

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

$H(\lambda_5)$ HECKE GRUBU VE BAZI ALT GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Asiye SALDIK

Balıkesir, Temmuz-2010

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$H(\lambda_5)$ HECKE GRUBU VE BAZI ALTGRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Asiye SALDIK

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Recep ŞAHİN

Sınav Tarihi: 05.07.2010

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Recep ŞAHİN (Danışman-BAÜ)

Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ (BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun tarih sayılı oturumunun
nolu kararı ile Mezun olmuştur.

Balıkesir, Temmuz-2010

ÖZET

$H(\lambda_5)$ HECKE GRUBU VE BAZI ALT GRUPLARI

Asiye SALDIK

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi/Tez Danışmanı: Doç. Dr. Recep ŞAHİN)

Balıkesir 2010

Bu tezde $H(\lambda_5)$ hecke grubu ve onun komütatör, kuvvet, denklik, temel denklik ve serbest normal alt grupları çalışılmıştır.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışma süresince gerekli olan temel tanımlar, kavramlar, yöntemler ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm çalışmanın ana kısmıdır. Önce, $H(\lambda_5)$ hecke grubu tanıtılmıştır. Sonra bu grubun temel bölgesi ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun kuvvet ve komütatör alt grupları, serbest normal alt grupları, denklik ve temel denklik alt grupları tanıtılmıştır. Son olarak bu alt grupların grup yapıları ve aralarındaki ilişkiler hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tezde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: $H(\lambda_5)$ hecke grubu, komütatör alt grubu, kuvvet alt grubu, serbest normal alt grubu, denklik alt grubu, temel denklik alt grubu.

ABSTRACT

HECKE GROUP $H(\lambda_5)$ AND ITS SOME SUBGROUPS

Asiye SALDIK

Balıkesir Universty, Institue of Science,
Department of Mathematics

(M. Sc. Thesis / Supervisor: Assoc. Doç. Dr. Recep ŞAHİN)

Balıkesir, 2010

In this thesis, the Hecke group $H(\lambda_5)$ and its power subgroup, commutator subgroup, free normal subgroups, congruence and principal congruence subgroups are studied.

This study consists of four chapters. The first chapter is the introduction.

In the second chapter, the fundamental definitions, notations and theorems used in the other chapters are given.

The third chapter is the main part of the study. Firstly, the Hecke group $H(\lambda_5)$ is defined. Later, its fundamental region and its some properties are given. Also the first commutator subgroup, power subgroups, free normal subgroups, congruence and principal congruence subgroups of the Hecke group $H(\lambda_5)$ are introduced. Finally, some informations about the group structure of these and the relationships between them are given.

In the fourth chapter, the results obtained in this thesis are given.

KEY WORDS: The Hecke group $H(\lambda_5)$, power subgroups, commutator subgroup, free normal subgroups, congruence subgroups and principal congruence subgroups.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	4
2.1 Topolojik Dönüşüm Grupları	4
2.2 Projektif Gruplar	5
2.3 Doğrusal Dönüşümler	5
2.4 Fuchsian Gruplar	7
2.5 Permütasyon Metodu	9
2.6 Reidemeister- Schreier Metodu	10
2.7 Komütatör Alt Grupları, Serbest Gruplar ve Serbest Çarpımlar	10
3. BÖLÜM	
3.1 $H(\lambda_5)$ Hecke Grupları	13
3.2 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubu İçin Bir Temel Bölge	13
3.3 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Komütatör Alt Grupları	16
3.4 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Kuvvet Alt Grupları	18
3.5 Kuvvet Alt Grupların Komütatör Alt Grupları	24
3.6 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Serbest Normal Alt Grupları	26
3.7 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Temel Denklik Alt Grupları	27
3.8 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Denklik Alt Grupları	30
4. SONUÇLAR	37
KAYNAKLAR	39

SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Adı</u>
C	Karmaşık sayılar kümesi
R	Gerçel sayılar kümesi
S^1	Birim çember
[G, X]	Topolojik dönüşüm grubu
X/G	Bölüm uzayı
U	Üst yarı düzlem
GL(2,K)	Genel lineer grup
Z(GL(2,K))	Genel lineer grubun merkezi
PGL(2,K)	Projektif genel lineer grup
SL(2,K)	Özel lineer grup
Z(SL(2,K))	Özel lineer grubun merkezi
PSL(2,K)	Projektif özel lineer grup
PSL(2,R)	$\left\{ T \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$
(l,m,n)	$\langle x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I \rangle$
C_n	n mertebeli devirli grup
D_n	Dihedral grup
S_n	Simetrik grup
A_n	Alterne grup
Σ	Schreier transversali
G'	G grubunun komütatörü
[g,h]	g ile h nin komütatörü
F_n	n ranklı serbest grup
A*B	A ile B gruplarının serbest çarpımı
$H(\lambda)$	Hecke grubu
F_λ	Hecke grubunun temel bölgesi
$H'(\lambda_5)$	$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun komütatör alt grubu
$H^m(\lambda_5)$	$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun m. kuvvet alt grubu
$H_p(\lambda_5)$	$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun p seviyeli temel denklik alt grubu
$H(\lambda_5, I)$	$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun I seviyeli temel denklik alt grubu

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda, beni yönlendiren, yoğun çalışmaları arasında bana değerli vaktini ayırıp yardım ve desteğini hiç esirgemeyen her zaman yanımda hissettiğim değerli hocam Doç. Dr. Recep ŞAHİN`e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca beni yetiştiren ve her zaman yol gösterici olan Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü`ndeki hocalarıma teşekkür ederim.

Tüm öğrenim yaşantım boyunca maddi manevi destekleriyle bugünlere gelmemi sağlayan benim her türlü cefamı çeken anneme, sevgili kardeşime ve tüm aileme teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, $H(\lambda_5)$ Hecke grubu ve bazı normal alt grupları hakkında literatürde var olan çeşitli bilgileri vermektir. Tezin bu bölümünün ilk kısmında yer alan bazı bilgiler [1] nolu kaynaktan alınmıştır.

Erich Hecke 1936 yılında, $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun

$$T : z \rightarrow -\frac{1}{z} \text{ ve } U : z \rightarrow z + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$$

elemanları ile üretilen ve $H(\lambda)$ ile gösterilen alt gruplarının $\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$, $q \geq 3$ tamsayı ve $\lambda \geq 2$ değerleri için ayrık olduğunu gösterdi, [2]. Eğer $S = T.U$ alınırsa

$$S : z \rightarrow -\frac{1}{z + \lambda}$$

dönüşümü elde edilir.

Ayrıca E. Hecke, $\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$, $q \geq 3$ tamsayı ve $\lambda \geq 2$ değerleri için $H(\lambda)$

grubunun bir temel bölgesinin

$$F_\lambda = \left\{ z \in U : |\operatorname{Re} z| < \frac{\lambda}{2}, |z| > 1 \right\}$$

kümesi olduğunu ve diğer $\lambda > 0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını gösterdi. Bu durumda $H(\lambda)$ grubunun bir Fuchsian grup olması için gerek ve yeter koşulün $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ reel sayı olması gerektiği görülür, [2].

Her iki durumda da $H(\lambda)$ grubuna Hecke grubu denir. Bu çalışmada $\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$, $q \geq 3$ tamsayı durumuna karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarından $q=5$ için olan $H(\lambda_5)$ Hecke grubunu inceleyeceğiz.

$H(\lambda_q)$ Hecke grubu, 2 mertebeli $T(z) = -\frac{1}{z}$ ve q mertebeli $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$ ile üretilen $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun ayrık bir alt grubudur, [1].

Burada $q=3$ için $\lambda=\lambda_3=2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$, değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu modüler grup olarak bilinir. Modüler grup literatürde en çok çalışılan gruptur. $H(\lambda_3)$ grubunun elemanlarının tüm katsayıları rasyonel tamsayılardır.

Diğer önemli iki Hecke grubu ise $q=4$ ve $q=6$ değerlerine karşılık gelen gruplardır. Bu durumda $\lambda_4=\sqrt{2}$ ve $\lambda_6=\sqrt{3}$ elde edilir. Bu iki halde katsayılar cisimi olarak rasyonel sayılar cisminin $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ve $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ cebirsel genişlemeleri kullanılır.

Ayrıca $H(\lambda_5)$ grubu da $H(\lambda_3)$ modüler gruba birçok benzerlikler gösterdiği için çok çalışılan bir Hecke grubudur. Bu durumda da yine rasyonel sayılar cisminin ikinci dereceden bir genişlemesini elde ederiz. Bu dört Hecke grubu için λ_q derecesi üçten küçük veya üçe eşit olan bir polinomun köküdür.

$H(\lambda_5)$ grubu ve onun bazı normal alt grupları Rosen [3], Lang [4], Lang ve Tan [5-6] ve Uzun [7], ... gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Çalışmanın ilk bölümü tezin amacını veren ve tezin bölümlerinin tanıtıldığı giriş bölümüdür.

İkinci bölüm olan ön bilgiler bölümünde ilerleyen bölümlerde çok sık kullandığımız bazı tanım, kavram ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde, ana hatlarıyla topolojik dönüşüm grubu, projektif gruplar, doğrusal dönüşümler, Fuchsian gruplarla ilgili temel kavramlar, Riemann-Hurwitz formülü, permütasyon metodu, Reidemeister-Schreier metodu, serbest gruplar ve serbest çarpımlardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun tanımı ve genel özellikleri verilmiş, ayrıca $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun komütatör ve kuvvet alt grupları tanıtılmıştır. Bu alt grupların grup yapıları hakkında bilgi verilmiş ve üreteçleri Reidemeister-Schreier metodu ile bulunmuştur. Alt grupların cinsleri Riemann-Hurwitz formülü ile ve simgeleri permütasyon metodu ile elde edilmiştir. Ayrıca kuvvet ve komütatör alt grupları arasındaki ilişki gösterilmiştir. Daha sonra kuvvet alt gruplarının komütatör alt grupları yine benzer yöntemlerle çalışılmıştır. Bunlara ek olarak $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun serbest alt grupları ile ilgili teorem ve yardımcı teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Son olarak $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun temel denklik ve denklik alt grupları tanıtılmış, bunlarla ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde tezde elde edilen sonuçlar verilmiş ve önerilerde bulunulmuştur.

2. BÖLÜM

Bu bölümde tezin ana kısmında kullanılacak olan bazı temel kavramlar teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bu bölümde bulunan bazı bilgiler [1], [8], [9] ve [10] kaynaklarından yararlanılarak elde edilmiştir.

2.1 Topolojik Dönüşüm Grupları

2.1.1 Tanım : (a) G bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Eğer $g, h \in G$ için

$$\alpha : G \times G \rightarrow G; \alpha(g, h) = gh,$$

$$\beta : G \rightarrow G; \beta(g) = g^{-1}$$

biçiminde tanımlanan α ve β işlemleri sürekli iseler, G kümesine bir *topolojik grup* denir, [11].

