N., "Distribution of the Zeros of One Class of Polynomials", *The Fibonacci Quarterly*, 13, 314, (1975).
- [37] Pólya, G. and Szegő, G., *Problems and theorems in analysis. II. (English summary) Theory of functions, zeros, polynomials, determinants, number theory, geometry*, Berlin, Springer-Verlag, (1998).
- [38] Iwaniec, H. and Kowalski, E., *Analytic number theory*, Rhode Island, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, (2004).
- [39] He, M. X., Simon, D., Ricci, P. E., "Dynamics of the zeros Fibonacci Polynomials", *Fibonacci Quarterly*, 35 no.2, 160-168, (1997).
- [40] Shurman, J., "Symmetric Polynomials", <http://people.reed.edu/~jerry/332/20sympoly.pdf>.
- [41] Cauchy, A. L., "Exercices de Mathematique in Oeuvres", vol. 9, (1829).
- [42] Gerschgorin, S., "Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix", *Izv. Akad. Nauk. USSR Otd. Fiz.-Mat. Nauk*, 6, 749-754, (1931).
- [43] Marden, M., "Geometry of Polynomials", *American Mathematical Society*, (1966).

- [44] Zeheb, E., "On the largest modulus of polynomial zeros," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 38, 333-337, (1991).
- [45] Mitrinovic, D., Milovanovic, G. and Rassias, T. M., "Topics in Polynomials: Extremal Problems", *Inequalities and Zeros*, World Scientific, (1994).
- [46] Rahman, Q. I., Schmeisser, G., "Analytic Theory of Polynomials", *Clarendon Press*, 26, (2002).
- [47] Diaz-Barrero, J.L., "An annulus for the zeros of polynomials", *J. Math. Anal. Appl.*, 273, 349-352, (2002).
- [48] Diaz-Barrero, J.L., Egozcue J.J., "Bounds for moduli of zeros", *Appl. Math. Lett.*, 17, 993-996, (2004).
- [49] Bidkham, M., Shashahani, E., "An annulus for the zeros of polynomials" *Appl. Math. Lett.*, 24, (2011).
- [50] Özgür, N. Y., Öztunç, Ö., "On the Zeros of R -Bonacci Polynomials", Submitted, (2014).
- [51] Özgür, N. Y., Öztunç, Ö., "On the Zeros of the Derivative of R -Bonacci Polynomials", Submitted, (2014).
- [52] Özgür, N. Y., Öztunç, Ö., "On the Some functions mapping the zeros of $L_n(x)$ to the zeros of $L'_n(x)$ ", Submitted, (2013).