(b) G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$$\Lambda : G \times X \rightarrow X; \Lambda(g, x) = g\Lambda x$$

sürekli dönüşümü, eğer her $g, h \in G$ ve her $x \in X$ için

$$(i) \quad g\Lambda(h\Lambda x) = gh\Lambda x$$

$$(ii) \quad e\Lambda x = x$$

koşullarını gerçekleştiriyorsa $[G, X]$ ikilisine bir *topolojik dönüşüm grubu* denir, [12].

2.1.2 Tanım : G bir topolojik grup olsun. Eğer G topolojik grubunun her g elemanı için $\{g\}$ kümesi g elemanının bir komşuluğu ise G topolojik grubuna *ayrık grup* denir, [12].

2.2 Projektif Gruplar

p bir asal sayı olmak üzere, tüm $q = p^n$ şeklinde kuvvetler için, $GF(q)$ ile gösterilen q elemanlı bir tek cisim vardır. Bu q elemanlı cisme Galois cismi denir. Bütün sonlu cisimler bu biçimde bulunur, [1].

Eğer K cismi $q = p^n$ mertebeli sonlu bir cisim, yani $K=GF(q)$ ise, $GL(2,K)$ ile gösterilen *genel lineer grup*,

$$GL(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc \neq 0 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu grubun merkezi $Z(GL(2,K))$ ile gösterilir. Buradan $PGL(2,K)$ ile gösterilen *projektif genel lineer grup*

$$PGL(2,K) = GL(2,K)/Z(GL(2,K))$$

olarak tanımlanır, [1].

$GL(2,K)$ grubunda determinantı 1 olan matrisler bir alt grup oluştururlar. $SL(2,K)$ ile gösterilen bu alt gruba *özel lineer grup* denir. Yani

$$SL(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc = 1 \right\}$$

olur. Dolayısıyla $PSL(2,K)$ ile gösterilen *projektif özel lineer grup*,

$$PSL(2,K) = SL(2,K)/Z(SL(2,K))$$

biçiminde tanımlanır, [1].

En çok çalışılan projektif gruplar $PSL(2, Z)$, $PSL(2, R)$ ve $PSL(2, C)$ gruplarıdır.

2.3 Doğrusal Dönüşümler

2.3.1 Tanım : $a, b, c, d \in C$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$

biçimindeki bir dönüşüme doğrusal kesirli dönüşüm denir, [12].

Bu çalışmada reel katsayılı doğrusal dönüşümler ile çalışacağımızdan, bu dönüşümlerin

$$\text{PSL}(2, \mathbf{R}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$$

alt kümesi ile

$$G_0 = \left\{ U(z) = \frac{\bar{a}z + b}{\bar{c}z + d} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad - bc = -1 \right\}$$

biçimindeki kümeyi alalım. $G = \text{PSL}(2, \mathbf{R}) \cup G_0$ kümesini oluşturalım. G kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$, G grubunun bir alt grubudur, [12].

2.3.2 Tanım: a) $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in G$ ve $U(z) = \frac{\bar{a}z + b}{\bar{c}z + d} \in G$ dönüşümlerinin

$T(z)=z$ ve $U(z)=z$ koşullarını sağlayan noktalara bu dönüşümlerin *sabit noktaları* denir.

b) $\text{tr}(T)=a+d$ ve $\text{tr}(U)=a+d$ değerlerine T ve U dönüşümlerinin izi denir, [12].

Şimdi G kümesinin elemanlarının sabit noktalarını belirleyelim.

a) $|\text{tr}(T)| > 2$ ise T dönüşümünün iki sabit noktası vardır ve bunlar gerçel eksen üzerindedir ve T dönüşümüne *hiperbolik dönüşüm* denir.

b) $|\text{tr}(T)| = 2$ ise T dönüşümünün gerçel eksen üzerinde çakışık iki tane sabit noktası vardır ve T dönüşümüne *parabolik dönüşüm* denir.

c) $|\text{tr}(T)| < 2$ ise T dönüşümünün birbirinin eşleniği olan iki karmaşık sabit noktası vardır ve T dönüşümüne *eliptik dönüşüm* denir.

d) $\text{tr}(U) = d + a \neq 0$ ise U dönüşümünün reel eksen üzerinde iki farklı sabit noktası vardır ve U dönüşümüne *kayan-yansıma* denir.

e) $\text{tr}(U) = d + a = 0$ ise U dönüşümünün sabit noktaları kümesi $(a/c, 0)$ merkezli ve $1/|c|$ yarıçaplı bir çemberdir ve U dönüşümüne *yansıma* denir, [12].

2.3.3 Tanım : $[G, U]$ topolojik dönüşüm grubunun ayrık alt gruplarına *Öklidiyen olmayan kristallografik* (Non-Euclidean Crystallographic) *grup* denir ve kısaca N.E.C. grup diye yazılır, [11].

2.4 Fuchsian Gruplar

2.4.1 Tanım : $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun (U üst yarı düzlemin konform topolojik eş yapı dönüşümlerinin grubu) sonlu üreteçli ayrık bir Γ alt grubuna bir *Fuchsian grup* denir, [11].

Her Γ Fuchsian grubunun aşağıdaki şekilde bir temsili vardır:

Üreteçler: $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ (hiperbolik)

x_1, \dots, x_r (eliptik)

p_1, \dots, p_t (parabolik)

h_1, \dots, h_u (hiperbolik sınır elemanı)

$$\text{Bağıntılar: } x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r x_j \prod_{k=1}^t p_k \prod_{l=1}^u h_l = 1.$$

Γ Fuchsian grubuna

$$(g; m_1, \dots, m_r; t; u) \quad (2.1)$$

simgesine sahiptir denir. Burada $m_1, \dots, m_r \geq 2$ sayıları tamsayılardır. Bunlara Γ grubunun *periyotları* denir. g , Γ grubunun üzerinde ayrık olarak hareket ettiği U/Γ Riemann yüzeyinin cinsidir, [13].

2.4.2 Riemann-Hurwitz Formülü : Γ , simgesi (2.1) biçimindeki gibi olan bir grup olsun. Γ nın hiperbolik alanını

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u$$

olarak tanımlayalım. Eğer $\mu(\Gamma) > 0$ ise simgesi (2.1) biçimindeki gibi olan bir Fuchsian grup vardır. Eğer Γ , birinci türden Fuchsian grupsa $\mu(\Gamma) > 0$ dır. Şimdi Γ_1 , Γ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu olsun. O zaman

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)}$$

olur. Burada $\mu(\Gamma_1)$ ve $\mu(\Gamma)$ sırasıyla Γ_1 ve Γ grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanını göstermektedir. Bu formüle *Riemann-Hurwitz formülü* denir, [14].

Şimdi $H(\lambda_5)$ Hecke grubu bir parabolik üreteçli üçgen grup olarak düşünülebileceğinden üçgen gruplardan bahsedelim.

$l, m, n \geq 2$ olacak şekilde tamsayılar olsunlar. $\pi/l, \pi/m, \pi/n$ açılı bir hiperbolik üçgen ve bu üçgenin kenarlarındaki yansımalar $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ olsun. Ayrıca Γ^* grubu bu üç yansıma ile üretilen grup olsun.

$$\Gamma^* = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n = I \rangle$$

$x = \sigma_2\sigma_3$ ve $y = \sigma_3\sigma_1$ yazılırsa $xy = \sigma_2\sigma_1$ elde edilir. Buradan Γ^* grubunun sadece x, y ve xy yön koruyan eşmetrilerinden oluşan bir Γ alt grubu

$$\Gamma = \langle x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I \rangle$$

biçimindedir. Bu alt grup bir Fuchsian grup olarak $(0; l, m, n)$ simgesine sahiptir. Genellikle bu simge (l, m, n) ile gösterilir. Bu Γ alt grubuna bir *üçgen grup* denir. Γ alt grubu Γ^* grubunun 2 indeksli bir normal alt grubudur, [15].

$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun $(0; 2, 5, \infty)$ simgesine sahip bir üçgen grup olduğunu ispatlayacağız. Parabolik elemanların sonsuz mertebeli eliptik elemanlar gibi düşünülebileceğini biliyoruz. Yani $(TS)^\infty = 1$ olur ve buradan $H(\lambda_5)$ Hecke grubu 2 mertebeli ve 5 mertebeli sonlu iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olan ve

$$\Gamma \cong (2, 5, \infty) \cong \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle$$

gösterimine sahip bir üçgen gruptur.

Üçgen gruplar ana hatlarıyla aşağıdaki gibidir:

(a) C_n Devirli Grupları : C_n gruplarının gösterimleri

$$C_n \cong \langle \alpha : \alpha^n = I \rangle$$

biçimindedir. Bunların üçgen grubu olarak gösterimleri de her $n \in \mathbb{N}$ için C_n , $(1,n,n)$ biçimindedir. Eğer m tek sayı ise $C_{2m} \cong \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^m = I, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$ olduğundan C_{2m} in üçgen grubu olarak gösterimi $(2,m,2m)$ biçimindedir. Fakat bu tipteki devirli gruplar cinsi $g > 0$ olan yüzeyler üzerinde hareket ederler, [15].

(b) D_n Dihedral Grupları : D_n gruplarının gösterimleri

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I \rangle$$

biçimindedir. Burada $|D_n| = 2n$ dir. D_n grubunun üçgen grubu olarak gösterimi $(2,2,n)$ veya $(2,n,2)$ veya $(n,2,2)$ biçimindedir, [15].

(c) Simetrik ve Alterne Gruplar : n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. $|S_n| = n!$ ve $|A_n| = n!/2$ dir. Çok karşılaşılan simetrik ve alterne gruplar $D_3 \cong S_3 \cong (2,2,3)$, $A_4 \cong (2,3,3)$, $S_4 \cong (2,3,4)$ ve $A_5 \cong (2,3,5)$ gruplarıdır, [15].

2.5 Permütasyon Metodu

$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun normal alt gruplarının simgelerini bulmakta kullanacağımız permütasyon metodunu tanıtalım :

2.5.1. Teorem: $p+q=r+t$ ve $1 < k_i \leq \infty$ ($1 \leq i \leq q$) olmak üzere Γ grubunun simgesi $(g; m_1, \dots, m_p, n_1 k_1, \dots, n_q k_q)$ ve Γ_1 , Γ grubunun μ indeksli bir normal alt grubu ise Γ_1 alt grubu $(g_1; k_1^{(\mu/n_1)}, \dots, k_q^{(\mu/n_q)})$ simgesine sahiptir. Burada $k_i^{(\mu/n_i)}$, k_i mertebeli elemandan μ/n_i tane var demektir ve g_1 cinsi Riemann-Hurwitz formülü ile bulunabilir, [16].□

2.6 Reidemeister-Schreier Metodu

$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun normal alt gruplarının sonlu indeksli bazı normal alt gruplarının üreteçlerini bulmakta kullanılacak bir teknik olan Reidemeister-Schreier metodundan bahsedelim.

$G, \{g_i\}$ üreteçleri ile üretilen bir grup ve H, G grubunun bir alt grubu olsun. Metod önce H için bir Schreier sistemi (transversali) seçmekle ve sonra da bu sistemin, üreteçlerin ve koset gösterimlerinin elemanlarının sıralı çarpımlarının alınmasıyla, aşağıdaki gibi uygulanır, [1].

Bir Σ Schreier sistemi aşağıdaki koşulları sağlayan koset gösterimlerinin bir kümesinden oluşur:

(a) $I \in \Sigma$

(b) Σ sağ sadeleştirme altında kapalıdır. Yani eğer $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \dots g_{i_r} \in \Sigma$ ise $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \dots g_{i_{r-1}}$ elemanı da Σ kümesinde olmalı.

Σ, H için bir Schreier transversali olsun. H nin bir Schreier üretici aşağıdaki biçimde olacaktır, [1].

$$(\Sigma \text{ nin bir elemanı})x(G \text{ nin bir üretici})x(\text{önceki çarpımın koset gösterimi})^{-1}$$

2.7 Komütatör Alt Grupları, Serbest Gruplar ve Serbest Çarpımlar

2.7.1 Tanım: G bir grup olsun. $g, h \in G$ ve $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ olmak üzere

$$\langle [g, h] : g, h \in G \rangle$$

ile tanımlanan gruba G grubunun *komütatör alt grubu* denir ve G' ile gösterilir.

2.7.2 Yardımcı Teorem: G/G' en geniş değişmeli bölüm grubudur. Yani G/N grubu, G grubunun G/G' grubundan başka bir değişmeli bölüm grubu ise

$$G' \triangleleft N \triangleleft G$$

ve bir

$$\Theta : G/G' \rightarrow G/N$$

homomorfizmi vardır, [17].□

Şimdi $H(\lambda_q)$ bir serbest çarpım olarak bazı serbest alt gruplarına sahip olduğundan, serbest alt gruplar ile ilgili bazı sonuçları verelim.

2.7.3 Tanım: Bir grubun üreteçleri arasında bağıntılar yoksa bu gruba *serbest grup* denir, [1].

X bir F grubunun bir alt kümesi olsun. F , aşağıdaki koşulları sağlayan X tabanı ile bir serbest gruptur: Eğer ϕ , X kümesinden bir H grubu içine herhangi bir fonksiyon ise ϕ homomorfizminin F grubundan H grubuna ϕ^* homomorfizmine tek bir genişlemesi vardır. Burada X kümesine F grubunun *serbest tabanı* denir, [1].

X serbest tabanının mertebesine F grubunun *rankı* denir. Eğer $|X|=n$ ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise F , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ üzerinde *serbesttir* denir ve F_n ile gösterilir [18].

2.7.4 Teorem: (a) F grubunun bir serbest grup olması için gerek ve yeter koşul F grubunun $F = \langle X_i \rangle$ biçiminde bir gösterimi olmasıdır.

(b) Her G grubu bir serbest grubun bir homomorfik görüntüsüdür.

(c) Bir serbest grup bükümsüzdür (torsion-free), yani bir serbest grupta birim eleman dışında sonlu mertebeli elemanı yoktur, [19].□

2.7.5 Teorem (Nielsen-Screier): Bir serbest grubun her alt grubu da serbesttir, [19].□

2.7.6 Tanım: $A = \langle a_1, \dots; R_1, \dots \rangle$ ve $B = \langle b_1, \dots; S_1, \dots \rangle$ iki grup olsun. A ve B gruplarının $A*B$ ile gösterilen serbest çarpımı,

$$\langle a_1, \dots, b_1, \dots; R_1, \dots, S_1, \dots \rangle$$

gösterimli gruptur. Burada A ve B gruplarına G grubunun *çarpanları* denir, [19].

2.7.7 Tanım: Eğer $A_\alpha = \langle \text{ür}A_\alpha : \text{bağ}_\alpha \rangle$, $\alpha \in I$ grupların bir ailesi ise bu grupların $G = \prod_{\alpha} A_\alpha$ serbest çarpımı, üreteçleri A_α gruplarının üreteçlerinin ayırık birleşimlerinden ve bağıntıları da A_α gruplarının bağıntılarının ayırık birleşimlerinden oluşan gruptur, [19].

2.7.8 Teorem: $G = A * B$ olsun. O zaman $A \rightarrow B$ ve $B \rightarrow G$ eşlemeleri birebir eşlemelerdir. A nın üreteçleri ile üretilen G grubunun alt grubu $\langle A$ grubunun üreteçleri, A grubunun bağıntıları \rangle biçiminde gösterime sahiptir. Yani A grubuna izomorftur. Benzer durum B içinde geçerlidir. Bu yüzden A ve B , G grubunun alt grupları olarak düşünülebilir, [19]. □

Serbest çarpımlar, serbest gruplarla bir çok özelliği paylaşır. Örneğin Kurosh'un teoremi ile serbest gruplar için verilmiş olan Nielsen-Schreier teoremi serbest çarpımlara genişletilmiştir.

2.7.9 Teorem (Kurosh): G , A_α alt gruplarının çarpımı yani,

$$G = \prod_{\alpha} A_\alpha$$

olsun. Eğer H alt grubu G grubunun bir alt grubu ise

$$H = F * \prod_{\beta} B_\beta$$

olur. Burada F bir serbest grup ve her bir β için B_β , bir A_α alt grubuna eşleniktir, [1]. □

2.7.10 Teorem: Eğer $G = A * B$ ve $H \subset A$, $K \subset B$ ise H ve K ile üretilen alt grup bunların serbest çarpımıdır. Yani $\langle H, K \rangle = H * K$ dir, [19]. □

3. BÖLÜM

Çalışmanın esas kısmı olan bu bölümde, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun tanımı, temel bölgesi, komütatör, kuvvet, denklik ve temel denklik alt grupları verilecektir. Ayrıca bu alt grupların grup yapıları ve simgeleri bulunacaktır. Bu bölümdeki bilgilerin bazıları [1, 7, 20-27] nolu kaynaklardan alınmıştır.

3.1 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubu

3.2.1 Tanım: $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının

$$S(z) = -\frac{1}{z + \lambda_q}$$

üreticinde, $q=5$ için $\lambda_5 = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ değerinin yazılması ile elde edilen gruba, $H(\lambda_5)$ Hecke grubu denir.

$H(\lambda_5)$ Hecke grubu $PSL(2, \mathbf{Z}[\lambda_5])$ kümesinin alt kümesidir. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösterimi;

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle$$

biçimindedir, [1].

3.2 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubu İçin Bir Temel Bölge

Öncelikle bir grubun temel bölgesini tanımlayalım:

3.2.1 Tanım : F , U üst yarı düzleminde açık bir küme olsun. F kümesi ,

(a) her $z \in U$ için $G(z)$ yörüngesi ile \bar{F} en az bir noktada kesişir,

(b) her $z \in U$ için $G(z)$ yörüngesi ile F en çok bir noktada kesişir,

koşullarını sağlıyorsa F kümesine G grubu için bir temel bölgedir denir, [20].

3.2.2 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun bir temel bölgesi ;

$$F_{\lambda_5} = \left\{ z \in U : \left| \operatorname{Re} z \right| < \frac{\lambda_5}{2}, |z| > 1 \right\}$$

kümesidir, [20].□

3.2.3 Tanım : $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $P \subset X$ olsun. Eğer $g_1, g_2 \in G$ ve $g_1 \neq g_2$ için $g_1 P \cap g_2 P = \emptyset$ ise P ye bir G -paketleme denir, [20].

P bir G -paketleme ise her bir yörüngeden en fazla bir tane eleman içerir.

3.2.4 Yardımcı Teorem : H ve K bir $[G, X]$ dönüşüm grubunun iki alt grubu olsun. Eğer P bir H -paketleme , Q bir K -paketleme , $A = \langle H, K \rangle$ (H ve K nin üreteçleri ile üretilen grup) ve $P \cup Q = X$, $P \cap Q \neq \emptyset$ ise $A \cong H * K$ dir, [20].□

3.2.5 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubu 2 ve 5 mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorfiktir.

İspat: $H = \langle T \rangle \cong C_2$ ve $K = \langle S \rangle \cong C_5$ olsun. O halde; $H \leq H(\lambda_5)$ ve $K \leq H(\lambda_5)$ olur.

Şimdi 3.2.4 Yardımcı teorem için gerekli koşulların sağlandığı H ve K alt gruplarının P ve Q paketlerini bulalım:

$$T(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

olduğundan, $\operatorname{işaret}(\operatorname{Re} T(z)) = -\operatorname{işaret}(\operatorname{Re}(z))$ bulunur. Buradan $H = \langle T \rangle = \{ I, T \}$ ve $P = \{ z \in U : \operatorname{Re} z < 0 \}$ kümesi için, $I.P \cap T.P = \emptyset$ olduğundan, P kümesi bir H -paketlemedir. Şimdi

$$Q = \left\{ z \in U : \left| z + 1/\lambda_5 \right| > 1/\lambda_5, \operatorname{Re} z > -\lambda_5 / 2 \right\}$$

kümesini düşünelim. $S(z) = -\frac{1}{z + \lambda_5}$ eliptik dönüşümü aşağıdaki dönüşümlerin birleşimi olarak gösterilebilir.

a) $R_1(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$, birim çemberdeki yansıma.

b) $R_2(z) = -\bar{z}$, $\text{Re } z = 0$ doğrusundaki yansıma.

c) $R(z) = z + \lambda_5$, λ_5 boyunca öteleme.

Burada $S(z) = R_1 R_2 R(z)$ olduğu açıkça görülür.

Q ; a , 0 ve ∞ köşelerine sahiptir. Eğer R dönüşümünü Q dönüşümüne uygularsak; RQ nun köşelerini $\frac{\lambda_5}{2} + iy$, λ_5 , ∞ şeklinde elde ederiz. R_2 yansımasını RQ ya uygularsak köşeleri a , $-\lambda_5$, ∞ olan RQ nun bir yansımasını elde ederiz. Son olarak R_1 yansımasını $R_2 RQ$ ya uygularsak; köşeleri a , $-1/\lambda_5$ ve 0 olan $R_2 RQ$ nun bir SQ yansımasını elde ederiz.

Benzer olarak, R , ve R_1 sırasıyla SQ ya uygulanırsa son bölgeyi S^2Q elde ederiz. Bu bölgenin köşeleri a , $\lambda_5/(1-\lambda_5^2)$ ve $-1/\lambda_5$ olur. Bu işlemi 2 kez uygularsak S^3Q ve S^4Q bölgelerini elde ederiz. S elemanının bir sabit noktası a olduğundan, her S^nQ nun diğer iki köşesini bulalım. Basit bir hesaplama ile;

$$S^n(\infty) = -\frac{\alpha_{n-1}(\lambda_5)}{\alpha_n(\lambda_5)}$$

bulunur. Burada $0 \leq n \leq 4$, α_n ler aşağıdaki indirgenme formülü ile verilen polinomlardır.

$$\alpha_{-1}(\lambda_5) = \alpha_0(\lambda_5) = 0,$$

$$\alpha_1(\lambda_5) = 1,$$

$$\alpha_n(\lambda_5) = \lambda_5 \cdot \alpha_{n-1}(\lambda_5) - \alpha_{n-2}(\lambda_5); n \geq 2.$$

3.2.6 Yardımcı Teorem : S^nQ , $0 \leq n \leq 4$, bölgesinin köşeleri; a , $S^n(\infty)$ ve $S^{n+1}(\infty)$ dir, [20].□

Yardımcı teorem 3.2.6 dan ve $S^{n+1}(\infty) = S^n(0)$ olmasından dolayı S^nQ ların hiçbirisi çakışmaz. Yani Q , K - paketlemedir.

Artık bir H- paketleme ve bir K- paketlemeye sahip olduğumuzdan, 3.2.4 yardımcı teoremi uygulayabiliriz. Bu durumda, $H(\lambda_5)$ Hecke grubu H ve K alt gruplarının serbest çarpımına izomorftür. Yani

$$H(\lambda_5) \cong C_2 * C_5$$

bulunur. Ayrıca

$$P \cap Q = \{z \in U : |z + 1/\lambda_5| > 1/\lambda_5, -\lambda_5/2 < \text{Re}z < 0\}$$

bir $H(\lambda_5)$ -paketlemedir, [20].□

3.3 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Komütatör Alt Grupları

$H(\lambda_5)$ Hecke grubu

$$T^2=S^5=I$$

bağıntılarına sahiptir. Burada $H(\lambda_5)$ Hecke grubun birinci komütatör alt grubunu $H'(\lambda_5)$ ile göstereceğiz. Eğer $H(\lambda_5)$ grubunun gösterimine değışmelilik bağıntısı eklenirse bölüm grubunun gösterimi $H(\lambda_5)/H'(\lambda_5)$ olarak elde edilir. Yani $H(\lambda_5)/H'(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösteriminde,

$$T^2=S^5=I, TS=ST$$

bağıntıları bulunur. Aynı şekilde $H'(\lambda_5)$ grubunun gösterimine değışmelilik bağıntısı eklenirse $H'(\lambda_5)/H''(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi bulunur, [21].

3.3.1 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu, $(2; \infty)$ simgeli ve 4 ranklı serbest bir alt gruptur. Ayrıca

$$|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)| = 10 \text{ ve}$$

$$H'(\lambda_5) = \langle TSTS^4 \rangle * \langle TS^2TS^3 \rangle * \langle TS^3TS^2 \rangle * \langle TS^4TS \rangle \text{ olur.}$$

İspat : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösterimine değışmelilik bağıntısı eklenirse $H(\lambda_5)/H'(\lambda_5)$ bölüm grubunun grup gösterimi bulunur. Buradan

$$H(\lambda_5)/H'(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I, TS=ST \rangle \cong C_2 \times C_5$$

elde edilir. Ayrıca indeks, $|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)| = 10$ olarak bulunur.

Şimdi $H'(\lambda_5)$ komütatör grubunun üreteç kümesini elde edelim. Bunun için Schreier sistemi olarak $\{ I, T, S, S^2, S^3, S^4, TS, TS^2, TS^3, TS^4 \}$ kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{array}{ll}
I.T.(T)^{-1}=I, & I.S.(S)^{-1}=I, \\
T.T.(I)^{-1}=I, & T.S.(TS)^{-1}=I, \\
S.T.(TS)^{-1}=STS^4T, & S.S.(S^2)^{-1}=I, \\
S^2.T.(TS^2)^{-1}=S^2TS^3T, & S^2.S.(S^3)^{-1}=I, \\
S^3.T.(TS^3)^{-1}=S^3TS^2T, & S^3.S.(S^4)^{-1}=I, \\
S^4.T.(TS^4)^{-1}=S^4TST, & S^4.S.(I)^{-1}=I, \\
TS.T.(S)^{-1}=TSTS^4, & TS.S.(TS^2)^{-1}=I, \\
TS^2.T.(S^2)^{-1}=TS^2TS^3, & TS^2.S.(TS^3)^{-1}=I, \\
TS^3.T.(S^3)^{-1}=TS^3TS^2, & TS^3.S.(TS^4)^{-1}=I, \\
TS^4.T.(S^4)^{-1}=TS^4TS, & TS^4.S.(T)^{-1}=I.
\end{array}$$

Buradan $(STS^4T)^{-1}=TSTS^4$, $(S^3TS^2T)^{-1}=TS^3TS^2$, $(S^2TS^3T)^{-1}=TS^2TS^3$, $(S^4TST)^{-1}=TS^4TS$ olduğu göz önüne alınır, $H'(\lambda_5)$ komütatör grubunun üreteç kümesini

$$\{ TSTS^4, TS^2TS^3, TS^3TS^2, TS^4TS \}$$

olarak buluruz. Açık olarak $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun sonsuz mertebeli dört grubun serbest çarpımı, yani

$$H'(\lambda_5) = \langle TSTS^4 \rangle * \langle TS^2TS^3 \rangle * \langle TS^3TS^2 \rangle * \langle TS^4TS \rangle$$

olduğu görülür. Ayrıca $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu serbest bir gruptur.

Şimdi $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun simgesini belirleyelim.

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle \cong (2, 5, \infty)$$

$$H(\lambda_5)/H'(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = (TS)^{10} = I \rangle \cong (2, 5, 10)$$

ve

$$|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)| = 10$$

olduğunu biliyoruz. Permütasyon metodundan faydalanarak $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun işareti $(g; \infty^{(10/10)}) = (g; \infty)$ olarak bulunur.

$H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun cinsini bulmak içinde Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım;

$$|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)| = \frac{\mu(H'(\lambda_5))}{\mu(H(\lambda_5))}$$

$$10 = \frac{2g-1}{(2 \cdot 0 - 2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + 1}$$

$$g=2$$

bulunur. Böylece $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun simgesi

$$(2; \infty)$$

olarak elde edilir, [1, 21].□

3.4 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun $H^m(\lambda_5)$ Kuvvet Alt grupları

3.4.1 Tanım: m pozitif bir tamsayı olmak üzere, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun tüm elemanlarının m . kuvvetleri alınarak üretilen alt gruba $H(\lambda_5)$ grubunun m . kuvvet alt grubu denir ve bu alt grup $H^m(\lambda_5)$ ile gösterilir, [1].

3.4.2 Teorem : m, n pozitif tamsayı ve (m, n) m ile n pozitif tamsayısının en büyük ortak böleni olmak üzere;

$$H^m(\lambda_5).H^n(\lambda_5) = H^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olur.

İspat : Alt grup tanımından;

$$H^m(\lambda_5) \leq H^{(m,n)}(\lambda_5) \text{ ve } H^n(\lambda_5) \leq H^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ikisi birlikte düşünülecek olursa,

$$H^m(\lambda_5).H^n(\lambda_5) \leq H^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olur.

Şimdi de eşitliğin diğer tarafını ispatlayalım. u , $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun herhangi bir ögesi olsun. m_1 ve n_1 tam sayılarını $m_1 m + n_1 n = (m, n)$ olacak biçimde seçelim. Buradan

$$u^{(m,n)} \in H^{(m,n)}(\lambda_5) \text{ ve } u^{m_1 m + n_1 n} \in H^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olur. Ayrıca

$$u^{m_1 m} \in H^m(\lambda_5) \text{ ve } u^{n_1 n} \in H^n(\lambda_5)$$

bulunur. Buradan;

$$u^{m_1 m} \cdot u^{n_1 n} \in H^m(\lambda_5) \cdot H^n(\lambda_5)$$

$$u^{m_1 m + n_1 n} \in H^m(\lambda_5) \cdot H^n(\lambda_5)$$

elde edilir. Böylece

$$u^{(m,n)} \in H^m(\lambda_5) \cdot H^n(\lambda_5)$$

bulunur. Buradan

$$H^{(m,n)}(\lambda_5) \leq H^m(\lambda_5) \cdot H^n(\lambda_5)$$

elde edilir ve ispat biter, [1].□

Şimdi m pozitif tamsayısının durumlarına göre elde edilen kuvvet alt gruplarını inceleyelim. Öncelikle $m=2$ ve $m=5$ durumlarını inceleyeceğiz.

3.4.3 Teorem : $H^2(\lambda_5)$ normal alt grubu 5 mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca

$$|H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5)| = 2, \quad H(\lambda_5) = H^2(\lambda_5) \cup T \cdot H^2(\lambda_5) \text{ ve}$$

$$H^2(\lambda_5) = \langle S \rangle * \langle TST \rangle$$

olur. $H^2(\lambda_5)$ normal alt grubu $(0; 5^2, \infty)$ simgesine sahiptir.

İspat : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösteriminin

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösterimine her $X \in H(\lambda_5)$ için $X^2 = I$ bağıntısı eklenirse $H(\lambda_5) / H^2(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5) / H^2(\lambda_5) \cong \langle T, S \mid T^2 = S^5 = (TS)^2 = S^2 = \dots = I \rangle$$

biçiminde bulunur. Burada $S^5 = S^2 = I$ olduğundan $S = I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5) / H^2(\lambda_5) \cong \langle T \mid T^2 = I \rangle \cong C_2$$

olur. Ayrıca

$$|H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5)| = 2$$

elde edilir. Burada üreteçleri bulmak için Schreier sistemi olarak $\{ I, T \}$ kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibi olur

$$I.T.(T)^{-1}=I$$

$$I.S.(I)^{-1}=S$$

$$T.T.(I)^{-1}=I$$

$$T.S.(T)^{-1}=TST$$

$H^2(\lambda_5)$ alt grubunun üreteçleri S ve TST olarak bulunur. Buradan da

$$H^2(\lambda_5) = \langle S, TST \mid S^5 = (TST)^5 = I \rangle \cong C_5 * C_5$$

ve

$$H(\lambda_5) = H^2(\lambda_5) \cup T.H^2(\lambda_5)$$

bulunur. Şimdi de $H^2(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun işaretini belirleyelim. Burada

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle \cong (2, 5, \infty),$$

$$H(\lambda_5) / H^2(\lambda_5) \cong \langle T \mid T^2 = I \rangle \cong (2, 1, 2),$$

$$\left| H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \right| = 2,$$

oldukları bilindiğinden, permütasyon metodundan faydalanarak $H^2(\lambda_5)$ alt grubunun işareti $(g; 5^2, \infty)$ olarak bulunur. Cinsi belirlemek için de Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$\left| H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \right| = \frac{\mu(H^2(\lambda_5))}{\mu(H(\lambda_5))}$$

$$2 = \frac{2g + \frac{3}{5}}{(2.0 - 2) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + 1}$$

buradan da $g=0$ elde edilir. Böylece genel olarak $H^2(\lambda_5)$ alt grubunun simgesi;

$$(0; 5^2, \infty)$$

olarak bulunur, [1, 22].□

3.4.4 Teorem : $H^5(\lambda_5)$ normal alt grubu 2 mertebeli beş devirli grubun serbest çarpımına izomorftur ve

$$\left| H(\lambda_5) : H^5(\lambda_5) \right| = 5$$

ve

$$H^5(\lambda_5) = \langle T \rangle * \langle STS^4 \rangle * \langle S^2TS^3 \rangle * \langle S^3TS^2 \rangle * \langle S^4TS \rangle$$

olur. Ayrıca $H^5(\lambda_5)$ normal alt grubu $(0; 2^5, \infty)$ simgesine sahiptir.

İspat: $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösteriminin

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. $H(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine her $X \in H(\lambda_5)$ için $X^5=I$ bağıntısı eklenirse $H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2=S^5=T^5=(TS)^5=S^5=\dots=I \rangle$$

biçiminde bulunur. Burada $T^2=T^5=I$ olduğundan $T=I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5) \cong \langle S \mid S^5=I \rangle \cong C_5$$

olur ve

$$|H(\lambda_5) : H^5(\lambda_5)| = 5$$

elde edilir. Burada üreteçleri bulmak için Schreier sistemi olarak $\{ I, S, S^2, S^3, S^4 \}$ kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{array}{ll} I.T.(I)^{-1}=T & I.S.(S)^{-1}=I \\ S.T.(S)^{-1}=STS^4 & S.S.(S^2)^{-1}=I \\ S^2.T.(S^2)^{-1}=S^2TS^3 & S^2.S.(S^3)^{-1}=I \\ S^3.T.(S^3)^{-1}=S^3TS^2 & S^3.S.(S^4)^{-1}=I \\ S^4.T.(S^4)^{-1}=S^4TS & S^4.S.(I)^{-1}=I \end{array}$$

olur. Böylece $H^5(\lambda_5)$ alt grubunun üreteçleri $T, STS^4, S^2TS^3, S^3TS^2$ ve S^4TS olarak bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} H^5(\lambda_5) = \langle T, STS^4, S^2TS^3, S^3TS^2, S^4TS \mid T^2=(STS^4)^2=(S^2TS^3)^2 \\ = (S^3TS^2)^2=(S^4TS)^2=I \rangle \end{aligned}$$

$$H^5(\lambda_5) \cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2 * C_2$$

olur. Şimdi de $H^5(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun işaretini belirleyelim. Burada

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle \cong (2, 5, \infty),$$

$$H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5) \cong \langle S \mid S^5=I \rangle \cong (1, 5, 5),$$

$$|H(\lambda_5) : H^5(\lambda_5)| = 5$$

oldukları biliniyor. Permütasyon metodundan faydalanarak $H^5(\lambda_5)$ alt grubunun işareti $(g; 2^5, \infty)$ olarak bulunur. Cinsi belirlemek için de Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$|H(\lambda_5) : H^5(\lambda_5)| = \frac{\mu(H^5(\lambda_5))}{\mu(H(\lambda_5))}$$

eşitliği kullanılarak $g=0$ elde edilir. Böylece genel olarak $H^5(\lambda_5)$ alt grubunun simgesi

$$(0; 2^5, \infty)$$

olarak bulunur, [1, 22]. □

Böylece m pozitif tamsayısının bazı durumlarına göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.4.5 Teorem: m pozitif bir tamsayı olmak üzere $H^m(\lambda_5)$ normal alt grubu için aşağıdaki durumlardan biri doğrudur;

$$H^m(\lambda_5) = \begin{cases} H(\lambda_5), & \text{eğer } (m,10) = 1 \text{ ise} \\ H^2(\lambda_5), & \text{eğer } (m,5) = 1 \text{ ise} \\ H^5(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 1 \text{ ve } m, 5 \text{ in bir katı ise} \end{cases}$$

İspat : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösteriminin

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösterimine her $X \in H(\lambda_5)$ için $X^m = I$ bağıntısı eklenirse $H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = T^m = S^m = (TS)^m = \dots = I \rangle$$

biçiminde olur.

Eğer $(m,10) = 1$ $H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5)$ bölüm grubu

$$H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5) = \langle T, S \mid T = S = I \rangle$$

gösterimine sahip olur. Böylece

$$H^m(\lambda_5) = H(\lambda_5)$$

bulunur.

Eğer $(m,5) = 1$ ise, $H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5)$ bölüm grubu

$$H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5) = \langle T \mid T^2 = I \rangle \cong C_2$$

biçiminde gösterime sahip olur. Böylece 3.4.3 Teoremden dolayı $H^m(\lambda_5) = H^2(\lambda_5)$ bulunur.

Eğer $(m,2) = 1$ ve $m, 5$ in bir katı ise $H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5)$ bölüm grubu,

$$H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5) = \langle S \mid S^5 = I \rangle \cong C_5$$

biçiminde gösterime sahip olur. 3.4.4 Teoremden dolayı $H^m(\lambda_5) = H^5(\lambda_5)$ bulunur, [1, 22]. □

Eğer $(m,10)=10$ ise önceki metotları kullanarak $H^m(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini ve grup yapısını bulmak mümkün değildir. Sadece bu kuvvet alt gruplarının serbest alt gruplar olduğunu gösterebiliriz. Bunu göstermek için şu teoreme ihtiyaç duyacağız.

3.4.6 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu,

$$H'(\lambda_5) = H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)$$

eşitliğini sağlar.

İspat : 3.4.3 Teorem ve 3.4.4 Teoremde $H(\lambda_5)/H^2(\lambda_5)$ ile $H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5)$ bölüm gruplarının devirli birer grup olduklarını göstermiştik. Dolayısıyla bu bölüm grupları değişmelidirler. $H(\lambda_5)/H'(\lambda_5)$ bölüm grubu $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun en geniş değişmeli alt grubu olduğundan

$$H'(\lambda_5) \subset H^2(\lambda_5) \quad \text{ve} \quad H'(\lambda_5) \subset H^5(\lambda_5)$$

bulunur. Buradan

$$H'(\lambda_5) \subset H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)$$

elde edilir.

Şimdi de eşitliğin diğer tarafını görelim. $H^2(\lambda_5)$ ve $H^5(\lambda_5)$, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun normal alt grubu oldukları için izomorfizma teoremlerinden faydalanırsak ;

$$\frac{H^2(\lambda_5).H^5(\lambda_5)}{H^5(\lambda_5)} \cong \frac{H^2(\lambda_5)}{H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)}$$

olarak bulunur. $H^2(\lambda_5).H^5(\lambda_5) = H(\lambda_5)$ olduğundan

$$\left| H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) \right| = \left| H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \right| \left| H^2(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) \right|$$

$$\left| H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) \right| = 2.5$$

$$\left| H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) \right| = 10$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$H(\lambda_5) \supset H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) \supset H'(\lambda_5) \quad \text{ve}$$

$$\left| H(\lambda_5) : H'(\lambda_5) \right| = \left| H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) \right| = 10$$

olarak bulunur. Böylece

$$H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) = H'(\lambda_5)$$

olduğu görülür, [1, 22, 23].□

Artık 3.4.5 Teoremde ele almadığımız $H^{10m}(\lambda_5)$ gruplarını göz önüne alabiliriz. Kuvvet alt grubu tanımından;

$$H^2(\lambda_5) \supset H^{10}(\lambda_5) \quad \text{ve} \quad H^5(\lambda_5) \supset H^{10}(\lambda_5)$$

kapsamalarını biliyoruz. Buradan 3.4.6 Teoremde $H'(\lambda_5) \supset H^{10}(\lambda_5)$ elde edilir.

3.4.7 Sonuç : $H^{10m}(\lambda_5)$ alt grupları serbesttir, [1, 22].□

3.5 Kuvvet Alt gruplarının Komütatör Alt grupları

Bu kısımda $H^2(\lambda_5)$ ve $H^5(\lambda_5)$ kuvvet alt gruplarının komütatör alt gruplarını [24, 25] nolu kaynaklardan yararlanarak inceleyeceğiz.

3.5.1 Teorem : a) $|H^2(\lambda_5) : (H^2)'(\lambda_5)| = 25$

b) $(H^2)'(\lambda_5)$ grubu 16 ranklı $[S, TST], [S, TS^2T], [S, TS^3T], [S, TS^4T], [S^2, TST], [S^2, TS^2T], [S^2, TS^3T], [S^2, TS^4T], [S^3, TST], [S^3, TS^2T], [S^3, TS^3T], [S^3, TS^4T], [S^4, TST], [S^4, TS^2T], [S^4, TS^3T], [S^4, TS^4T]$ ve $(6; \infty^{(5)})$ simgeli bir serbest gruptur.

c) $(H^2)'(\lambda_5)$ grubu, $H'(\lambda_5)$ komütatör grubunun 5 indeksli bir alt grubudur.

İspat : a) 3.4.3 Teoremde $H^2(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun

$$H^2(\lambda_5) = \langle S, TST \mid S^5 = (TST)^5 = I \rangle \cong C_5 * C_5$$

gösterimine sahip olduğunu biliyoruz. Eğer $H^2(\lambda_5)$ grubunun bağıntılarına üreteçlerin değişmelilik koşulu eklenirse $H^2(\lambda_5)/(H^2)'(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi

$$H^2(\lambda_5)/(H^2)'(\lambda_5) = \langle S, TST \mid S^5 = (TST)^5 = I, STST=TSST \rangle \cong C_5 \times C_5,$$

olarak bulunur. Böylece

$$\left| H^2(\lambda_5) : (H^2)'(\lambda_5) \right| = 25$$

elde edilir.

b) Şimdi $(H^2)'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesini elde edelim. Bunun için Schreier sistemi olarak $\{ I, S, S^2, S^3, S^4, TST, TS^2T, TS^3T, TS^4T, TSTS, TS^2TS, TS^3TS, TS^4TS, TSTS^2, TS^2TS^2, TS^3TS^2, TS^4TS^2, TSTS^3, TS^2TS^3, TS^3TS^3, TS^4TS^3, TSTS^4, TS^2TS^4, TS^3TS^4, TS^4TS^4 \}$ kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar alınıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa $(H^2)'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesi

$$\begin{aligned} & [S, TST], [S, TS^2T], [S, TS^3T], [S, TS^4T], [S^2, TST], [S^2, TS^2T], [S^2, TS^3T], \\ & [S^2, TS^4T], [S^3, TST], [S^3, TS^2T], [S^3, TS^3T], [S^3, TS^4T], [S^4, TST], [S^4, TS^2T], \\ & [S^4, TS^3T], [S^4, TS^4T] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $H^2(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun simgesinin $(0; 5, 5, \infty)$ olduğunu 3.4.3 Teoremden biliyoruz. $H^2(\lambda_5)/(H^2)'(\lambda_5)$ bölüm grubunun simgesinin $(g; 5, 5, 5)$ olduğu düşünülüp, Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu kullanılırsa $(H^2)'(\lambda_5)$ grubunun simgesinin $(6; \infty^{(5)})$ olduğu bulunur.

c) $\left| H^2(\lambda_5) : H'(\lambda_5) \right| = 5$ ve $\left| H^2(\lambda_5) : (H^2)'(\lambda_5) \right| = 25$ olduklarından istenilen sonuç görülür, [24, 25].□

$$\mathbf{3.5.2 Teorem : a)} \left| H^5(\lambda_5) : (H^5)'(\lambda_5) \right| = 32$$

b) $(H^5)'(\lambda_5)$ grubu 49 ranklı ve $(17; \infty^{(16)})$ simgeli bir serbest gruptur.

c) $(H^5)'(\lambda_5)$ grubu $H'(\lambda_5)$ komütatör grubunun 16 indeksli bir alt grubudur.

İspat : a) 3.4.4 Teoremden $H^5(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun

$$\begin{aligned} H^5(\lambda_5) = \langle T, STS^4, S^2TS^3, S^3TS^2, S^4TS \mid T^2 = (STS^4)^2 = (S^2TS^3)^2 \\ = (S^3TS^2)^2 = (S^4TS)^2 = I \rangle \end{aligned}$$

$$H^5(\lambda_5) \cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2 * C_2$$

gösterimine sahip olduğunu biliyoruz. Burada $k_1=T, k_2=STS^4, k_3=S^2TS^3, k_4=S^3TS^2, k_5=S^4TS$ diyelim. Eğer $H^5(\lambda_5)$ grubunun bağıntılarına üreteçlerin değişmelilik koşulu $k_i.k_j = k_j.k_i, (i \neq j \text{ ve } i, j = 1, \dots, 5)$ eklenirse

$$H^5(\lambda_5)/(H^5)'(\lambda_5) \cong C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2,$$

olarak bulunur. Böylece

$$\left| H^5(\lambda_5) : (H^5)'(\lambda_5) \right| = 32$$

elde edilir.

b) Şimdi $(H^5)'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesini elde edelim. Bunun için Schreier sistemi olarak $\{I, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_1k_2, k_1k_3, k_1k_4, k_1k_5, k_2k_3, k_2k_4, k_2k_5, k_3k_4, k_3k_5, k_4k_5, k_1k_2k_3, k_1k_2k_4, k_1k_2k_5, k_1k_3k_4, k_1k_3k_5, k_1k_4k_5, k_2k_3k_4, k_2k_3k_5, k_2k_4k_5, k_3k_4k_5, k_1k_2k_3k_4, k_1k_2k_3k_5, k_1k_2k_4k_5, k_1k_3k_4k_5, k_2k_3k_4k_5, k_1k_2k_3k_4k_5\}$ kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar alınıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa $(H^5)'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesi 49 ranklı olarak bulunur. Ayrıca $(H^5)'(\lambda_5)$ grubunun simgesi Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu kullanılırsa $(17; \infty^{(16)})$ olarak bulunur.

c) $\left| H^5(\lambda_5) : H'(\lambda_5) \right| = 2$ ve $\left| H^5(\lambda_5) : (H^5)'(\lambda_5) \right| = 32$ olduklarından istenilen sonuç görülür, [25].□

3.5.3 Sonuç : $H'(\lambda_5) = (H^2)'(\lambda_5) \cdot (H^5)'(\lambda_5)$, [25].□

3.6 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubun Serbest Normal Alt Grupları

$H(\lambda_5)$ Hecke grubu iki ve beş mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına eşit olduğundan iki çeşit alt gruba sahiptir. Birincisi iki ve beş mertebeli bazı devirli gruplarla, bazı sonlu devirli grupların serbest çarpımları olan gruplardır, ikincisi ise serbest alt gruplardır. Kısaca bu gruplardan biraz bahsedelim, [1].

3.6.1 Teorem : Eğer N alt grubu $H(\lambda_5)$ in sıfır cinsli bir normal alt grubu ve $[H:N] < \infty$ ise, H/N bölüm grubu sonlu üçgen gruplarının birine izomorftur, [1].□

3.6.2 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun sonlu mertebeli eleman içeren alt grupları $H(\lambda_5)$, $H^2(\lambda_5)$, ve $H^5(\lambda_5)$ normal alt gruplarından başka sonlu mertebeli eleman içeren normal alt grubu yoktur.

İspat : N , $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun sonlu mertebeli bir eleman içeren bir normal alt grubu olsun. O halde N , iki veya beş mertebeli bir eleman içerir. Beş mertebeli bir eleman S dönüşümünün bir kuvvetine konjugedir, iki mertebeli bir eleman ise T dönüşümüne konjugedir. Dolayısıyla eğer N normal alt grubu sonlu mertebeli bir eleman içerirse , bu durumda N normal alt grubu T dönüşümünü veya S dönüşümünü veya her ikisini de içerir. Buradan şu üç durumu elde ederiz :

(a) Eğer N alt grubu T ve S dönüşümlerini içerirse $N = H(\lambda_5)$ olur.

(b) Eğer N alt grubu S dönüşümünü içerip T dönüşümünü içermezse $H(\lambda_5)/N$ bölüm grubu $T^2 = S = I$ bağıntılarından C_2 grubuna izomorftur. Buradan, permütasyon metodu ve Riemann – Hurwitz formülü ile $N = H^2(\lambda_5)$ elde edilir.

(c) Eğer N alt grubu T dönüşümünü içerip , S dönüşümünü içermezse, $T = S^5 = I$ bağıntılarından $H(\lambda_5)/N$ bölüm grubu C_5 grubuna izomorftur. Ayrıca, permütasyon metodu ve Riemann – Hurwitz formülünden $N = H^5(\lambda_5)$ bulunur ,[1]. \square

3.6.3 Teorem : N alt grubu , $H(\lambda_5)$ in $H(\lambda_5)$, $H^2(\lambda_5)$ ve $H^5(\lambda_5)$ den farklı bir aşikar olmayan normal alt grubu ise N serbest gruptur, [1]. \square

3.6.4 Teorem : N alt grubu , $H(\lambda_5)$ in μ indeksli bir serbest normal alt grubu olsun. Bu durumda $10 | \mu$ olur.

İspat : $|H : N| = |H : H'| \cdot |H' : N|$ yazılabilir. Burada $|H : H'| = 10$ olduğundan $10 | \mu$ olduğu görülür, [1]. \square

3.7 $H(\lambda_5)$ Hecke Gruplarının Temel Denklik Alt Grupları

3.7.1 Tanım : p bir asal sayı olmak üzere , $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun p seviyeli temel denklik alt grubu;

$$H_p(\lambda_5) = \{T \in H(\lambda_5) : T \equiv \pm I \pmod{p}\}$$

$$H_p(\lambda_5) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\lambda_5 \\ c\lambda_5 & d \end{pmatrix} : a \equiv d \equiv \pm 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{p}, ad - bc\lambda_5^2 = 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır, [1, 26, 27].

p asal sayı olmak üzere, $H_p(\lambda_5)$ temel denklik alt grubunu elde etmenin yöntemlerinden biri, p modülüne göre “indirgeme homomorfizmi” ni göz önüne almaktır. Burada ;

$$H(\lambda_5) \rightarrow H(\lambda_5)/K_{p,u}(\lambda_5)$$

homomorfizmasını göz önüne alalım. Bu homomorfizma altında T, S ve $R=TS$ nin görüntülerini sırasıyla $t_p, s_p,$ ve r_p ile gösterelim. $H(\lambda_5)/K_{p,u}(\lambda_5)$ kümesi ,

$$\langle t_p, s_p \mid t_p^2 = s_p^5 = r_p^p = I, r_p = t_p \cdot s_p \rangle$$

kümesinin bir homomorfik görüntüsüdür. Burada p nin tüm durumlarını inceleyelim;

a) $p=2$ durumunda $x^2-x-1=0$ polinom denkleminin ,

$$GF(2)=Z_2=\{0, 1\}$$

kümesinde çözümü yoktur. Buradan Z_2 ye bir u ekleyerek genişletebiliriz. Burada $u, x^2+x+1=0$ ikinci dereceden denkleminin bir köküdür. Böylece $Z_2[u]=\{0, 1, u, 1+u\}$ olur.

Burada $H(\lambda_5)/K_{2,u}(\lambda_5)$ bölüm grubu ,

$$t_p^2 = s_p^5 = r_p^2 = I$$

bağıntılarına sahip olur. O halde ,

$$H(\lambda_5)/K_{2,u}(\lambda_5) \cong D_5 \text{ olur.}$$

b) $p=3$ durumunda $H(\lambda_5)/K_{3,u}(\lambda_5)$ bölüm grubu ,

$$t_p^2 = s_p^5 = r_p^3 = I$$

bağıntılarına sahip olur. Böylece,

$$H(\lambda_5)/K_{3,u}(\lambda_5) \cong A_5 \text{ olur.}$$

c) $p=5$ durumunda ise $\sqrt{5}, 0 \in GF(5)$ eşit gibi düşünülebilir. Buradan

$$\lambda_5 \equiv \frac{1}{2} \equiv \frac{1+5}{2} \equiv 3 \pmod{5}$$

elde edilir. $3 \in GF(5)$ olduğundan, $H(\lambda_5)$ grubundan $PSL(2,5)$ kümesine bir homomorfizma vardır. O zaman $H(\lambda_5)/K_{5,u}(\lambda_5)$ bölüm grubu da

$$t_p^2 = s_p^5 = r_p^5 = I$$

bağıntılarına sahip olur. Burada $H(\lambda_5)/K_{5,u}(\lambda_5)$ bölüm grubu, (2, 5, 5) sonsuz üçgen grubunun sonlu bir bölüm grubuna izomorftur.

Burada $u_5=r^2$ diyelim. $\text{tr}(t_5u_5)=1$ olduğundan t_5u_5 elemanı 3 mertebeli olur. Yani $H(\lambda_5)/K_{5,u}(\lambda_5)$ bölüm grubu ,

$$\langle t_5, s_5 \mid t_5^2 = u_5^5 = (t_5u_5)^3 = I \rangle$$

gösterimine sahip olur. Bu durumda,

$$H(\lambda_5)/K_{5,u}(\lambda_5) \cong A_5$$

bulunur.

d) $p \geq 7$ ve p asal ise , iki durum söz konusudur ;

i) $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$

ii) $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$

durumlarını inceleyelim:

i) Eğer $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ ise , $\sqrt{5} \in \text{GF}(p)$ olur. Buradan λ_5 in minimal polinomu ikinci dereceden olduğundan λ_5 'in $\text{mod}(p)$ 'de u ve v gibi iki değeri vardır. Böylece $t_p, s_p, r_p \in \text{PSL}(2,p)$ olur. Buradan 2 farklı homomorfizma ;

$$\theta_i : H(\lambda_5) \rightarrow \text{PSL}(2,p) \quad (i= 1, 2)$$

$$\lambda_5 \rightarrow u$$

$$\lambda_5 \rightarrow v$$

şeklinde yazılabilir. (t_p, s_p, r_p) üçlüsü $\text{PSL}(2,p)$ yi üretir. Böylece $H(\lambda_5), K_{p,u}(\lambda_5)$ ve $K_{p,v}(\lambda_5)$ gibi iki normal denklik alt grubuna sahiptir.

ii) $p \not\equiv \pm 1 \pmod{10}$ ve $p \neq 3$ ile $p \neq 5$ olsun. Yani p , 5 in $\text{mod } p$ de tam kare olmadığı bir asal sayıdır. Bu durumda $\sqrt{5}$, $\text{GF}(p)$ nin bir elemanı olarak düşünülemez. λ_5 in minimal polinomunun derecesi 2 olduğundan $\text{GF}(p)$ yi $\text{GF}(p^2)$ ye genişletebiliriz. O halde $\sqrt{5} \in \text{GF}(p^2)$ olduğu düşünülebilir ve buradan

$$\theta' : H(\lambda_5) \rightarrow \text{PSL}(2,p^2)$$

şeklinde bir homomorfizma vardır. Burada $p \geq 7$ olduğundan (t_p, s_p, r_p) , $\text{PSL}(2,p^2)$ nin bir alt grubunu üretir. Bu altgrup ya $\text{PSL}(2,p^2)$ ya da $\text{PGL}(2,p)$ olur. (t_p, s_p, r_p) üçlüsünün düzensiz olmasından dolayı

$$H(\lambda_5)/K_{5,u}(\lambda_5) \cong \text{PSL}(2,p^2)$$

bulunur, [1, 26].□

3.7.2 Sonuç : $H(\lambda_5)$ grubunun $K_{p,u}(\lambda_5)$ temel denklik alt gruplarına bölüm grupları ve bölüm gruplarının mertebeleri aşağıdaki gibidir :

$$H(\lambda_5)/K_{p,u}(\lambda_5) \cong \begin{cases} \text{PSL}(2,p) & ; p \equiv \pm 1 \pmod{10}, \\ \text{PSL}(2,p^2) & ; p \equiv \pm 3 \pmod{10} \text{ ve } p \neq 3, 5 \\ D_5 & ; p = 2, \\ A_5 & ; p = 3, 5. \end{cases}$$

$$|H(\lambda_5) : K_{p,u}(\lambda_5)| \cong \begin{cases} \frac{(p-1)p(p+1)}{2} & ; p \equiv \pm 1 \pmod{10}, \\ \frac{(p^2-1)p^2(p^2+1)}{2} & ; p \equiv \pm 3 \pmod{10} \text{ ve } p \neq 3, 5 \\ 10 & ; p = 2, \\ 60 & ; p = 3, 5. \end{cases}$$

[1, 26].□

3.8 $H(\lambda_5)$ Hecke Gruplarının Denklik Alt Grupları

3.8.1 Tanım : I , $Z[\lambda_5]$ halkasının bir ideali olsun.

$$H(\lambda_5, I) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H(\lambda_5) \mid a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{I} \right\}$$

şeklinde tanımlı $H(\lambda_5, I)$ kümesine $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun I seviyeli temel denklik alt grubu denir, [7, 28].

3.7 Kısımında verilen $K_{p,u}(\lambda_5)$ temel denklik alt grubu ile $H(\lambda_5, I)$ temel denklik alt grupları aynı alt gruplardır.

3.8.2 Tanım : $H(\lambda_5, I)$ temel denklik alt grubunu içeren $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun herhangi bir alt grubuna I seviyeli bir denklik alt grubu denir, [7, 28].

$H(\lambda_5, I)$ temel denklik alt grupları $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun normal alt gruplarıdır. Ancak denklik alt grupları normal alt grup olmak zorunda değildir. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun en önemli iki denklik alt grupları şunlardır:

$$H_0(\lambda_5, I) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H(\lambda_5) \mid c \equiv 0 \pmod{I} \right\}$$

$$H_1(\lambda_5, I) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H(\lambda_5) \mid a \equiv d \equiv 1, c \equiv 0 \pmod{I} \right\}$$

Ayrıca $H(\lambda_5, I) \leq H_1(\lambda_5, I) \leq H_0(\lambda_5, I) \leq H(\lambda_5)$ olduğunu görmek kolayca mümkündür, [7].

3.8.3 Yardımcı Teorem : I , $Z[\lambda_5]$ halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun.

Bu durumda

$$|H(\lambda_5) : H_0(\lambda_5, I)| = N(I) \cdot \prod_{p|I} \left(1 + \frac{1}{N(p)} \right)$$

olur. Burada p , I idealini bölen bütün asal ideallerin tümünün çarpımıdır ($N(u+v\lambda) = u^2 - v^2 + uv$ şeklinde tanımlıdır), [7].□

3.8.4 Örnek :

a) Eğer $I=(2)$ ise, $N(2) = 2^2 = 4$ ve

$$\begin{aligned} |H(\lambda_5) : H_0(\lambda_5, I)| &= N(2) \cdot \prod_{p|2} \left(1 + \frac{1}{N(p)} \right) \\ &= 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \right) \\ &= 5. \end{aligned}$$

b) Eğer $I=(3)$ ise

$$\begin{aligned} |H(\lambda_5) : H_0(\lambda_5, I)| &= N(3) \cdot \prod_{p|3} \left(1 + \frac{1}{N(p)} \right) \\ &= 9 \cdot \left(1 + \frac{1}{9} \right) \\ &= 10. \end{aligned}$$

c) Eğer $I = (2 + \lambda_5)$ ise

$$\begin{aligned}
|H(\lambda_5) : H_0(\lambda_5, I)| &= N(5) \cdot \prod_{p|5} \left(1 + \frac{1}{N(p)}\right) \\
&= 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

d) Eğer $I=(p)$ ise

$$\begin{aligned}
|H(\lambda_5) : H_0(\lambda_5, I)| &= N(p) \cdot \prod_{p|p} \left(1 + \frac{1}{N(p)}\right) \\
&= p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) \\
&= p^2 + 1
\end{aligned}$$

elde edilir, [7].

3.8.5 Yardımcı Teorem : $I=(2)=2Z[\lambda_5]$ ve $A \in H(\lambda_5)$ alalım. Bu durumda,

$$A \in H_0(\lambda_5, I) \text{ ancak ve ancak } A \equiv \pm \begin{pmatrix} 1 & r\lambda_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{I}, (r=0, 1).$$

İspat : Eğer K, H, G grupları $K \leq H \leq G$ biçiminde gruplarsa

$$|G : K| = |G : H| \cdot |H : K|$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun $I=(2)$ şeklinde denklik alt grupları için

$$|H(\lambda_5) : H(\lambda_5, I)| = 10, \quad |H(\lambda_5) : H_1(\lambda_5, I)| = |H(\lambda_5) : H_0(\lambda_5, I)| = 5$$

eşitlikleri yazılabileceğinden ,

$$|H_0(\lambda_5, I) : H(\lambda_5, I)| = 2$$

elde edilir. Buradan,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin H(\lambda_5, I) \text{ ve } H_0(\lambda_5, I) = H(\lambda_5, I) \cup u.H(\lambda_5, I)$$

yazılabilir. Böylece $H_0(\lambda_5, I)$ daki her A matrisinin iki biçimi vardır.

1. Durum : Eğer $A \in H(\lambda_5, I)$ ise

$$A \equiv \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{I}$$

elde edilir.

2. Durum : Eğer $A \in uH(\lambda_5, I)$ ise

$$A \equiv \pm \begin{pmatrix} 1 & \lambda_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{I}$$

elde edilir, [7].□

3.8.6 Sonuç : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_0(\lambda_5, I)$ olsun. Bu durumda ,

a) Eğer $I = (2)$ ise, $a-d \equiv 0 \pmod{(2)}$ olur.

b) Eğer $I = (4) = 2^2$ ise, $a-d \equiv 0 \pmod{(4)}$ olur.

İspat : a) $a^2-1=(a+1).(a-1)$ olduğundan ve 3.8.5 Yardımcı Teoreminden

$$a^2-1 \equiv 0 \pmod{(2^2)} \tag{3.1}$$

elde ederiz. $A \in H_0(\lambda_5, (2))$ ve $ad-bc=1$ olduğundan,

$$ad \equiv 1 \pmod{(2)} \tag{3.2}$$

bulunur.

Varsayalım ki $\exists u \in Z[\lambda_5]$ $a-d \equiv u \pmod{(2)}$ olsun. Eşitliğin her iki tarafını a ile çarparsak ;

$$a^2-ad \equiv au \pmod{(2)}$$

bulunur. Bu durumda , $a^2 \equiv 0 \pmod{(2)}$ olduğundan (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden ,

$$u \equiv 0 \pmod{(2)}$$

elde edilir. Bu da gösterir ki,

$$a-d \equiv 0 \pmod{(2)}$$

olur.

b) $A \in H_0(\lambda_5, (4))$ ve $ad-bc=1$ olduğundan ,

$$ad \equiv 1 \pmod{(4)}$$

olduğu açıkça görülür. Buradan da,

$$a-d \equiv 0 \pmod{(4)}$$

bulunur, [7].□

3.8.7 Uyarı : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_0(\lambda_5, (2))$ olsun. Bu durumda

$$a-d \equiv 0 \pmod{(2)^2}$$

olması gerekmez, [7].

3.8.8 Örnek : $A=UTU^2T=\begin{pmatrix} 1+2\lambda_5 & -\lambda_5 \\ 2\lambda_5 & -1 \end{pmatrix} \in H_0(\lambda_5, (2))$ dir. A matrisi için ,

$$a-d = 2(1+\lambda_5) \circ 0 \pmod{(2)^2}$$

olur, [7].

3.8.9 Uyarı : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_0(\lambda_5, (4))$ olsun. Bu durumda,

$$a-d \equiv 0 \pmod{(2)^3}$$

eşitliğinin her zaman doğru olması gerekmez, [7].

3.8.10 Örnek : $A=\begin{pmatrix} 1+2\lambda_5 & -\lambda_5 \\ 2\lambda_5 & -1 \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım.

$$A^2=\begin{pmatrix} 3+6\lambda_5 & -2-2\lambda_5 \\ 4(1+\lambda_5) & -1-2\lambda_5 \end{pmatrix} \in H_0(\lambda_5, (2)^2) \quad \text{ve} \quad a-d = 4(1+\lambda_5) \circ 0 \pmod{(2)^3}$$

Ayrıca ;

$$A^4=\begin{pmatrix} 29+48\lambda_5 & -4(+5\lambda_5) \\ 8(3+5\lambda_5) & -11-16\lambda_5 \end{pmatrix} \in H_0(\lambda_5, (2)^3) \quad \text{ve}$$

$$a-d = 4(10+16\lambda_5) \circ 0 \pmod{(2)^3},$$

olduğu görülür, [7].

3.8.11 Uyarı : Eğer I ideali; $I \neq (2)$ şeklinde ise, 3.8.6 Sonuç (a) ve (b) doğru değildir, [7].

3.8.12 Örnek : $I=(3)$ olsun.

$$B=UTU^4TU^2TUTU^{-1}T=\begin{pmatrix} 25+40\lambda_5 & 10+17\lambda_5 \\ 9(2+3\lambda_5) & 8+11\lambda_5 \end{pmatrix} \in H_0(\lambda_5, (3)) \text{ alalım.}$$

B matrisi için , $a = 25 + 40\lambda_5$ dir. Buradan $a^2-1 \equiv 0 \pmod{(3)}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece $a-d \equiv 0 \pmod{(3)}$ elde edilir, [7].

3. 8. 13 Örnek : $I = (2+\lambda_5)$ ve $I \neq (2)$ olsun. Eğer,

$$C=TU^2TU^3TU^2TU^{-2}T=\begin{pmatrix} 12+25\lambda_5 & 5+6\lambda_5 \\ -(2+\lambda_5)^2(4+5\lambda_5) & -4(3+5\lambda_5) \end{pmatrix} \in H_0(\lambda_5, (2+\lambda_5))$$

matrisi göz önüne alınırsa $a=12+25\lambda_5$ ve $a^2-1=(11+25\lambda_5)(13+25\lambda_5)$ bulunur.

$N(a^2-1) = 131.229$ ve $N(2+\lambda) = 5$ elde ederiz. Böylece,

$N(a^2-1) \equiv 4 \pmod{(5)}$ olduğundan $a^2-1 \equiv 0 \pmod{(2+\lambda_5)}$ olur. Bu da

$a-d \equiv 0 \pmod{(2+\lambda_5)}$ olduğunu gösterir, [7].

3.8. 14 Sonuç : $H_0(\lambda_5, (2))=H_1(\lambda_5, (2))$ dir, [7].□

3.8.15 Yardımcı Teorem : $I=(\tau)$ ideali $Z[\lambda_5]$ halkasının bir asal ideali olsun.

p, τ üzerinde uzanan pozitif rasyonel asal olsun. Bu durumda ,

$$\mathbf{a)} \quad (p) = (\tau) \iff H_0(\lambda_5, (p))=H_0(\lambda_5, (\tau))$$

$$\mathbf{b)} \quad (p) \neq (\tau) \iff H_0(\lambda_5, (p)) \not\subseteq H_0(\lambda_5, (\tau)) \text{ olur, [7].} \square$$

3.8.16 Sonuç : $Z[\lambda_5]$ halkasının $I=(\tau)$ asal idealinde uzanan bir pozitif

rasyonel sayı p olsun. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun $H_1(\lambda_5, I)$ ve $H_0(\lambda_5, I)$ denklik alt gruplarının indeksleri tablodaki gibi verilir.

$$|H(\lambda_5) : H_1(\lambda_5, I)| \cong \begin{cases} 5 & ; p = 2, \\ 20 & ; p = 3, \\ 12 & ; p = 5, \\ (p^2 - 1)/2 & ; p \equiv \pm 1 \pmod{(10)}, \\ (p^4 - 1)/2 & ; p \equiv \pm 3 \pmod{(10)} \text{ ve } p \neq 3 \end{cases}$$

$$|H(\lambda_5) : H_0(\lambda_5, I)| \cong \begin{cases} 5 & ; p = 2, \\ 10 & ; p = 3, \\ 6 & ; p = 5, \\ p+1 & ; p \equiv \pm 1 \pmod{10}, \\ p^2+1 & ; p \equiv \pm 3 \pmod{10} \text{ ve } p \neq 3 \end{cases}$$

, [28]. \square

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada $H(\lambda_5)$ Hecke grubu ve bu grubun komütatör, kuvvet, denklik, temel denklik ve serbest normal alt gruplarının grup yapıları ve bu alt gruplar arasındaki ilişkiler hakkında bilgi verilmiştir.

Çalışmanın 3.1 kısmında $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun tanımı ile birlikte grubun, grup gösterimi verilmiştir.

3.2 kısımda temel bölge tanımı verilmiştir. Temel bölge kavramı kullanılarak $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup yapısının mertebesi 2 ve 5 olan iki devirli grubun serbest çarpımına izomorfik olduğu verilmiştir.

3.3 kısımda $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu tanıtılmış ve bu alt grubun grup yapısı hakkında bir teorem ifade ve ispat edilmiştir.

3.4 kısımda $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun genel olarak $H^m(\lambda_5)$ m. kuvvet alt grubu tanımı verilmiş ve m pozitif tamsayısının bütün durumlarını inceleyen teorem ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bulunan bu kuvvet alt grupları ile komütatör alt grupları arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bunlarla ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

3.5 kısımda $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun serbest normal alt grupları hakkında bilgi verilmiş ve $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun bütün serbest normal alt grupları bulunmuştur.

3.6 kısımda $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun temel denklik alt grubu tanımlanmış ve p seviyeli temel denklik alt gruplarını elde etmek için bölüm grupları oluşturulmuştur. Ayrıca p pozitif tamsayısının mod 10 daki denklemlerine göre elde edilen bölüm grupları verilmiştir.

3.7 kısımda $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun denklik alt grubu tanımı verilmiş ayrıca iki önemli denklik altgrubu olan $H_0(\lambda_5, I)$ ve $H_1(\lambda_5, I)$ gruplarından bahsedilmiş, bu gruplar arasındaki ilişkiler teorem ve ispatlarla açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Cangül İ. N., Normal subgroups of Hecke groups, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).
- [2] Hecke, E, “Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung”, *Math. Ann.*, 112, no. 1, (1936), 664.
- [3] Rosen, D., “The substitutions of Hecke group $\Gamma(2\cos\pi/5)$ ”, *Arch. Math. (Basel)*, 46, no.6, (1986), s. 533.
- [4] Lang, M. L., “The structure of the normalisers of the congruence subgroups of the Hecke group G_5 ”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39, no. 1, (2007), s.53.
- [5] Lang, M. L., Tan, S. P., “Normalizers of the congruence subgroups of the Hecke group G_5 ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127, no. 11, (1999), s.3131.
- [6] Lang, M. L., Tan, S. P., “Normalizers of the congruence subgroups of the Hecke group G_5 II”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128, no. 8, (2000), s.2271.
- [7] Uzun, S., “On the normalizer of the congruence subgroup $H_5^0(I)$ of the Hecke group H_5 ”, *Turkish J. Math.*, 31, no.2, (2007), s.207.
- [8] Şahin, R., Genişletilmiş Hecke grupları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).
- [9] Koroğlu, Ö., $\overline{H}(\lambda_q)$ ve $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal altgrupları ve sürekli kesirler, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir (2005).
- [10] İkikardeş, S., Genelleştirilmiş M^* -gruplar, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir (2008).
- [11] Jones, G. A., Singerman, D., Complex functions. an algebraic and geometric viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, (1987), s. 60.
- [12] Başkan, T., Ayırık gruplar, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe, Ankara, (1980).

- [13] Lehner, J., “Discontinuous groups and automorphic functions”, *Mathematical Surveys*, No. VIII, *American Mathematical Society, Providence, R.I.*, (1964), s. 425.
- [14] Maclachlan, C., “Maximal normal Fuchsian groups”, *Illinois J. Math.*, 15, (1971), s.104.
- [15] Yılmaz, N., Picard grubu ve $H(\sqrt{n})$ Hecke gruplarının bazı alt grupları, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa (1999).
- [16] Singerman, D., “Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups” *Bull. London Math. Soc.*, 2, (1970), s.319.
- [17] Allenby, R. B. J.T., Rings, fields and groups. An introduction to abstract algebra, Second edition, Edward Arnold, London, (1991), s. 156-167.
- [18] Lyndon, R. C., Schupp, P. E., Combinatorial group theory, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1977).
- [19] Fine, B., Rosenberger, G., Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products, *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 223. Marcel Dekker, Inc., New York, (1999).
- [20] Cangül, İ. N., “The group structure of Hecke groups $H(\lambda_q)$ ”, *Tr. J. of Mathematics*, 20, (1996), s. 203.
- [21] Cangül, İ. N., Bizim, O., “Commutator subgroups of Hecke groups”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.*, Vol. 30, 4, (2002), s.253.
- [22] Cangül, İ. N., Sahin, R., İkikardes, S., Koruoğlu, Ö., “Power subgroups of some Hecke groups II”, *Houston J. Math.*, 33, no. 1, (2007), s. 33.
- [23] Cangül, İ. N., Singerman, D., Normal subgroups of Hecke groups and regular maps, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 123, (1998), s.59.
- [24] Sahin, R., Bizim, O., “Some subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$ ”, *Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed.* 23, No.4, (2003), s.497.
- [25] Sahin, R., Koruoğlu, Ö., Commutator subgroups of the power subgroups of some Hecke groups, *Ramanujan J.*, yayına kabul edildi.

[26] Demirci, M., Cangül, İ. N., “A class of congruence subgroups of Hecke group $H(\lambda\Box)$ ”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.*, (N.S.) 1, (4), (2006), s. 549.

[27] İkikardes, S., Sahin, R., Cangül, İ. N., “Principal congruence subgroups of the Hecke groups and related results”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 40, no. 4, (2009), s.479.

[28] Lang, M. L., Lim, C. H., Tan, S. P., “Principal congruence subgroups of the Hecke groups”, *J. Number Theory*, 85, no. 2, (2000), s.220.